



Title	大數ノ法則, V
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 171, p. 742-750
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74687
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1757. 大數ノ法則, ∇ .

北 川 敏 男 (阪大)

§4. 聯鎖級數ノ收斂定理 独立級數 (相互=独立ナ確率変數ヲ項ニスル級數=關シテハ *Kolmogoroff* ノ不等式 (本誌, 168号 p. 612) ヲ用キルコトニ依リ、次ノ定理ヲ得ラレテ居ル。

定理B (*Kolmogoroff*) 独立級數 $\sum X_n$ = 於テ

$$(1) \quad E\{X_n\} = 0, \quad \sigma_n^2 = E\{X_n^2\} < \infty$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

ナリトスル。然ルトキニハ

$$(2) \quad \begin{cases} (i) & \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 = \infty \text{ ナラバ, } \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ ノ收斂スル確率ハ } 0. \\ (ii) & \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < \infty \text{ ナラバ, } \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ ノ發散スル確率ハ } 0. \end{cases}$$

然ルニ Π , 定理2 = 於テ吾々ハ *Kolmogoroff* ノ不等式ヲ、適當ナ條件ノツイタ聯鎖級數ヘ拡張シ得ルコトヲ示シタ。ソコデ定理Bモ、ソノ適當ナ條件ノモトデハ聯鎖級數ヘ拡張出來ナイカト云フコトが當然問題ニナロウ。コレ=關シテハ

定理7 (*Lévy*) 聯鎖ナ確率変數ノ系列 $\{X_n\}$ = 於テ各項 X_n ノ絶對値ガ n = 無關係ナ或レ常數ヲ超ヘズ、且ツ又 $\{X_n\}$ = 對シテハ、條件(C)ガ成立ツトスル。

然ル時ニハ

- (3) { (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$ が発散シ、且ツ $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ が収斂スル確率ハ0デアール。
 (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$ が収斂シ且ツ $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ が発散スル確率ハ0デアール。

注意: 定理2 (168号, p. 613) = 於テ (6) $E\{X_k^2\} < \infty$ ($k=1, 2, 3, \dots$) ヲ用キテ、定理5ヲ假定スル $|X_k| \leq M$ ($k=1, 2, 3, \dots$) ハ、ソレヨリハ強ク假定デアール。条件(C): $E_{k-1}\{X_k\} = 0$ ($k=1, 2, 3, \dots$) が定理Bノ假定(i)ニ對應シ、(2) (i) 及ビ(ii) が夫々(3) (i) 及ビ(ii)ニ對應スルコトモ明カデアール。

証明: $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$ が発散スルトキニハ、確率0ノ場合ヲ除イテハ $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ 発散ヲヒキ起スコトハ、前、§3ヲ示シ(定理3カヲ見ラレル)

依ツテ(3), (ii)ヲ示シサヘスレバ宜シイ。今 $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$ が収斂スルトイフ事象ヲAヲ表ハシ、 $Pr\{A\} = \alpha$ トスル。Aが起レバ、 $\varepsilon > 0$ 及ビ $\varepsilon' > 0$ ヲバ任意ニ與フル時、確率変数 n ヲ捜シテ $\sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma_k^2 \leq \varepsilon^2$ ナラシメ、從ツテ常数(確率変数ナシ) N ヲ適當ニトレバ $Pr\{A, n > N\} \leq \varepsilon'$ ナラシメ得ル。

サテ N ヲ上ノ如ク定メタトスル。次ニ與ヘラレタ $\{X_n\}$
 = 對シテ次ノ如キ変更ヲ加ヘル。先ヅ $X_1, X_2, \dots, X_N$
 ハ絶對ニ変ヘナイ。即チ與ヘラレタ儘トスル。尨 $N =$ 對シ
 テハ、 $\sigma_{N+1}^2 + \sigma_{N+2}^2 + \dots + \sigma_n^2 \leq \varepsilon^2$ ナル限リ $\{X_l\}$ (l
 $= N+1, N+2, \dots, n$) ハ不変ニスル。

或ル n 上ノ $\leq$ ガ成立シタケルト、ソノ n 及ビソ
 レカラ先キノ $n =$ 關シテハ、 $X_l = 0$ ($l \geq n$) トス
 ル。

コノ様ニ変更サレタ聯鎖級數ニ對シテハ、II, [3] 定理
 2 テ Cノ代リニ $1/\sqrt{\varepsilon}$, S'_n ノ代リニ $S'_n - S'_N$ ($n \geq N$)
 トシテ

$$\Pr. \left\{ \max_{N < n < \infty} |S'_n - S'_N| > \sqrt{\varepsilon} \right\} < \varepsilon$$

