



Title	楯円函数論 (Hasseノ方法)
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 170, p. 731-741
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74686
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

756. 楯田函数論 (Klasse, 方法)

河田 敬 義 (京大)

(I) H. Klasse, "Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper, I, II, III", *Crelle*, 175, 1936. / II / 初メノ部分ニ、楯田函数体ノ Automorphismus ヲ論ジ、ソレカラ Additions theorem ニ及ンデキマス。然レ此処デハ専ラ代数的ナ方法ヲ取扱ッテキルノデ、積ムノ逆函数トシテノ楯田函数ニハ全然手ヲ融レテキマセン。ソレ故 Additions theorem トイツテモ直接普通ノ楯田函数論ノソレト同一内容ナルコトヲ示シテキマセン。ソレデ之レカラ Klasse, 代数的理論ヲ骨組トシテ、ソノ解析的補ヒヲ附加シテ、一ツ, Abel ノ定理及ビ加法定理ニ到ル從來トハ多少異ツタ楯田函数論ヲ紹介シタイト思ヒマス。ソノ際出来ルダケ代数的及ビ幾何的方法ヲ取り度イト思ヒマス。

基礎ニナルノハ Riemann-Roch ノ定理:

$\dim(L) = \text{Grad}(L) - g + 1 + \dim\left(\frac{L^*}{L}\right)$. デス。コレ
 ハ古リカラ純代数的ニ証明サレテキマスガ、ソレガ函数論ニ
 オケル定理ト一致スルコトヲ確認スルノガ、代数函数体 K ニ
 オケル *Bewertung* デ定義サレタ *Prindivisor* $\mathfrak{p}$ ト K = 属
 スル *Riemann* 面 $\mathcal{R}_K$ 上ノ一点 $\bar{p}$ トノ一対一ノ對應スル
 トイフ事實デス。即チ $\bar{p} = \text{O.i.T.}$ Pol ヲモタヌ K ノ元全体ノ
 ナス *Ring* ガ $\mathfrak{p}$ = 属スル *Mascimalordnung* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ = ナツ
 ヲキルトイフコトデス。

以後 K ヲ楕円函数体即チ *Geschlecht* $\gamma = 1$ トシマス。
 K ノ *Automorphismus* σ トハ K ノ元 $\alpha = \text{一変} = \alpha$ K ノ
 元 α^σ が對應シテ四則算法が保持サレ、特ニ $C^\sigma = C$, ($C = \text{const.}$)
 ナルモノノミヲ考ヘルコトニシマス。ソノ時 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\sigma$ ヲ考ヘルコ
 トニヨツテ $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}^\sigma$ ナル $\mathcal{R}_K$ 上ノ一対一ノ交換ヲ生ジマス
 ガ、ソノ時 $\alpha(\mathfrak{p}) = \alpha^\sigma(\mathfrak{p}^\sigma)$ トイフコトカラ $\mathcal{R}_K$ ノ自分自
 身ヘノ *homöomorph* ナ對應トナルコトガワカリマス。(実
 ハヨク知ラレテキル様ニ *konform* = ナリマスガ、ソレハ
 以下デ不用デス。) ($\alpha(\mathfrak{p})$ ハ $\mathfrak{p}$ = 於ケル α ノ値)

(II) K ノ *Automorphismus*.

Riemann-Roch ノ定理カラ *Prindivisor* $\mathfrak{O}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$
 ノウチヨケヲ與ヘレバ

$$(1) \quad \frac{\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3}{\mathfrak{O} \mathfrak{p}_1} \sim \alpha, \quad \alpha \in K$$

トナル様ニ他ノ一ツハ一意ニ確定シマス。以下 $\mathfrak{O}$ ヲ或ル一ツ
 ノ固定シタ *Prindivisor* トシテ (1) ノコトヲ

$$(2) \quad \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3$$

ト書クコト = シマス。又ハ $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3$ ヲ與ヘレバ $\mathcal{P}_2$ ガキマルノ
デスカラ $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_3$ ト書クコト = シマス。

