



Title	確率法則ノ分解問題, VI
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 170, p. 718-724
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74684">https://doi.org/10.18910/74684</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# 754. 確率法則 / 分解問題, VI

北川 敏 男 (阪大)

§ 8.  $K[\mathcal{L}], K^*(\mathcal{L})$  = 於ケル  $\mathcal{L}$  ノ 分解問題 (続キ)

前回 = 述べタ  $K[\Phi]$  = 開シテハ, 更 = 附加スベキ事ガ  
アルガ、都合上後述 = 譲リ、次ノ論題 = 移ラシ。

(2) 安定 + 確率法則: 前回 § 8 ガ 定義 シタ 如ク、  
 $K^*[F]$  ガ 結合 = 開シテ 閉ガテ 居ルマシ + 確率法則 (= 分布  
函数)  $F(x)$   $\gamma$  意味スル。即チ次ノ性質  $\gamma$  モツ様 + 分布函  
数  $F(x)$   $\gamma$  イフノデアアル:

(S<sub>1</sub>)  $X_1, X_2$  ガ 相互 = 独立  $\gamma$ 、且ツ共 =  $F(x)$   $\gamma$  分布  
函数トスルトキ = ハ、任意ノ  $a_1 > 0, a_2 > 0$  = 對シテ

$$(33) \quad a_1 X_1 + a_2 X_2 = a X$$

トナル様 +  $a = p(a_1, a_2)$  ト、 $F(x)$   $\gamma$  分布函数トスル確率

変数  $X_t$  が定まる。

$\mathbb{R}^*[F]$  = 於ケル分解問題トシテ、安定+確率法則ハ果シテ存在スルカ ( $\mathbb{R}(X)$  以外 =  $\mathbb{C}$ )、又ソノ一般ノ形ハ何カトイフ問題ガ第一 = 起ルノハ当然デアロウ。シカノミナラズ、コノ問題ハ、次ノニツノ問題 =  $\mathbb{C}$  関係シテクル。ソノ第一ハ、Gaussノ法則ノ牽引域 = 属シナイ確率法則ノ例ヲ求メルコト、ソノ第二ハ、無限 = 分解可能+確率法則ノ「簡單+例ヲ求メルコト」ガアル。コノ方面ヲ開拓シタ Lévyノ興味モ、コノ後ノ二問題 = 在ツタト思ハレル。然シ次ノ発展 = 備ヘルトイフ立場カラハ、 $\mathbb{R}^*[F]$  = 於ケル分解問題 = 關スル一ツノ結果トシテ眺ムルベキデハナカロウカ。

安定+確率法則ノ上述ノ問題ハ Lévy = 依リ完全 = 解カレテ居ル:

定理 8. (Lévy): 安定+確率法則ノ特性函数  $f(t)$ ハ必ず次ノ四種類ノ函数ノ何レカ = ナル:

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } \exp \left\{ \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} \left( -1 + i \frac{t}{|t|} \beta \tan \frac{\pi}{2} \alpha \right) |t|^\alpha \right\} \left( \begin{array}{l} 0 < \alpha < 1 \\ -1 \leq \beta \leq 1 \\ C \geq 0 \end{array} \right) \\ \text{II. } \exp \{ -C_0 |t| + i c_1 t \} \quad (C_0 \geq 0, c_1 \text{ real}) \\ \text{III. } \exp \left\{ \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} \left( -1 + i \frac{t}{|t|} \beta \tan \frac{\pi}{2} \alpha \right) |t|^\alpha \right\} \left( \begin{array}{l} 1 < \alpha < 2 \\ -1 \leq \beta \leq 1 \\ C \geq 0 \end{array} \right) \\ \text{IV. } \exp \{ i m t \} \quad (m \text{ real}) \text{ 又ハ } \exp \left\{ -\frac{\lambda t^2}{2} \right\} \\ \hspace{15em} (\lambda \geq 0) \end{array} \right.$$

逆 = (34)ノI - IVノ何レノ函数モ、parameters  $\alpha, \beta, C_0, C_1, \lambda, m$ 等ヲ夫々ノ附帯條件ノ下ニ任意 = 與フル

トキ、常 = 安定 + 特性函数ヲ表ハス。

コノ定理ノ証明ハ、私ノ知レル範圍内ハ、二通りノ方法  
ガアル。ソノ何レモ共ニ、次ノ補助定理ヲ用キル。

補助定理 9: 安定 + 確率法則ノ特性函数  $f(t)$  ノ適當  
=  $c_0 \geq 0, c_1, \alpha$  ナル実数ヲ選ブコトニ依リ、

$$(35) f(t) = \exp\left\{-c_0 + i \frac{t}{|t|} c_1 |t|^\alpha\right\} \quad (-\infty < t < \infty)$$

ノ形ニ表ハシ得ル。而シテ、茲ニ (33) ノ  $a_1, a_2, a$  ニ關シテ  
ハ

$$(36) a \equiv \rho(a_1, a_2) = (a_1^\alpha + a_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

