



Title	Produktraum ノ次元ニ就テ
Author(s)	山内, 省三
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 170, p. 710-718
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74683
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

753. Produktraum, 次元 = 就テ

山内 省三 (阪大)

§1. F_1, F_2 ヲ夫々 r, r' 次元ノ *Kompaktum* トスレバ $\dim. (F_1 \times F_2) \leq \dim. F_1 + \dim F_2$ ($\dim.$ ハ *Brouwer* ノ意味ノ次元) ハ成立スルガ等号ハ一般ニ成立シナシ (C.R. 190 (1930). *Pontryagin* ノ例). 然レ F_1 ガ任意次元ノ *Kompakt* ナ空間, F_2 ガ 1 次元ノ *separable* ナ空間ナルトキハ上ノ等号ガ成立スルコトヲ *Lurwicz* ガ示シテキル (*Ann. of. Math.* vol. 36. (1935) p. 194). F_2 ガ一次元ノ *Kompaktum* ナルトキハ勿論等号ハ成立スル。コノデハ F_1, F_2 ガ夫々ノヨリ大ナル次元 (*Brouwer* ノ意味ノ) ノ *Kompaktum* ナルトキ上ノ等式ガ成立スルタメノ一ツノ充分条件ヲ示シタイ。

§2. Produktraum $F = F_1 \times F_2$ ヲ近似スル *Spektrum*.

F_1, F_2 ヲ夫々 n -*クリッビ* 空間 R 内ノ r 次元, r' 次元 *Kompaktum* トシコレヲ *Unterteilung*, Folge ヲ

$$F_1: p_1, p_2, \dots, p_n \dots$$

$$F_2: p'_1, p'_2, \dots, p'_n \dots$$

$$(p_n, p'_n \text{ ハ } \varepsilon_n\text{-}\overline{\text{überdeckung}}. \lim \varepsilon_n = 0)$$

及ビ對應スル *Nerv* ノ Folge ヲ

$$F_1: (1) K_1, K_2, \dots, K_n, K_{n+1} \dots$$

$$K_n = \mathcal{P}_n(K_{n+1}), \dim K_n = r$$

$$F_2: (2) \quad K'_1, K'_2, \dots, K'_n, K'_{n+1}, \dots$$

$$K'_n = \mathcal{P}'_n(K'_{n+1}), \dim K'_n = r'$$

トスルト F は Zellerkomplex, Folge

$$(3) \quad K_1 \times K'_1, K_2 \times K'_2, \dots, K_n \times K'_n, K_{n+1} \times K'_{n+1}, \dots$$

----- = $\exists$ 1) 定義サレル。

$\square \quad = K_{n+1} \times K'_{n+1}$ カラ $K_n \times K'_n \sim$, abbildung ϕ_n は

$$\phi_n(K_{n+1} \times K'_{n+1}) = \mathcal{P}_n(K_{n+1}) \times \mathcal{P}'_n(K'_{n+1}) = K_n \times K'_n$$

= $\exists$ 定義スル。

$$\dim(K_n \times K'_n) = r + r'$$

(注意) 任意, n 数 $k, h, k > h =$ 對レテ $K_k \times K'_k$ カ

$\sim K_h \times K'_h \sim$, Projektion は

$$K_k \times K'_k = \phi_k^k(K_k \times K'_k) = \phi_k \dots \phi_{h+2} \phi_{h+1}(K_k \times K'_k)$$

= $\exists$ 定義サレル。

証明:¹⁾

F_1 , 点 x , F_2 , 点 y $\exists$ 定義スル Projektionsfolge, 夫
々

$$\varphi(x) = (T_1, T_2, \dots, T_n, \dots)$$

$$\eta(y) = (T'_1, T'_2, \dots, T'_n, \dots)$$

ナルトキ

F , 点 $p = (x, y)$ $\exists$ 定義スル Folge トシテ

$$\zeta(x, y) = (T_1 \times T'_1, T_2 \times T'_2, \dots, T_n \times T'_n, \dots)$$

1) P. Alexandroff "Gestalt und Lage" Ann. of Math. vol. 30.