此ノ様ニシテ *Prindivisor* ノ間ニ和、差ヲ定義スル
ト、全体デ $\mathcal{O}$ ヲ *Nullelement* トスル *Modul* = ナルコト
ガワカリマス。例ヘバ $\mathcal{O}$ ガ *Null* = ナルコトハ $\frac{\mathcal{O}\mathcal{P}}{\mathcal{O}\mathcal{O}} \sim \mathcal{Z} \in K$
カラ $\mathcal{Z} = \text{const.}$ トナリ $\mathcal{P} = \mathcal{O}$ 。即チ $\mathcal{O} + \mathcal{P} = \mathcal{P}$ 、又 $\mathcal{P}_1 + (\mathcal{P}_2$
 $+ \mathcal{P}_3) = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) + \mathcal{P}_3$ ハ両辺共 $= \frac{\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3}{\mathcal{O}^2 \mathcal{O}} \sim \mathcal{Z} \in K$ ナルガ等
シクナルトイフコト = 導キバ分リマス。

今 $\mathcal{O}$ 、 $\mathcal{O} = \mathcal{O}$ ヲ勝手ニ與ヘルト *Riemann-Roch* カラ
 $(\mathcal{O}\mathcal{O})^{-1}$ 、*konst.* ナイ *Multiplum* $\mathcal{Z}$ ガアリマス。
ソレデ $K/\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ ヲ考ヘレバ $\mathcal{Z}$ ノ取り方カラ二次ノ拡大ト
ナリマス。

故ニソノ *Automorphismus* $\tau, \sigma_{\mathcal{O}, \mathcal{O}}$ トスレト

$$(3) \quad \mathcal{P}^{\sigma_{\mathcal{O}, \mathcal{O}}} = -\mathcal{P} + \mathcal{O} \quad (\text{Spiegelung})$$

トナリマス。ソレハ、 $\mathcal{P}$ ヲ勝手ニ與ヘル時 $\mathcal{Z} - \mathcal{Z}(\mathcal{P}) \sim \frac{\mathcal{P}\mathcal{O}}{\mathcal{O}\mathcal{O}}$ カ
ラ $\mathcal{P}^{\sigma} = \mathcal{O} = \mathcal{O} - \mathcal{P}$ ガ出マス。コノ時 $\sigma_{\mathcal{O}, \mathcal{O}}$ ガ $\mathcal{O}$ 、 $\mathcal{O}$ 大デキ
マルコトハ $\mathcal{Z}$ ノ一般ノ形ハ $a\mathcal{Z} + b$ 、(a, b 、*konst.*) ナ
ルコトカラ $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ ガキチント定マルコトカラ分リマス。

次ニ (*Translation*) $\tau_{\mathcal{O}, \mathcal{O}} = \sigma_{\mathcal{O}, \mathcal{O}} \cdot \sigma_{\mathcal{O}, \mathcal{O}}$ ト
置キマスト

$$(4) \quad \mathcal{P}^{\tau_{\mathcal{O}, \mathcal{O}}} = (\mathcal{P}^{\sigma_{\mathcal{O}, \mathcal{O}}})^{\sigma_{\mathcal{O}, \mathcal{O}}} = (-\mathcal{P})^{\sigma_{\mathcal{O}, \mathcal{O}}} = \mathcal{P} + \mathcal{O}$$

トナリマス。之カラ又

$$(5) \quad \tau_{0,a} \cdot \tau_{0,b} = \tau_{0,a+b}$$

がわかります。ソレハ直ち $= f^{\tau_{0,a} \cdot \tau_{0,b}} = f^{a+b} = f^{\tau_{0,a+b}}$

が出ますカラ、之レカラ (5) タイフ $= \wedge \mathbb{F}K$ Automorphisms ハ $f \rightarrow f^\sigma$ + ル 對應 $\sigma \rightarrow \sigma = \text{定マール}$ コトヲ云ハネバ
ナリマセン。即チ $f^\sigma = f$ + ラ σ ハ *identisch* + *Auto.* +
ルコトヲイハベヨロシイ。

先ヅ $f^\sigma = f$ カ? $\sigma = C_{\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$ がわかります。次 $= \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2$ γ
一次独立トスレバ $C_{\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2) = C_{\mathbb{Z}_1} \cdot \mathbb{Z}_1 + C_{\mathbb{Z}_2} \cdot \mathbb{Z}_2$ カラ
 $C_{\mathbb{Z}_1} = C_{\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2} = C_{\mathbb{Z}_2}$ がわかり $(a\mathbb{Z})^\sigma = a\mathbb{Z}^\sigma = a \cdot C_{\sigma} \mathbb{Z}$
一方 $= C_{a\mathbb{Z}}(a\mathbb{Z})$ カラ $C_{a\mathbb{Z}} = C_{\mathbb{Z}}$ 。特 $= \mathbb{Z} = \text{const}$, 時
 $C_{\mathbb{Z}} = 1$ カラスベテ $C_{\mathbb{Z}} = 1$ トナリ $\mathbb{Z}^\sigma = \mathbb{Z}$ トナルコトが分り
マス。ソレデ (5) が確立レマシタ。