サテコレハ変更サレタ聯鎖級數ニツイテノ結果デアル。
 ソコデ、與ヘラレタ聯鎖級數ガ上記ノ変更ヲウケルノハ如何
 ナレ場合カトイフニ、(α) $\sum \sigma_n^2$ ガ発散スル場合及ビ (β)
 $\sum \sigma_n^2$ ガ收斂スル場合ニ於ケル高々確率 ε' ノ場合ノニツ
 ノ場合シカアリ得ナイ。

$\varepsilon, \varepsilon'$ ハ任意ノ正數デアルカラ、コレヲ如何程デモ小サ
 ク出來ル。依ツテ上ノ推論カラ、事象 A ガ實現スルナラバ、
 確率変數列 $\{S'_n\}$ ハ確率 0 ノ場合ヲ除イテハ一ツノ極限ニ
 收斂スルトイフコトカイヘル。即チ (ii) ガ示サレタ。〔証終〕

系： 聯鎖ノ試行ノ無限系列ニ於テ或ル事象 E ノ實現ス
 ル數ハ、確率 0 ノ場合ヲ除ケバ、

$$(4) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr_{k-1} \{E_k\}$$

ト同時 = 有限トナリ、同時 = 発散トナル。但シ E_k ハ k 番目ノ試行 = 於テ E ノ實現スルトイフ事象ヲ示スコトスル。

証明: 確率変数 X_k ハ E_k が實現スレバ 1, 然ラザレバ 0 トナルトスル。定理5ヲバ, $\sum Y_k = \sum \{X_k - \alpha_k\}$ = 對シテ施ス, コノ級數ニ関シテハ, $\sigma_k^2 = E_{k-1} \{Y_k^2\} = E_{k-1} \{(X_k - \alpha_k)^2\} = \alpha_k(1 - \alpha_k)$ ナアル。

$$\text{先ヅ } \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(1 - \alpha_k) < \infty \text{ トナル場合}$$

コノ時 = ハ定理7 = 依リ $\sum Y_k$ ハ確率0ノ場合ヲノゾケバ收斂スル。コレハ確率0ノ場合ヲノゾケバ, $\sum X_k$, $\sum \alpha_k$ ハ同時 = 発散 (無限大) ナルカ同時 = 收斂ナルカデアールコトヲ示ス。

$$\text{次 } \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \text{ が発散スル場合。コノ事象ヲ } A' \text{ ヲ示サウ。}$$

$\sum \sigma_k^2 = \infty$ ナラバ $\sum \sigma_k = \infty$ デアルカラ、系ノ成立ツヲ示ス = ハ、結局 $\Pr. \{A', \sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty\} = 0$ トナル事ヲ云ハバヨイ。今假リ = ソウデナイトスル。然ル時 = ハ

$\Pr. \{A', \sum_{k=1}^{\infty} X_k < N\} = p > 0$ トナル様ナ整数 N が存在スル。コレが矛盾 = 陷ルコトヲ示サウ。事象 A' ノモト = 於テハ, §3, IV デ定義シタ $\mu(x)$, $\delta'(x)$ が定義サレル,

$$\text{即ち } \sum_{k=1}^n \alpha_k \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k (1 - \alpha_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \geq t \quad \text{トナル様}$$

ナ n ガ存在スル。依ッテ $\text{Pr.} \left\{ A', \sum_{k=1}^N Y_k < N - t \right\} \geq P > 0$

依ッテ、コノコトハ $\left| \sum_{k=1}^N Y_k \right| = |S(t)|$ ハ $t = \text{無関係ナ正}$

数 P / 確率ノ場合ニ於テ t ノ大キサデアルコトヲ示ス。然ル

ニ定理 4 = 依レバ t ガ充分大ナラバ、 $|S(t)|$ ハ $\sqrt{t}$ ノ大

キサデナケレバナラス、コレハ矛盾デアル。(証終)

§ 5. 連鎖系列ニ関スル中心極限定理 § 3 = 述ベタ

Liapounoff ノ定理ノ発展トシテ所謂 *Lévy* ノ中心極

限定理トイフノ知ラレテキル。先ヅ或ル数 $\gamma (0 < \gamma < 1)$

ニ對スル $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ノ散縮度 $l_n(\gamma)$

ヲ表ハシ、或ル $\varepsilon > 0$ = 對シテ

$$(5) \left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{Pr.} \{ |X_k| > \varepsilon l_n(\gamma) \} \equiv \alpha_{n,k}(\varepsilon) \\ \text{(ii)} & \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_{n,k}(\varepsilon) \equiv \alpha_n(\varepsilon) \\ \text{(iii)} & \eta_n(\varepsilon) \equiv \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}(\varepsilon) \end{array} \right.$$