ナル關係ガアル。

Lévy ノコノ定理ノ証明ノ記述ハ、少シク簡單ニスガレ  
ト思ハレルカラ、私ハ後デ、詳シク述ベテ見ルガ、先ヅコノ  
補助定理ノ成立ヲ假定シテ、定理 9 ノニツキ証明法 A, B  
ヲ述ベテ置カシ。

A. 無限ニ分解可能ナ確率法則ノ結果ヲ利用スル方法

補助定理 10: 安定 + 確率法則ハ無限ニ分解可能ニア  
ル。

証明:  $X$  ノ分布函数  $F(x)$  ハ安定ニアルトスル。補助  
定理 9 ノ (36) 式ニ依リ、カナル  $F(x) =$  對シテハ次ノ様ニ  
 $\alpha > 0$  ガ存在スル:

$n$  ヲ任意ノ自然数トスルトキ、相互ニ獨立ナ且ツ皆  $F$  ヲ  
分布函数ニスルヤウナ  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ニ對シテ、分  
解

$$(37) \quad \bar{X} = \frac{1}{n^\alpha} (\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が出来ル。ソコデ、 $\bar{X}$  が無限 = 分解出来ルコトヲイフニハ、  
任意、 $\varepsilon > 0$  = 對シテ

$$(38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Max. Pr.} \left[ \left| \frac{\bar{X}_k}{n^\alpha} \right| \geq \varepsilon \right] = 0$$

ヲ示セバヨイ。シカレニ、コレハ明カニ成立スル。蓋シコノ  
場合 (37) = 依リ上式ノ  $\lim$  ノ内ハ  $1 - F(n^\alpha \varepsilon) + F(-n^\alpha \varepsilon)$   
= 等シク、コレハ  $\alpha > 0$  = ヨリ、 $n \rightarrow \infty$  ノトキ 0 トナルカ  
ラデアル。〔証明終〕

然レニ、無限 = 分解可能ノ確率法則ハ定理 2 (II) = ヨリ  
ソノ形カ與ヘラレテ居ル。ソレ故先ガ  $0 < \alpha \leq 2$  ナルコトガ  
出来ルデアル。(定理 2 = 於テ  $n(u)$  = 関スル條件カヲ) ソ  
コデ補助定理 9 ト睨ミ合セテ  $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $1 < \alpha < 2$ ,  
 $\alpha = 2$  ノ場合ヲ、夫々調べテ行ケルヨイ。コレ = 関スル議  
論ハ Lévy ノ書 = 詳シイ。

### B. 確率法則ノ牽引域ヲ利用スル方法 分布函數

$G(x)$  ガ  $F(x)$  ノ牽引域 = 属スルトイフニハ、相互 = 独立ヲ  
且ツ、皆  $G(x)$  ヲ分布函數トスルヤウニ独立ナ確率変數ノ系  
列  $\{\bar{X}_n\}$  = 對シテ、通常 = 常數列  $\{A_n\}$ ,  $\{N_n\}$  ヲトレバ、  
 $(S_n - A_n)/N_n$  (但シ  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ) ノ分布  
函數ガ、 $n \rightarrow \infty$  ノトキ、 $F(x)$  ノスベテノ連続点デ、 $F(x)$   
= 収斂スルコトヲ意味スル。コノトキ必然的ニ、 $F(x)$  又  
一ツノ分布函數トナル。ソコデ、 $F(x)$  ガ分布函數デアルコ  
トヲ示スノガ直接 = ハ困難ナトキ、 $F(x)$  ノ牽引域 = 分布函

數  $G(x)$  が存在シテ居ルコトヲ示スコト = 依リ、目的ヲ達スルコトが出来ル。今ノ場合、(25)ナル函数が特性函数ナルコト即チ、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = f(t)$  トナルヤウナ分布函数  $f(t)$  ノ存在ヲ示スノ =、コノ考ヘテ用キルコトが出来ル。ソレ = 實際 Lévy ノ旧著<sup>(2)</sup> = 於テ與ヘラレテ居ル。

以上定理 9 ノ証明ハ概略 = 止メ、次 =

補助定理 9 ノ証明ヲ示サウ。函数方程式

$$(39) \quad f(a_1 t) f(a_2 t) = f(\rho(a_1, a_2) t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

$a_1 > 0, a_2 > 0$

が  $F$  ノ特性函数 = 關シテ成立ツ。問題ハコレヲ解ク事ヲアル。

今  $a_1 = a_2 = 1$  トオケバ、 $\rho(1, 1) = \rho$  トオクトキ

$$(40) \quad f(t)^2 = f(\rho t)$$

トナル。  $\rho = 1$  トスレバ、 $f$  ノ連続性 = ヨリ  $f(t) \equiv 1$  (trivial),  $f(t) \equiv 0$  (absurd) = ナル。依ツテ  $\rho \geq 1$  トシテ論ズレバヨイ。

$\rho \geq 1$  ノ何レ = シテ  $\epsilon$ ,  $f(\zeta) = 0$  トナルヤウナ  $\zeta$  ハ存在シ得 + イ。〔何者、 $\rho > 1$  ノ場合、 $f(\zeta) = 0$  トスルト、(40) ト  $f$  ノ連続性トカラ  $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\rho^{-n} \zeta) = f(\zeta) = 0$ 。

一方  $f$  ノ特性函数トカラ  $f(0) = 1$ 。コレハ矛盾ナル。

$0 < \rho < 1$  ノトキ = 同様〕

依ツテ  $\log f(t) = \psi(t)$  ハ、 $\psi(1) = 0$  ト規約スル事

(2) Calcul des probabilités Chapitre VI, Les lois exceptionnelles p. 252—277.