Translation, Spiegelung タイフ言葉が $\mathcal{R}_K$, *Torus*
デノ 変換ノ様ヲ示レテキルトイフコトノ大體ノ様子ハ實際ニ
ニ族ノ 数球面 γ *Torus* = カヘル *homotop* + 変換 (例ヘバ
竹内先生ノ 函数論 = アル) デ, $f \rightarrow f^\sigma$ γ 跡ヅケテ見レバ直
チ = ワカル事デス。

次 $= \alpha$ differential トノ 關係ヲシラベマス。今 $K/\mathbb{K}(x)$
カ二次ノ 拡大 = ナル様 = $\mathbb{Z}$ γ トリ, $K = \mathbb{K}(x, w')$,
 $w'^2 + 2f(x) \cdot w' + g(x) = 0$. ($f(x), g(x)$ ハ *Polynom*)
 $= w'$ γ トリマス。又 $w = w' + f(x)$ トスレバ $w^2 \in \mathbb{K}(x)$
デ 同級余解 γ シテ

$$w^2 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

$$\text{又ハ } w^2 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$$

トナリマス。最初、場合、 $Vergeweiungsdv$ isor δ
 $\delta = a \cdot b \cdot c \cdot p_{\infty} \cdot (\dots = x - a \sim \frac{a^2}{p_{\infty}^2} \text{ etc.})$

$\therefore$ Canonicische Klasse, 代表トナリ $1_y \sim \frac{\delta}{\omega^2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{p_{\infty}^3}$.

$\therefore \frac{dx}{w} \sim 1$ トナリ, $du = \frac{dx}{w}$ が K 上、 $ganz + Differential$ トナリ。後、場合も同様。

之レカラ (6) $(du)^{\tau_{\theta, \alpha}} = du$ が証明サレル。ソレハ
 $\tau_{\theta, \alpha}$ の定義カラ α が勝手ニトル時 $(du)^{\sigma_{\theta, \alpha}} = -du$
 ヲイヘバヨイ。ソレハ $\tau = (\theta \alpha)^{-1}$, Multiplicum = トレバ

$$(du)^{\sigma_{\theta, \alpha}} = \frac{(dx)^{\sigma_{\theta, \alpha}}}{w^{\sigma_{\theta, \alpha}}} = \frac{dx}{-w} = -du.$$

(III) Riemann 面 R_K , Topologie.

(II) = 於テ $p + \alpha, p - \alpha$ 等ヲ定義シタカラ R_K へ
 Modul ト考ヘラレルガ、ソノ時 ΓR_K が topologische
 Gruppe トナルコトヲ先ヅ証明スル。即 R_K 上 $p_n \rightarrow p,$
 $\alpha_n \rightarrow \alpha$ トル時ハ

$$\left. \begin{array}{l} (7) \quad -p_n \rightarrow -p. \\ (8) \quad p_n + \alpha_n \rightarrow p + \alpha \end{array} \right\} \text{トナリ.}$$

(7) ハ $-p_n = p_n^{\sigma_{\theta, \theta}}$ カラ $\sigma_{\theta, \theta}$ が topologisch トルコト
 , 直接ノ結果ナス。(8) ハ $p_n + \alpha_n + \alpha_n = \theta = p_n^{\tau_n}$ ナル
 時 $p_n^{\tau_n} \rightarrow p = -p - \alpha$ ヲイヘバ (7) ト組合セレバヨコシイ。
 先ヅ $\alpha_n \sim \frac{p_n \alpha_n \alpha_n}{\theta^3}$, $\alpha_n(\alpha) = 1$ トル α_n がナリマス。
 $\alpha = \alpha \neq \alpha = 1$ トナリマス。今 $x \sim \frac{\alpha p b}{\theta^3}$, $y \sim \frac{\alpha \alpha c}{\theta^3}$ 且ツ
 $x(\alpha) = y(p) = -1 = x, y$ ナル。 $b \neq \alpha$, $c \neq p$ ト