ナルモノヲ導入スル。更ニ、次ノ概念ヲ導入スル。

條件 (N₁): 任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シテ $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\varepsilon) = 0$

ナルコトヲ意味スル。コレヲ $X_1, X_2, \dots, X_n$ ハ S_n ノ散縮度 $l_n(\gamma)$ = 比シ、個々ニ無視シ得ルニ至ルトイフ、

條件 (N₂): 任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シテ $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\varepsilon) = 0$

ナルコトヲ意味スル。コレヲ $X_1, X_2, \dots, X_n$ ハ S_n ノ

散縮度 $l_n(\gamma) = \text{比シ}$, 最大項 = 於テ無視シツル = 至ル
トイフ。

コレ = 關シテ

定理 C (Lévy) 独立 + 確率変数ノ系列 $\{X_n\}$
= 於テ條件 (N₁) が成立ツトスル。然ルトキ適當ニ選ンガ
數列 $\{A_n\}$, $\{N_n\}$ = 對シテ $(S_n - A_n)/N_n$ が $n \rightarrow \infty$
ノトキ Gaussノ分布重(x) = 法則收斂スルタメノ充分條件
ハ條件 (N₂)ノ成立スル事デアル。

コレ = 對應スル聯鎖級數ノ定理モ亦 Lévy = 依ツテ與
ヘラレタ。先ツ定理 Cノ條件ノ充分ナルコト = 對應スルモ
ノトシテ:

定理 8 (Lévy)⁽¹⁾ 聯鎖系列 $\{X_k\}$ ($k = 1, 2, 3,$
-----) = 對シテ、次ノ條件が満足サレヲキルモノトスル。

(i) 各 k = 對シテ次ノコトが成立ツ: $X_1, X_2, \dots$
----, X_{k-1} が知ラレヲキルトキ X_k ノ從フ條件付確率ハ對
稱的デアル。即チ任意ノ正數 x = 對シテ $\text{Pr}_{k-1}\{X_k < -x\}$
 $= 1 - \text{Pr}_{k-1}\{X_k > x\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) (コレヲ條件
(C₁)ヲ示ス)

(ii) $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $\eta' > 0$ ヲ任意ニ與フルトキ, $t_0(\varepsilon,$
 $\gamma, \eta') > 0$ ガ定マリ. $t \geq t_0(\varepsilon, \gamma, \eta')$ ナル任意ノ各

(1) Paul Lévy: Propriétés asymptotiques des
sommes de variables aléatoires indép. ou
enchainées. Journ. de Math. tome XIV (1935),
Théorème VII. (p. 393)

$t = \infty$ に対して、 $n(t)$, $S(t)$ が前 §3 の如く定義スルコトが
出来、且ツ又

$$(6) \quad \eta_{n(t)} \equiv \sum_{k=1}^{n(t)} \text{Pr}_{k-1} \{ |\mathbf{X}_k|_0 > \eta' \sqrt{t} \}$$

ト置クトキニハ

$$(7) \quad \text{Pr.} \{ \eta_{n(t)} > \varepsilon \} < \gamma$$

ナラシメ得ル。

然レ時ニハ、任意ノ実数 $x = \infty$ に対して

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Pr.} \left\{ \frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x \right\} = \Phi(x)$$

注意: 証明 = 先チ定理 8 の條件ヲ定理 5 のソレト對比
シテ見ルト定理 5 の條件 (C) ハ今ハ (C₁) = 依ツテ、置キ
カヘラレテ居ル。(C₁) ハ勿論 (C) より強イ。定理 5 の
(ii), (iii) ニ相應スル後ヲ定理 7 の (ii) ガナレテ居ル。茲チ尤
モ注意スベキコトハ、定理 5 の (iii)、コレハアル意味ニ於テ
 $|\mathbf{X}_v|$ ($v = 1, 2, 3, \dots, n$) ノ一様有界性ノ條件ナル
ガ、ソレガ定理 7 の假定中ニハナイノナル。一様有界性ハ
假定シナイガ、無間ニ大キクナラナイトイフ條件——ソレハ
定理 C デハ條件 (N₂) ナルガ——コノ場合、定理 8 の (ii) デ
與ヘテ居ルノナル。