=依り、一意的 = 決定レベル。  $\psi$  = 関シテハ (39) カラ、

$$(41) \quad \psi(a_1 t) + \psi(a_2 t) = \psi(\rho(a_1, a_2) t) \\ (-\infty < t < \infty)$$

ナル函数方程式が成立スル。

茲テ、吾々ハ  $a = \rho(a_1, a_2)$  ナル函数ヲ調ベテミルト:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ. \quad \rho(a_1, a_2) = \rho(a_2, a_1) \\ 2^\circ. \quad \rho(a_1, a_2) = a_1 \rho(1, \frac{a_2}{a_1}) \equiv a_1 h(\frac{a_2}{a_1}) \\ 3^\circ. \quad h(x) \equiv \rho(1, x) \text{ハ } x > 0 \text{ = テ連続} \\ 4^\circ. \quad h(x) \text{ハ } x > 0 \text{ ガ純單調増加且ツ } h(x) > x. \end{array} \right.$$

コノうち 4<sup>0</sup> / ミガ証明ヲ要スルデアロウ。 4<sup>0</sup>ヲ示ス=ハ:

(i) 若シ  $h(x_1) = h(x_2)$  ナラバ必ズ  $x_1 = x_2$ 。 若シ、  
 $x_1 > x_2$  トスレバ  $f(x_1, t) = f(x_2, t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) コ  
レハ、前述 = 示シタ如ク考ヘテフテヨイフトナル。

(ii)  $h(x) > x$ 。 何者、散縮度増加ノ原理 = ヨリ、 $f(x)$ ,  
 $f(xt)$ ,  $f(h(x)t)$ , ヲ夫々特性函数トスル分布函数ノ濃  
度函数ヲ夫々  $Q(x)$ ,  $Q_1(x)$ ,  $Q_2(x)$  トスルト、 $Q_1(x) > Q_2(x)$   
(充分大ナル  $x$  マテ、 $x = \forall x$  テ) 然ル =  $Q_1(x) = Q(x/h(x))$ ,  
 $Q_2(x) = Q(x/h(x))$  テアルカラ、 $Q(\frac{x}{h(x)}) > Q(\frac{x}{h(x)})$ 。  
然ル =、 $Q$  ハ單調増加スカラ  $h(x) > x$ 。(i), (ii) ト 3<sup>0</sup> トカラ  
4<sup>0</sup>ヲ得ル。

次 =、 $h(h(1)) = u(2)$ ,  $h(u(2)) = u(3)$ , -----  
---,  $h(u(n)) = u(n+1)$  トオクトキ、(41) カラスベテ、自  
然数  $n$  = 對シテ  $n\psi(t) = \psi(u(n)t)$  トナル。 次 = 正ノ有  
理數  $\lambda = \frac{m}{n}$  = 對シテハ  $m\psi(t) = \psi(u(m)t)$  ト上式ト

カラ、 $\lambda \psi(t) = \psi\left(\frac{\mu(m)}{\mu(n)} t\right)$  トナル。

ソコデ有理数  $\lambda =$  對シテ  $\mu(\lambda) = \frac{\mu(m)}{\mu(n)}$  ト定義スルコト

=ヨリ、函数  $\mu$  の定義域ヲ、スベテノ正ノ有理数ニマデ拡張スル。  $\lambda$  i expression = 関セド一意ニキマルコトハ

$\lambda \psi(t) = \psi\left(\frac{\mu(m')}{\mu(n')} t\right) = \psi\left(\frac{\mu(m)}{\mu(n)} t\right)$  カラ明ラカ。

カクシテ定メラレタ  $\mu(\lambda)$  ハ純單調増加、依ツテ無理数  $\lambda =$  對シテモ  $\mu(\lambda)$  ヲ定義シテ  $\lambda \psi(t) = \psi(\mu(\lambda) t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) ナル様ニ純單調増加  $\mu(\lambda)$  ヲツケリヨル。明カニ、

$\mu(n) > n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 従ツテ、 $t > 0$  ヲ如何ニ與ヘテモ、 $t = \mu(\delta)$  トナル様ニ  $\delta > 0$  ガキマル、依ツテ

$$(43) \quad \lambda \psi(\mu(\delta)) = \psi(\mu(\lambda) \mu(\delta))$$

依ツテ  $\psi(\mu(\delta)) = \delta$ 、 $\psi$  ハ純單調増加函数ノ逆函数トナル。

故ニ、 $\mu(\delta) \mu(\lambda) = \mu(\delta \lambda)$  ( $\delta > 0, \lambda > 0$ ) ナル純單調増加ナ  $\mu$  ヲ求メレバヨイ。コレカラ、(35) (36) ニ到達スル。

—(証明終)—