



Title	大數ノ法則, IV
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 170, p. 724-731
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74685
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

755. 大數ノ法則, IV

北川 敏男 (阪大)

§ 3. Liapounoffノ定理 = 關スル Lindeberg-Lévy;

1 方法 (續キ) 次 = 吾々の條件 (C₁) が假定サレテナイ
場合ヲ論ズル。

コノ時ニハ、 $\sigma_n^2 \equiv E_{n-1} \{X_n\}$ ハ、 $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$
ノ値ニ從屬スル確率変數デアアル。

今手始メトシテ、或ル $\varepsilon > 0$ ヲ與フルトキ、確率 0 ノ場
合ヲノゾイテハ、次ノニツノ何レカが起ルトスル：

(i) $\sum \sigma_n^2$ ハ発散スル； (ii) $\sum \sigma_n^2$ ハ收斂シテ而
モ $\geq \varepsilon$ 。コノ假定ノモトニ於テハ、確率 0 ノ場合ヲノゾイテ
ハ

$$(1) \quad b_n^2 \equiv \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \geq \varepsilon$$

トナル様ナ最小ノ自然數 n が存在スル。勿論、 n ハ一般ニハ
確率変數デアツテ、(C₁) ノ假定ノアル場合ノ如ク常數ニナル
トハ限ラナイ。トモカク、 n ヲカク定義スルトキニハ、

$$(2) \quad b_{n-1}^2 + C \sigma_n^2 = \varepsilon$$

トナル様ナ $0 < C \leq 1$ が存在スル。コノ C 亦確率変數デ
アル。ソコヲ Lévy ハ ε -section トシテ、
上ノ C ヲ用キテ

$$(3) \quad S(t) = S_{n-1} + C X_n$$

ナルモノヲ導入シタ。⁽¹⁾ コノ思想ハ、連鎖級數ヲ論ズル上ニ於
テ、重要ナ役目ヲナス。以下ニ於テコレヲ示サウ。

吾々ハ先ヅ ε ヲ固定シテ、結果ヲ先ヅ導キ出ストルノヲ

(1) Original. Lévy: *Bulletin des sciences Mathématiques*, (1935) pp. 113 但レコノテハ、專ニ Lévy
ノ著者ニ限リ所加多イ。

アルカラ、便宜上 $C=1$ トシテモ一般性ヲ失ハレナイ。サテ
ソノ約束ノモトデハ

定理4. 条件(C)が満足サレ、且ツ $S(t)$ ノ各項が絶
對値 = 於テ $\varepsilon\sqrt{t}$ ヲ超エナイナラバ、任意ノ實數 x = 對シテ

$$(4) \left| \Pr. \left\{ \frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x \right\} - \Pr. \{ \xi < x \} \right| < 6\varepsilon^{\frac{1}{4}}$$

注意: 吾々ノ規約ノモトデハ $b_n^2 = t$ ガアルカラ、 $S(t)$
ノ各項ノ絶對値ガ $\varepsilon\sqrt{t}$ ヲ超エナイトイフコトハ (C') = 外ナラ
ナイ。但シ、コノ注意スベキコトハ定理3 = 於テハ、 b_n ハ
 n ノ函數ガ一意ニキマツタモノデアルガ、上ノ定理デハ、 b_n ト
 n トノ關係ハ確率変數的デアルコトデアル。

証明: 常數 λ , 確率変數 Z , ξ ヲバ、定理3ノ証明
デ用キタト同ジ意味ノモノトスル。先ヅ、吾々ハ

$$(5) \left| \Pr. \left\{ \frac{S(t)}{\sqrt{t}} + \lambda Z < x \right\} - \Pr. \{ \xi + \lambda Z < x \} \right| < \frac{\lambda \varepsilon}{2\lambda^3}$$

ヲ示サウ。コレが出来レバ、定理3ノ証明デ用キタト同ジ
方法ニヨリ、(4)ナル不等式が得ラレルカラ。

前回第169号、p. 679下カラ8行目 = 得タ不等式ハ、
今ノ場合 $b_n^2 = t = 1 \leq n$ トシテ成立ツ。今ノ場合 n
ガ確率変數トイフコトハ、コノ証明ニ影響シナイ。又 $n > n$
ニ對シテハ $X_n = \sigma_n = 0$ トオク。然ルトキニハ同様ノ關係
ガスベテ $n = \infty$ ニ關シテ成立ツ。

$$U_n = S_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sigma_{\nu} \xi_{\nu},$$

ト置カウ。ソコデ n が上限デアルトイフコトハ、モハヤ何等ノ意味ヲモタナイ。 $\nu \geq n$ = 對シテハ 常 =

$$U_\nu = S_n = S(t)$$

エヲバ $X - S_{\nu-1}$ プ置キカヘルコト = 依リ、次ノ結果ヲウル。

$$(6) \quad | \Pr. \{ U_\nu + Z < x \} - \Pr. \{ U_{\nu-1} + Z < x \} | \\ \leq k' \varepsilon E \{ \sigma_\nu^2 \}$$