証明: $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $\eta' > 0$ ヲ任意ニ與ヘタト
スル。(ii) = ヨリ $n(t)$ ヲ定メル。茲ニ聯鎖確率変数ノ行
列ヲ導入スル:

$$(9) \quad X'_{n(t), \nu} = \begin{cases} 0 & [|X_{\nu}| \geq \varepsilon' \sqrt{t}, \text{トキ}] \\ X_{\nu} & [|X_{\nu}| < \varepsilon' \sqrt{t}, \text{トキ}] \end{cases} \\ (\nu = 1, 2, \dots, n(t))$$

條件 (C) = 依り、 $E_{\nu-1} \{ X'_{n(t), \nu} \} = 0$ ナル。

即ち

$\{ X'_{n(t), \nu} \} (\nu = 1, 2, \dots, n(t))$ = 對シテハ 條件 (C) が成立チ、且ツ各項ハ $\eta' \sqrt{t}$ ヲ超ヘナイ。依ツテ定理 4 = 依り、今 $S'(t) = X'_{n(t), 1} + \dots + X'_{n(t), n(t)}$ ト置ク トキ
= ハ、スベテノ変数 X = 對シテ

$$(10) \quad \left| \Pr. \left\{ \frac{S'(t)}{\sqrt{t}} < x \right\} - \Phi(x) \right| < 6 \eta' \frac{1}{4}$$

他方 = 於テ、 $S(t)$ ト $S'(t)$ トハ相異ル確率ヲ考ヘル =
ソレハ $\Pr. \{ \eta_{n(t)} > 0 \}$ ヲ超ヘナイ。然ルニ

(11) $\Pr. \{ \eta_{n(t)} > 0 \} = \Pr. \{ \eta_{n(t)} > \varepsilon \} + \Pr. \{ \varepsilon \geq \eta_{n(t)} > 0 \}$
ナリ、假定 (ii) ノ (7) = 依り、(11) ナル値ハ $\gamma + \varepsilon$ ヲコエ
ナイ。

依ツテ (10) トニ共ニシテ

$$\left| \Pr. \left\{ \frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x \right\} - \Phi(x) \right| < 6 \eta' \frac{1}{4} + \gamma + \varepsilon$$

コレカラ (8) ヲ得ル。

注意 1: 定理 8 ノ証明ノ要點ハ (9) ヲ考ヘルトコロニ
アル。假リニ、條件 (C) ニカ假定シナカウタトスルト、
 $\{ X'_{n(t), \nu} \}$ が條件 (C) ヲ満足スルトハ限ラナクナル。
ソコデ始メニ、(C) ヲリニ強い條件 (C') ヲ假定シテ置イ

タノデアル。要ハソコ=アルノダカラ、条件 (C_1) = カナリノ *modifications* ヲ加ヘテモ宜シイ譯デアル。例ヘバ:

例 1 $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ ノトル値=依ツテ定メテモヨイ。 B_n ノ系列 $\{B_n\}$ = 對シテ若シモ $\sum \Pr_{n-1} \{|X_n| > B_n\}$ が收斂スル確率ガ / デアルナラバ各法則 $\mathcal{L}_{n-1}^{(n)}$ (即チ $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ ヲ知ルトキ X_n ノ從フ確率法則) = 對シテハ、 $(-\infty, -B_n), (B_n, \infty)$ = 對スル部分ノ法則ヲ如何ニ変ヘテモ上ノ定理 8 ノ成否=ハ変リナイワケデアルカラ、適當ニ変ヘテ変ツタ $\mathcal{L}_{n-1}^{*(n)}$ = 對シテハ条件 (C_1) が成立ツトイフ條件デモ定理 8 ハ成立ツ。

例 2 $\lim_{t \rightarrow \infty} C_{n(t)}/t = 0$, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n(t)} \Pr_{k-1} \{|X'_{n(t), k}| < C_{n(t)}\} = 0$ ナル如キ $\{C_{n(t)}\}$ = 對シテハ $\mathcal{L}_{n-1}^{(n)}$, $(-C_{n(t)}, C_{n(t)})$ = 對スル分布状態ヲ如何ニ変ヘテモ定理 8 ノ成否=ハ關係シナイ。

注意 2: 上ノ証明=於テ *standard deviation* ヲ使用シテ居ル $(n(t), \sigma(t))$ ノ定義=於テコレヲ散縮度ヲ置キ換ヘ得ナイカ。ソノ方が定理 C トノ聯繫ヲ明カニスルノデアルカラ望マシイト思フ。