ヲ考ヘル。

$\sigma = T_k \times T'_k$ ハ simplex ナハ + 1。

即チ K_k, K'_k が simplicial ナ $K_k \times K'_k$ ハ simplicial ナハ + 1。Zellen komplex ナ T 也。

$$\begin{aligned} \zeta(P_1) &= (T_1^{(1)} \times T_1'^{(1)}, T_2^{(1)} \times T_2'^{(1)}, \dots, T_k^{(1)} \times T_k'^{(1)}, \dots) \\ &= \varphi(x_1) \times \eta(y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta(P_2) &= (T_1^{(2)} \times T_1'^{(2)}, T_2^{(2)} \times T_2'^{(2)}, \dots, T_k^{(2)} \times T_k'^{(2)}, \dots) \\ &= \varphi(x_2) \times \eta(y_2) \end{aligned}$$

ナルトキ

$\zeta(P_1), \zeta(P_2)$ が benachbar ト云フ、ハ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \varphi(x_1) \text{ ト } \varphi(x_2) \text{ ト が benachbar ナ } \eta(y_1) = \eta(y_2) \\ \text{(ii)} \quad \eta(y_1) \text{ ト } \eta(y_2) \text{ ト が benachbar ナ } \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \\ \text{(iii)} \quad \text{或ハ } \varphi(x_1) \text{ ト } \varphi(x_2), \eta(y_1) \text{ ト } \eta(y_2) \text{ ト が 同時ニ} \\ \text{benachbar トキ。} \end{array} \right.$$

上ノ何レノ場合ニモ、ソレガ F = 於ケル同一ノ点ニ對應スル

コトハ明。

$\zeta(P_1)$ が $\zeta(P_2)$ ヲ umfassen スルト云フ、ハ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \varphi(x_1) \text{ が } \varphi(x_2) \text{ ヲ umfassen シテ, } \eta(y_1) = \eta(y_2) \\ \text{(ii)} \quad \eta(y_1) \text{ が } \eta(y_2) \text{ ヲ umfassen シテ } \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \\ \text{(iii)} \quad \text{或ハ } \varphi(x_1) \text{ が } \varphi(x_2) \text{ ナ, 及ビ } \eta(y_1) \text{ が } \eta(y_2) \text{ ナ夫々} \\ \text{同時ニ umfassen スルトキ。} \end{array} \right.$$

コノ定義カラ先ツ

F ノ点 $P = (x, y)$ = ハ唯一ツノ Kette $\zeta(P)$ が對應

スルコトハ容易ニナル。

$\zeta = (T_1 \times T'_1, T_2 \times T'_2, \dots, T_n \times T'_n, \dots) =$ 於
 $F(T_n), F(T'_n)$ ヲ夫々 F_1, F_2 Unterteilung, $T_n,$
 T'_n 各 Eckpunkt = 對應スルスベテ / Menge
 $F_{i_1}^{(1)}, \dots, i_n, F_{i_1}^{(2)}, \dots, i_n$ / Durchschnitt トスルトキ各
 $n =$ 對シテ夫々スベテ / $F(T_n), F(T'_n) =$ 属スル唯一 点 x 及
 y 存在スル。コノ 点 $P(x, y)$ が即チ $\zeta =$ 對應スル F
 ノ点ガアル。

今 Kette ζ ヲ Raumpunkt, Kette ヲ構成スル各
 Zelle ヲ $\mathcal{U}$ / 座標トスレバ任意ノ Raumpunkt $\zeta(p_0)$
 $= \mathcal{U}(x_0) \times \mathcal{U}(y_0)$ / m -te Umgebung トハ次ノ何レカ
 ノ 條件ヲ満足スル Raumpunkt $\zeta(p) = \mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y)$ スベ
 テヨリ成ル。

- $$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{(i)} \quad \mathcal{U}(x) \text{ が } \mathcal{U}(x_0) \text{ / } m\text{-te Umgebung} = \text{属シ} \\
 \hspace{20em} \mathcal{U}(y_0) = \mathcal{U}(y) \\
 \text{(ii)} \quad \mathcal{U}(y) \text{ が } \mathcal{U}(y_0) \text{ / } m\text{-te Umgebung} = \text{属シ} \\
 \hspace{20em} \mathcal{U}(x_0) = \mathcal{U}(x) \\
 \text{(iii)} \quad \mathcal{U}(x) \text{ が } \mathcal{U}(x_0) \text{ / } m\text{-te Umgebung} = \text{属シ, 同} \\
 \hspace{10em} \text{時} = \mathcal{U}(y) \text{ が } \mathcal{U}(y_0) \text{ / } m\text{-te Umgebung} = \\
 \hspace{10em} \text{属スル。}
 \end{array} \right.$$