+14. Riemann-Roch カラ $z_n = a_n + b_n x + c_n y$, ($a_n, b_n, c_n: \text{konst}$) ト +14. 故 =

$$\begin{cases} z_n(p) = 1 = a_n, \\ z_n(p_n) = 0 = a_n + b_n x(p_n) + c_n y(p_n) \\ z_n(q_n) = 0 = a_n + b_n x(q_n) + c_n y(q_n), \end{cases}$$

之ヲ解イテミレバ $a_n = 1 \rightarrow 1$, $b_n \rightarrow 1$, $c_n \rightarrow 1$ +14
コトガナル。

$\therefore z = 1 + x + y$ トオケバ $z_n \rightarrow z$, $z \sim \frac{p^2 q^2 r^2}{\theta^3}$ ト
ル。

$\mathcal{R}_K$ へ compact テスカラ $\{x_n\}$ カラ convergent
+ Teilfolge ヲトリ、ソノ某積点ヲ x' トスル時 $x' = x_n$
ヲイヘバ目的ヲ達シタワケデス。ソレハ

$$\begin{aligned} z(x') &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n x(x') + c_n y(x') \\ &= \lim (a_n + b_n x(x_n) + c_n y(x_n)) \\ &\quad + b_n (x(x') - x(x_n)) + c_n (y(x') - y(x_n)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore x' \neq p$, q ヲイヘバ $\exists$ y , $x' = p + y$ +14 時ハ $x_n \rightarrow p$,
 $p_n \rightarrow p$, $z_n(p_n) = z_n(x_n) = 0$ $\therefore$ z ハ p テニ次ノ 0 ヲ
モタナケレバ +14 +14 +14 矛盾 トナル。 $p = q$ 時モ同様
 $\therefore x' = x$ トナル。 Q. E. D.

$\therefore \mathcal{R}_K$ ナル Modul へ 1). topologisch 2). $\mathcal{R}_K$
ノ任意ノ一点ノ近傍ハ円ノ内部ト homöomorph. へ) $\mathcal{R}_K$
ハ kompakt テ zusammenhängend. +14 コトカラ
Topologieノ定理カラ (例ヘバ Kérékjártó:) Lamb.

Abb. 8) $\mathbb{R}_K$ は Euclid 平面 = オケル Vektor 加法
 γ, y 両成分 $\text{mod. } 1$ を考へ Modul (即 Torus ,
 $\text{Translations modul}$) と homöomorph とナル』
 即ち $\mathcal{R}_K$ = 適當に x, y 平行座標ヲ入レルト $p_2 \leftrightarrow (x_2, y_2)$
 と對應スル時 $p_1 + p_2 = p_3 \leftrightarrow x_1 + x_2 \equiv x_3 \pmod{1}$,
 $y_1 + y_2 \equiv y_3 \pmod{1}$ とナル。之レカラ $p_1 + p_2$ トナヲ用ヒ
 ルコト, $p^{\tau_0, \alpha} = p + \alpha$ ナ Translation トイフコトノ合
 法性がワカル。

(IV) Abel, 定理

K , ganz + Differential du ヲトリ, $\mathcal{R}_K$ ナ
 canonisch = 切断シテ ($\mathcal{R}'_K$ トスル) (例へバ (III) ナ定メ
 タ座標軸 = ヨツテ) 單一連結トスレバ Cauchy, 定理カ
 ラ、其ノ上ノ道ガ $\int_{\sigma}^p du$ ト書イテ一意的 = 意味ヲモツ。

一般 = α, b ナ結ガ道ヲ $W(\alpha, b)$ トカキ, 又 $\tau_{\sigma, \tau}$ ナ
 Translation ナ生ズル道ヲ $W^{\tau}(\alpha^{\tau}, b^{\tau}) = W^{\tau}(\alpha + \tau, b + \tau)$
 トカクト、次ノ基本式が成立スル。

$$[A] \quad \boxed{\int_{W(\alpha, b)} du - \int_{W^{\tau}(\alpha^{\tau}, b^{\tau})} du}$$