依ツテ

$$(7) \quad | \Pr. \{ S(t) + Z < x \} - \Pr. \{ S + Z < x \} | \\ \leq k' \varepsilon E \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu^2 \right\}$$

右辺ハ $k' \varepsilon$ = 等シイ。

以上 = 於テハ $t=1$ トシタガ、一般ノ t = 對シテハ $S(t)$ ヲバ $S(t)/\sqrt{t}$ ヲ置キ換ヘテ考ヘレバヨイ。又又ヲバ λZ ($\lambda > 0$) ヲオキカヘルト、(7) デハ k' ハ k'/λ^2 デオキカワル。コレカラ (5) ヲ得ル。コレデ吾々ノ目的從ツテ定理4ノ証明が出来タ。〔証明終〕

更ニ進ンデ吾々ハ $S(t)$ ノ $t \rightarrow \infty$ ノトキノ漸近行動ヲ調べテ見ヤウ。定理4カラ直チニ看取サレル事トシテ：

定理5. 聯鎖ナ確率変数ノ系列 $\{X_\nu\}$ = 對シテ、次ノ三ツノ條件が満足サレテ居ルトスル：

(i) 條件(C)が成立ツ。

(ii) 確率変数列 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu^2$ ノ発散スル確率が1デアル。

(iii) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_{\nu,0}^2 = \infty$ トナル様ナ $\{\sigma_\nu\}$ ($\nu=1, 2, \dots$) ノ

値ノ数列 $\{\sigma_{\nu,0}\}$ ($\nu=1, 2, 3, \dots$) = 對シテハ、 $n(t)$ ヲ

バ、 $\sigma_{1,0}^2 + \sigma_{2,0}^2 + \dots + \sigma_{n,0}^2 \geq t$ ヲ満足スル最小ノ自然数トスルトキ、次ノヤウナ t ノ函数 $\varepsilon(t)$ ヲバ、 $\{\sigma_{\nu,0}\}$
 = 従属シテ撰バコトが出来ル。

$$(2) \quad |\Sigma_{\nu}| < \varepsilon(t) \sqrt{t} \quad (\nu=1, 2, \dots, n(t))$$

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

然ル時ニハ、スベテノ実数 x ニ對シテ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Pr.} \left\{ \frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

然ラバ上ノ定理ヲ假定(ii)ノナキ場合ハ如何、次ニコレヲ研究シヤウ。

今暫ラク、 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_{\nu}^2$ ガ収斂スルトイフ事象ヲバ、 A デ表ハスコトニスル。 $\text{Pr.}\{A\} = 0$ ガ上ニ考ヘタ場合デ、ソレハ清シデ居ル。 $\text{Pr.}\{A\} = 1$ ノ場合ハ、問題ニナラナイ。依ツテ以下ニ於テハ、 $0 < \alpha \equiv \text{Pr.}\{A\} < 1$ トシテ議論ヲス。トル事ニスル。又 $\beta = 1 - \alpha$ トオク。

サテ、 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_{\nu,0}^2 > t^2$ トナル様ナ $\{\sigma_{\nu,0}\}$ デナケレバ、 $\sigma_{n,0}^2 \geq t^2$ トナル $n(t)$ ハアリ得ナク、従ツテ $S(t)$ ハ存在シ得ナイ。 $S(t)$ ガ存在シテコソ、問題ハ起ルノデアルカラ、 $\sum \sigma_{\nu}^2 > t$ トナル事象が起ツタトシテ、ソノ條件ノモトデノ $S(t)$ ノ条件付確率分布ヲ調べルコトが先ヅ以テ問題トナル。先ヅ次ノ事柄ニ注意シヨウ：

(i) $\sum \sigma_{\nu}^2 > t$ トナル確率ヲ $\beta'(t)$ トスルト $\beta'(t) \geq \beta$ 、且ツ、 $t \uparrow \infty$ ノトキ、 $\beta'(t) \downarrow \beta$ 。従ツテ、 $\varepsilon' > 0$ ヲ任意ニ與ヘルトキ、充分大ナル $t_0(\varepsilon')$ ヲトレバ、 $t \geq t_0(\varepsilon')$ ノ

トキ = ハ常 = $1 > \beta / \beta'(t) > 1 - \frac{\varepsilon'}{2}$ ナラシメ得ル。

以下、一般 =、 $S(t)$ が定義サレテ居ルトイフ條件ノモトニ於ケル確率ヲ $\overline{Pr}^t$ ナ示スコトニスル。一般 = G , K ナル事象ガ共ニ起ル確率ヲ $\text{Pr.}\{G, K\}$ ナ。又 G ガ起ツタトイフ條件ノモトニ K ノ起ル確率ヲ $\text{Pr.}\{K/G\}$ ナ示ス。