カクシテ Spektrum = ヨリ定義サレタ空間ヲ $\mathcal{F}$ トスレ
 ビ 上ノコトカラ

F ト $\mathcal{F}$ トノ間ニハ 一対一ノ 對應 f が存在スル。此ニ
 f が 両連続ナルコトヲ云フ。($F_1 =$ 於テハ $f = f_1$, $F_2 =$
 於テハ $f = f_2$ 即チ $f(x, y) = (f_1(x), f_2(y) = \mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y))$

(i) $f: F \rightarrow \mathcal{F} = \text{連続} = \text{abbilden}$ スル。

$F \ni p(x, y): p(x, y) \text{ノ } x, y = \text{對シテ } \varepsilon_x^m, \varepsilon_y^m \text{ヲ夫々}$
 $x, y \text{ヨリ } F_1, F_2 = \text{於テ } x, y \text{ヲ含マサル Untertheilung}$
 $\text{ノ Menge } F_{i_1}^{(1)}, \dots, F_{i_m}^{(1)}, F_{i_1}^{(2)}, \dots, F_{i_m}^{(2)} \text{ノ和集合 } \mathcal{U}_x^m, \mathcal{U}_y^m =$
 $\text{至ル距離トスル。 } \rho_x^m, \rho_y^m \text{ヲ夫々 } \varepsilon_x^1, \varepsilon_x^2, \dots, \varepsilon_x^m \text{及ヒ}$
 $\varepsilon_y^1, \varepsilon_y^2, \dots, \varepsilon_y^m \text{ノ最小ノモノトシ } \min(\rho_x^m, \rho_y^m) = \rho^m$
 $\text{トスル。今任意ニ定メタ } F \text{ノ点 } p_0(x_0, y_0) = \text{對シテ } \mathcal{U}_m(\mathcal{F}_0),$
 $\mathcal{U}_m(\mathcal{F}_0) \text{ヲ } \mathcal{F}_0(x_0) = f_1(x_0), \mathcal{F}_0(y_0) = f_2(y_0), m\text{-te Umge-}$
 $\text{bung トスレバ } \rho(x_0, x) < \rho^m, \rho(y_0, y) < \rho^m \text{ナル } x, y$
 $= \text{對シテハ各 } m\text{-就テ } \mathcal{F}_0(x) < \mathcal{U}_m(\mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0(y) < \mathcal{U}_m(\mathcal{F}_0)$
 $\therefore \mathcal{C}(p) = \mathcal{F}_0(x) \times \mathcal{F}_0(y) \subset \mathcal{U}_m(\mathcal{F}_0) \times \mathcal{U}_m(\mathcal{F}_0)$

$$= V_m(\mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_0)$$

コノコトハ各 m ニ對シテ成立ツ。(ix上)

(ii) $f: \mathcal{F} \rightarrow F = \text{連続} = \text{abbilden}$ スル。

$\varepsilon > 0$ 及ビ $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0) \subset \mathcal{F}$ が任意ニ與ヘラレタトスル。充
 分大ニ m ヲトツテ $\varepsilon_m < \varepsilon$ ナラシム。任意ニ選バレタ $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$
 $\subset V_m(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0) = \text{對シテ } \mathcal{F} \subset \mathcal{U}_m(\mathcal{F}_0), \mathcal{F} \subset \mathcal{U}_m(\mathcal{F}_0)$ 然ッ
 テ $\rho(x, x_0) < \varepsilon, \rho(y, y_0) < \varepsilon$ (ix上)

§3. F_1, F_2 ヲ n -リッジ空間 R 内ニアル次元

(Brouwerノ意味) r, r' ナル einfach zyklische
²⁾
 Menge トスレバ $\dim(F_1 \times F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$.