又、 W, W^{τ} 共 = $\mathcal{R}'_K$ ナ單一連結ノ領域 = アレバ、コレハ

$$\int_{\alpha}^b du = \int_{\alpha + \tau}^{b + \tau} du \text{ トカケル。}$$

[A], 証明ハ簡單. (II), (6) 式カラ $\int_W du = \left(\int_W du \right)^{\tau} = \int_{W^{\tau}} (du)^{\tau}$

$$= \int_{w\tau} du.$$

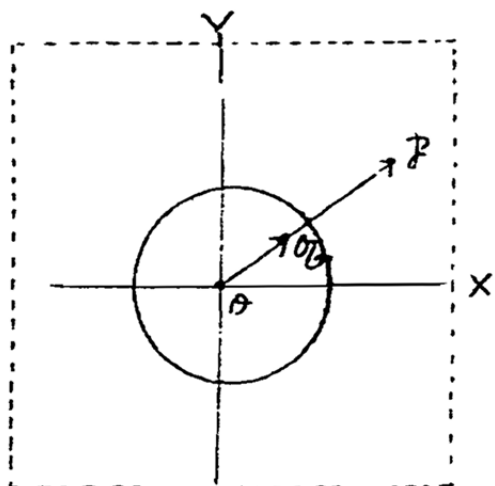
次 = $\mathcal{R}'_K$ 内ヲ

$$[B] \quad \boxed{\int_{\sigma}^{\mathcal{P}} du = 0 \rightarrow \mathcal{P} = \sigma}$$

又ハ一般 = $\int_w du = 0$ トラ $W = W(\theta, \vartheta)$ トナリ、コノ

Zyklus ハ homotop σ ナル。

証明ハ (III) ノ結果ヲ用ヒル。(III) = ヨリ平行座標ヲ $\mathcal{R}'_K$ = 入レバ、 $\sigma, \mathcal{P}$ ノ結ブ線分上 = $\frac{1}{n}$ = 点 ϑ_n ヲトレバ $n\vartheta_n = \mathcal{P}$ 。



又ハ $\vartheta_n = \frac{1}{n} \mathcal{P}$ トナリ、 $\tau = \tau_{\sigma, \vartheta_n}$ 、
 $W(\sigma, \vartheta_n) = \overrightarrow{\sigma, \frac{1}{n} \mathcal{P}}$ トスレバ

$$W^{r\tau} = \overrightarrow{\frac{r}{n} \mathcal{P}, \frac{r+1}{n} \mathcal{P}} \text{ トナリ。}$$

$\therefore [A]$ カラ $\mathcal{P} \neq \sigma$ トスレバ

$$n \int_{\sigma}^{\vartheta_n} du = \sum_{r=0}^{n-1} \left(\int_{\sigma}^{\vartheta_n} du \right)^{r\tau}$$

$$= \int_{\sigma}^{\vartheta_n} + \int_{\vartheta_n}^{2\vartheta_n} + \dots + \int_{(n-1)\vartheta_n}^{\mathcal{P}} = \int_{\sigma}^{\mathcal{P}} du.$$

$$\therefore \int_{\sigma}^{\mathcal{P}} du = 0 \text{ カラ } \int_{\sigma}^{\vartheta_n} du = 0 \text{ トナリ、} \therefore \int_{\sigma}^{\vartheta} du \text{ ナリ}$$

regular ナ函数ガ σ = konverg. スル ϑ_n ナ 0 トナリカ
 ラ矛盾スル。 $\therefore \mathcal{P} = \sigma$ 。 又カ $\mathcal{R}'_K = \lambda$ ナ時モ同様。

Q.E.D.

$$[B] \text{ カラ } \int_{c_1} du = w_1, \int_{c_2} du = w_2 \text{ (コノ } c_1, c_2 \text{ ハ } \mathcal{R}_K \text{ ノ)}$$

X軸, Y軸 = 沿フ Zyklus) トスレバ $\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0$ デ、
 ω_1, ω_2 が同一 ω_0 デ

$$\omega_1 = n_1 \omega_0, \omega_2 = n_2 \omega_0, \quad (n_1, n_2 \text{ 整数})$$

トナライコトが分ツ。

『Abel, 定理』 $K \ni z \sim \frac{p_1 \cdots p_r}{q_1 \cdots q_r}$ ナル z ノ存在スル

ノ必要充分条件ハ

$$\int_{p_1}^{q_1} du + \cdots + \int_{p_r}^{q_r} du = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \quad (n_1, n_2 \text{ 整数})$$