(ii) $t \geq t'(\varepsilon_0)$ ノトキニハ、 $\overline{Pr}^t\{A\} < \varepsilon'/2$ (i)ニ依ル)

(iii) $\exists$ ハ、 $\overline{Pr}_V^t\{A\} \geq 1/2$ トナル $\omega + V$ ガ少ナクモ一ツ存在スル事象トシ、 e_p ハ $\overline{Pr}_V^t\{A\} \geq 1/2$ トナル事象ガ $V = \omega =$ 於テ始メテ成立スル事象トスル。然ルトキニハ

(1°) e_p ($p = 1, 2, 3, \dots$) ハ相互ニ排斥デアツテ

$$\sum e_p = E$$

$$(2^\circ) \overline{Pr}^t\{A/E\} = \sum_{p=1}^{\infty} \overline{Pr}^t\{A/e_p\} \overline{Pr}^t\{e_p/E\}$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \overline{Pr}^t\{e_p/E\}$$

$$\text{依ツテ } \overline{Pr}^t\{A/E\} \geq \frac{1}{2}$$

$$(iv) \overline{Pr}^t\{E\} \overline{Pr}^t\{A/E\} = \overline{Pr}^t\{A, E\} \leq \overline{Pr}^t\{A\}$$

以上ノ (ii), (iii) ノ 2° , (iv) ナ一決ニシテ

$$(8) \overline{Pr}^t\{E\} < \varepsilon' \quad (t \geq t(\varepsilon') \text{ ノトキ})$$

ナル関係式ヲ得ル。

然ルニ、 A ガ実現サレルナラバ、 $\overline{Pr}_V^t\{A\}$ ハ $V \rightarrow \infty$ ノトキ 1 ニ収斂シナケレバナラヌ。従ツテソノトキニハ、 E ガ實現シナケレバナラヌ。

然ルニ、實ハ (8) が成立スルノデアル。依ツテ次ノコト
 が云ハレル: $\Delta(t)$ が定義サレテ且ツ $\overline{\text{Pr}}^t\{A\} < \varepsilon'/2$ ナル
 トキニハ、確率が ε' ヲ超エナイ場合ヲ除イテハ、 A が起ラ
 ナイ。

A が起ラナイ場合、即チ $\sum \sigma_{\nu}^2$ が発散スル場合ハ既ニ論
 ジタ。以上ノ考察カラ、吾々ハ次ノ定理ヲ導ケウ:

定理6. 前定理ノ假定ノウチデ、(i), (iii) ノミヲバ假
 定シ、(ii) ハ假定シナイトスル。ソシテ $\sum \sigma_{\nu}^2$ ノ発散スル
 確率ヲ β トシ、 H_t ハ $t = \infty$ 對シテ $\Delta(t)$ が定義サレテ居ルト
 イフ事象ヲ意味スルトスル。然ル時ニハ

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Pr} \left\{ H_t, \frac{\Delta(t)}{\sqrt{t}} < x \right\} = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

証明: $\beta = 0$ ナラバ自明デアル。依ツテ $\beta > 0$ ノ場合
 ヲ問題ニスレバヨイ。 $\beta = 1$ ノトキハ前定理ニ外ナラナイ。
 依ツテ以下デハ $0 < \beta < 1$ トスル。上述ニヨリ、 $\varepsilon' > 0$ ヲ任
 意ニ與フルトキ、 $t_0(\varepsilon')$ が存在シテ、 $t \geq t_0(\varepsilon')$ ナル各
 t 對シテ、 $\overline{\text{Pr}}^t\{A\} > \varepsilon'/2$ トナリ、確率 ε' ノ場合ヲノゾ
 イテハ、 A ハ起ラナイ。

A が起ラナイ場合、即チ $C(A)$ ノ起ル場合ニハ、 $\{\sigma_{\nu}\}$
 ナル確率変数列ハ、 $\sum \sigma_{\nu}^2, 0 = \infty$ トナルヤウナ値ノ列 $\{\sigma_{\nu,0}\}$
 ヲトル。コレニ對シテハ、前定理ノ假定 (iii) ニ依リ、 $\varepsilon(t)$ が
 決定サレル。ソコデ、既ニ得タ結果ヲ利用スルト

$$(10) \quad \left| \text{Pr}'\{\Delta(t) < x\sqrt{t}\} - \text{Pr}\{\xi < x\} \right| \\
 < 6\sqrt[4]{\varepsilon(t)} + \varepsilon'$$

ヲ得ル。但シ、茲 $= Pr'$ ハ「 $S(t)$ が定義サレテ而モソレが
 $\alpha\sqrt{t}$ ヨリ小ナル確率」ヲモ或ハ又「 $S(t)$ が定義サレルナ
 ラバ、ソレが $\alpha\sqrt{t}$ ヨリ小ナル確率」ヲモ意味スルモノトス
 ル。コノ不等式カラ求メル結果ヲウルコトハ容易デアル。