証明: $\dim(F_1 \times F_2) \leq \dim F_1 + \dim F_2$ ハ既ニ知ラレ
 テキルカラ $\dim(F_1 \times F_2) \geq \dim F_1 + \dim F_2 = r + r'$ ナルコ
 トヲ云ヘバヨイ。(脚註2ハ次頁ニ)

F_1, F_2 , Unterteilung, Folge τ

$$(1) \begin{cases} F_1: P_1, P_2, \dots, P_k, \dots \\ F_2: P'_1, P'_2, \dots, P'_k, \dots \end{cases}$$

$F_1, F_2 =$ 於テ幾何學的ニ實現セラルタ Nerv, Folge 即チ Projektionsspektrum τ

$$(2) \begin{cases} F_1: N_1, N_2, \dots, N_k, \dots & \varphi_k = (N_{k+1}) = N_k \\ F_2: N'_1, N'_2, \dots, N'_k, \dots & \varphi'_k = (N'_{k+1}) = N'_k \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_k\text{-Überführung } \psi_k \text{ (} \lim \varepsilon_k = 0 \text{)} \\ \varepsilon'_k\text{-Überführung } \psi'_k \text{ (} \lim \varepsilon'_k = 0 \text{)} \end{array} \right\} = \text{ヨリ } F_1, F_2, \text{ 移ル}$$

$\bar{N}_k, \bar{N}'_k$, Teilmenge. $\bar{N}_{k,1} \subset \bar{N}_k, \bar{N}'_{k,2} \subset \bar{N}'_k$
 $(N_{k,1} \subset N_k, N'_{k,2} \subset N'_k) \text{ トスル。}$

F_1, F_2 が einfach zyklisch + ル故 $\bar{N}_{k,1}, \bar{N}'_{k,2}$
 ハ連続函数 $g_k, g'_k = \text{ヨリ } S^r, S^{r'} = \text{wesentlich} =$
 abbilden + ルル。從ツテ topf, Satz = ヨリ $N_{k,1},$
 $N'_{k,2}$ 内ニ algebraisch Zyklus $Z_k, Z'_k \pmod{m_k}$
 が存在シテ $g_k, g'_k = \text{ヨリ grad} \wedge \text{Null} \neq \text{ハ} \text{イ}$
 $\pmod{m_k}$ 。

$$\left. \begin{array}{l} Z^r = (Z_1^r, Z_2^r, \dots, Z_k^r, \dots) \\ Z'^{r'} = (Z_1'^{r'}, Z_2'^{r'}, \dots, Z_k'^{r'}, \dots) \end{array} \right\} \wedge \text{大々 } F_1, F_2 = \text{於}$$

ヲトスル wahr Zyklus.

$Z_1 \times Z_2 \neq 0$ in $F = F_1 \times F_2$ が云へルバヨイ。

$$Z_1 \times Z'_2 = (Z_1 \times Z'_1, Z_2 \times Z'_2, \dots, Z_k \times Z'_k, \dots) \sim 0 \text{ in}$$

2) P. Alexandroff Dimensionstheorie Math. Ann.
 106, 5. Hauptsatz)

F ト 假定 スル ト

$Z_k^r \times Z_k^{r'} = \dot{C}_k^{r+r'+1}$ + ル Komplex $C_k^{r+r'+1}$ が F 内 に 存在 ス。

$\Phi_k(F) = (\psi_k(F_1), \psi_k'(F_2))$ + ル 連続函数 = ヨリ F の Menge.

$\bar{N}_{k,1} \times \bar{N}_{k,2}' = \text{überführen} + \text{レル}.$ コノ 際

$\Phi_k(Z_k \times Z_k') = Z_k \times Z_k' \subset N_{k,1} \times N_{k,2}'$ 便宜上 $C_k^{r+r'+1} = C$ ト 書ク。C ヲ 充分 小 ナク Unterteilen シテ (ヨリ 際 $Z_k \times Z_k' \in$ unterteilen + レルガ、コレハ N_k, N_k' ヲ unterteilen スルコト = ヨリ 各 Z_k, Z_k' ヲ unterteilen シテ オク) コレヲ C' ト スルトキ $\Phi_k(C')$ が δ -Komplex + ル 様 = スル。コノ $= \delta < d(P_k), \delta < d(P_k')^3)$

$Z_k \times Z_k' = \Phi_k(\dot{C}) = (\Phi_k(C))^*$, Z_k, Z_k' , Unter-
teilung ヲ $\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}_k'$ ト スレバ

$\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_k' = \Phi_k(\dot{C}') = (\Phi_k(C'))^* = \dot{C}''$ コノ $= \Phi_k(C') = C''$.