トナルコトデアル。

(証明) 充分 [A] フ用フレバ

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^{q_1} + \cdots + \int_{p_r}^{q_r} &= \int_{\theta}^{p_1 + \cdots + p_r - q_1 - \cdots - q_r} + m_1 \int_{C_1} + m_2 \int_{C_2} \\ &= n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2. \end{aligned}$$

$\therefore$ [B] ノ論法カラ $m_1 = n_1, m_2 = n_2, p_1 + \cdots + p_r - q_1 - \cdots - q_r = \theta$

Def. カラ $z \sim \frac{p_1 \cdots p_r}{q_1 \cdots q_r}$ ナル z ガアル。必要ナルコトモ同様。

Q. E. D.

(V) 楕円函数。(加法定理)

$\mathcal{R}_K$ フ $C_1, C_2 =$ 沿ッテ切断シテ $\mathcal{R}'_K$ トナシ。

$$(7) \int_{\theta}^z du = w(z)$$

トオケバ (B) カラ 逆ニ w ノ値デ一意ニ定マル。 $\therefore z \in K$

ヲトル時

$$z(p) = z(w)$$

ト w の函数ト見ル時 z ヲ w の楕円函数ト云フ。

『加法定理』 楕円函数ハ代数的加法公式ヲ有スル。即チ有理整式 R ヲツテ

$$R(z(w_1), z(w_2), z(w_1 + w_2)) = 0.$$

(証明). (7) = $\exists$ リ $w_1 = w(p_1)$, $w_2 = w(p_2)$,

$w_1 + w_2 = w(-p_3)$ トオケベ,

$$0 = w_1 + w_2 - (w_1 + w_2) = \int_0^{p_1} + \int_0^{p_2} - \int_0^{-p_3} = \int_C^{p_1 + p_2 + p_3} \quad (\because (A) \text{ カラ})$$

$$\therefore (B) \text{ $\exists$ リ } p_1 + p_2 + p_3 = 0. \text{ 或ハ } K \text{ $\exists$ } u \sim \frac{p_1 p_2 p_3}{\Omega^3} + u$$

u が存在スル。

今 Ω^{-3} , Multiplicum, Basis ヲ (Riemann-Roch カラ) $1, x, y$ トスレバ

$$u = a + bx + cy \quad a, b, c \text{ ハ } K \text{ 中ノ } 0 \neq \text{ 元}.$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} u(p_1) &= 0 = a + bx(p_1) + cy(p_1) \\ u(p_2) &= 0 = a + bx(p_2) + cy(p_2) \\ u(p_3) &= 0 = a + bx(p_3) + cy(p_3) \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore (8) \quad \begin{vmatrix} 1 & x(p_1) & y(p_1) \\ 1 & x(p_2) & y(p_2) \\ 1 & x(p_3) & y(p_3) \end{vmatrix} = 0$$

$x(p_1) = x(w_1)$, $x(p_2) = x(w_2)$, $x(p_3) = x(-w_1 - w_2)$ 等

トシテ, x ト u , y ト u トノ間ノ代数的関係ヲ用ヒテ x, y ヲ (8) カラ消去スレバ求ムル代数的加法公式ヲ得ル。 Q. E. D.

例. Weierstrass の $\wp$ 函数。

Geschlecht 1, $K \neq \mathbb{C}$ 時 $K = \mathbb{C}(x, y)$, $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$

ト Weierstrass, Normalform = カク. $\mathcal{O} = \mathbb{P}_\infty$ ト
スレバ $\mathcal{O}^{-3}$, Multiplicum 1 代表 トシテ, 1, x , y カ トレル.

ganz + Differential $du = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}.$

$$\therefore w = \int_{\mathbb{P}_\infty}^P \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} \quad \text{トスレバ } x(P) = \wp(w).$$

コレハ Weierstrass, $\wp$ 函数. $\therefore y = \wp'$ トナル.

故ニ (8) カラ

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(w_1) & \wp'(w_1) \\ 1 & \wp(w_2) & \wp'(w_2) \\ 1 & \wp(w_3) & \wp'(w_3) \end{vmatrix} = 0, \quad w_1 + w_2 + w_3 = \text{週期}.$$

トナリ、ヨク知ラレタ 関係 トナル.