C'' , 頂点ノ内 $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_k'$, 頂点ヲ Unter-
teilung = ヨリ 新 = 出来タ ∈ / , 例ヘバ $P(x, y)$ ハ 夫々 x, y ヲ 含ム P_k, P_k' , Element = 對應スル 頂点 = 移シ $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_k'$ 以
外ノ ∈ / , 例ヘバ $p'(\psi_k(x), \psi_k'(y))$ ハ $\psi_k(x), \psi_k'(y)$
ヲ 含ム P_k, P_k' , Element = 對應スル 頂点 = 移ス。コレ
ヲ / Verschiebung ヲ ϕ ト スレバ、 $\phi(\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_k') = Z_k \times Z_k'$,
 $\phi(C'') = C'''$, $C''' \subset N_{k,1} \times N_{k,2}'$, Teilkomplex ヲ
 $\dot{C}''' = Z_k \times Z_k'$ in $N_{k,1} \times N_{k,2}'$

3) Alexandroff . "gestalt u. Lage" P. 116

故 $= C''$ は degenerated complex.

従って C'' は degenerated. 一方 $Z_k \times Z'_k$ は not degenerated, コレハ矛盾.

$$\therefore Z_k \times Z'_k \neq 0 \text{ in } F = F_1 \times F_2$$

$$\therefore \dim(F) = \dim(F_1 \times F_2) \geq r + r'$$

$$\therefore \dim F = \dim F_1 + \dim F_2.$$

q. e. d.

この方法ハ Sphäre = wesentlich = abbilden +
それコトカラ $F = \text{テ}$ $\times 0$ + Zyklusヲ見出す方法デアッ
タ. 直接 = マル = ハ 即チ

定理:

ゆーくり つど空間 R 内 = マル r, r' 次元ノ Kompaktum
 F_1, F_2 = 於チ夫々 not homolog Null + 真の
Zyklus (nach variable Modul) $Z^r, Z^{r'}$ が
存在スレトキハ $Z^r \times Z^{r'}$ モ亦 $F_1 \times F_2$ = 於イテ not
homolog Null ヲ証明スレバヨイ。

証明ハ前ト殆ンド同ジデアル. マハリ $Z \times Z' \sim 0$ in F
ト假定シテ $Z_k \times Z'_k = C_k$ + 真の Komplex C_k ヲ考へ
ルノデアルガ $\Phi_k = \text{ヨリ } F \text{ へ } \bar{N}_{k,1} \times \bar{N}'_{k,2} = \text{überfüh-}$
 ren シテ 際 = $\psi_k(Z_k), \psi'_k(Z'_k)$ ハ夫々 $\bar{N}_{k,1}, \bar{N}'_{k,2}$
内デ少シズレルカラ C_k ヲ充分小カク unterteilen シテ
 $\Phi_k(C')$ がマハリ δ -Komplex + 真の様 = スル. コノ
 $\delta < d(P_k), \delta < d(P'_k)$

$\Phi_k(C')$, Eckpunktverschiebung ϕ ヲ今度

$\wedge \psi_k(\mathbb{Z}_k), \psi'_k(\mathbb{Z}'_k) = \varepsilon$ ホドコト。適當 = 大 +
 $\wedge k = \text{対して} \wedge \phi \psi_k(\mathbb{Z}_k), \text{及} \phi \psi'_k(\mathbb{Z}'_k) \wedge$ 夫々
 $N_{k,1}, N'_{k,2} = \text{於ける degenerate といふ Zyklus.}$

$$\text{然るに } \phi \psi_k(\mathbb{Z}_k) \times \phi \psi'_k(\mathbb{Z}'_k) = (\phi \Phi_k(c'))' .$$

$$\text{in } N_{k,1} \times N'_{k,2}$$

$\text{故} = (\phi \Phi_k(c'))' \wedge \text{degenerate} + \text{Komplex}$ 故 = $\vee$

1 Rand $\wedge$ degenerate コレハ矛盾。 $q.e.d.$