OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	大數ノ法則, V
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 171, p. 742-750
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74687
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

757. 大數ノ法則, V.

北川　敏男（阪大）

§4. 聯鎖級數ノ收斂定理　獨立級數（相互ニ獨立ナ確率變數ヲ項ニスル級數ニ關シテハ Kolmogoroff ノ不等式（本誌，168号 p. 612）ヲ用キルコトニ依リ、次ノ定理ガ得ラレテ居ル。

定理B（Kolmogoroff）　獨立級數 $\sum X_n$ ニ於テ

(1)　$E\{X_n\}=0,\quad \sigma_n=E\{X_n^2\}<\infty$

$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$

ナリトスル。然ルトキニハ

(2)
(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n=\infty$ ナラバ，$\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ ノ收斂スル確率ハ 0.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n<\infty$ ナラバ，$\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ ノ發散スル確率ハ 0.

然ルニ II，定理2ニ於テ吾々ハ Kolmogoroff ノ不等式ヲ、適當ナ條件ノツイタ聯鎖級數ヘ拡張シ得ルコトヲ示シタ。ソコデ定理Bモ，ソノ適當ナ條件ノモトデハ聯鎖級數ヘ拡張出來ナイカト云フコトガ當然問題ニナロウ。コレニ關シテハ

定理Γ（Lévy）　聯鎖ナ確率變數ノ系列 $\{X_n\}$ ニ於テ各項 X_n ノ絶對値ガ n ニ無關係ナ或ル常數ヲ超ヘズ，且ツ又 $\{X_n\}$ ニ對シテハ，條件（C）ガ成立ツトスル。

然ル時ニハ

(3) (i) $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2$ が発散シ，且ツ $\sum_{k=1}^{\infty}X_k$ が収斂スル確率ハ0デアル。

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2$ が収斂シ且ツ $\sum_{k=1}^{\infty}X_k$ が発散スル確率ハ0デアル。

注意： 定理2（168号，p.613）ニ於テ(6) $E\{X_k^2\}<\infty$ （$k=1,2,3,\cdots\cdots$）ヲ用キズ、定理5デ仮定スル $|X_k|\leqq M$（$k=1,2,3,\cdots\cdots$）ハ、ソレヨリハ強イ仮定デアル。 條件(C)： $E_{k-1}\{X_k\}=0$（$k=1,2,3,\cdots\cdots$）ガ定理Bノ仮定(i)ニ對應シ，(2)(i)及ビ(ii)ガ夫々(3)(i)及ビ(ii)ニ對應スルコトモ明カデアル。

証明： $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2$ が発散スルトキニハ，確率0ノ場合ヲ除イテハ $\sum_{k=1}^{\infty}X_k$ ノ発散ヲヒキ起スコトハ，前ノ§ニデ示シ又（定理3カラ見ラレル）

依ッテ(3)，(ii)ヲ示シサヘスレバ宜シイ。今 $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2$ が収斂スルトイフ事象ヲAデ表ハシ、$\Pr\{A\}=\alpha$ トスル。Aガ起レバ，$\varepsilon>0$ 及ビ $\varepsilon'>0$ ヲバ任意ニ與フル時，確率変数 n ヲ撰ンデ $\sum_{k=n+1}^{\infty}\sigma_k^2\leqq\varepsilon^2$ トラシメ、依ッテ常数（確率変数デナイ）Nヲ適當ニトレバ $\Pr.\{A, n>N\}\leqq\varepsilon'$ トラシメ得ル。

サテ N ヲ上ノ如ク定メタトスル。次ニ與ヘラレタ $\{X_k\}$ ニ對シテ次ノ如キ変更ヲ加ヘル。先ヅ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_N$ ハ絶對ニ変ヘナイ。即チ與ヘラレタ儘トスル。$k>N$ ニ對シテハ，$\sigma_{N+1}^2+\sigma_{N+2}^2+\cdots\cdots+\sigma_k^2 \leqq \varepsilon^2$ ナル限リ $\{X_l\}$ ($l=N+1, N+2, \cdots\cdots, k$) ハ不変ニスル。

或ル k デ上ノ $\leqq$ ガ成立シナクナルト、ソノ k 及ビソレカラ先キノ k ニ関シテハ，$X_l=0$ ($l \geqq k$) トスル。

コノ様ニ<u>変更サレタ聯鎖級数</u>ニ對シテハ，II,〔3〕定理 2 デ C ノ代リニ $1/\sqrt{\varepsilon}$，S_k ノ代リニ S_k-S_N ($k \geqq N$) トシテ

$$\Pr.\left\{\max_{N<k<\infty}|S_k-S_N|>\sqrt{\varepsilon}\right\}<\varepsilon$$

サテコレハ変更サレタ聯鎖級数ニツイテノ結果デアル。ソコデ、與ヘラレタ聯鎖級数ガ上記ノ変更ヲウケルノハ如何ナル場合カトイフニ、(α) $\sum\sigma_k^2$ ガ発散スル場合及ビ (β) $\sum\sigma_k^2$ ガ収斂スル場合ニ於ケル高々確率 ε' ノ場合ノニツノ場合シカアリ得ナイ。

ε, ε' ハ任意ノ正数デアルカラ、コレヲ如何程デモ小サク出来ル。依ツテ上ノ推論カラ、事象 A ガ実現スルナラバ，確率変数列 $\{S_k\}$ ハ確率0ノ場合ヲ除イテハ一ツノ極限ニ収斂スルトイフコトガイヘル。即チ (ii) ガ示サレタ。〔証終〕

<u>系</u>： 聯鎖ナ試行ノ無限系列ニ於テ或ル事象 E ノ実現スル数ハ，確率0ノ場合ヲ除ケバ、

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} Pr_{k-1}\{E_k\}$

ト同時ニ有限トナリ、同時ニ発散トナル。但シ E_k ハ k 番目ノ試行ニ於テ E ノ実現スルトイフ事象ヲ示スコトトスル。

証明: 確率変数 X_k ハ E_k ガ実現スレバ 1, 然ラザレバ 0 トナルトスル。定理5ヲバ, $\sum Y_k = \sum\{X_k - \alpha_k\}$ ニ対シテ施ス, コノ級数ニ関シテハ, $\sigma_k \equiv E_{k-1}\{Y_k^2\} = E_{k-1}\{(X_k - \alpha_k)^2\} = \alpha_k(1-\alpha_k)$ デアル。

先ヅ $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(1-\alpha_k) < \infty$ トナル場合

コノ時ニハ定理7ニ依リ $\sum Y_k$ ハ確率0ノ場合ヲノゾケバ収斂スル。コレハ確率0ノ場合ヲノゾケバ, $\sum X_k$, $\sum \alpha_k$ ハ同時ニ発散(無限大)ナルカ同時ニ収斂ナルカデアルコトヲ示ス。

次ニ $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ が発散スル場合。コノ事象ヲ A' デ示サウ。$\sum \sigma_k^2 = \infty$ ナラバ $\sum \sigma_k = \infty$ デアルカラ、次ノ成立ツヲ示スニハ, 結局 $Pr.\{A', \sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty\} = 0$ トナル事ヲ云ヘバヨイ。今假リニソウデナイトスル。然ル時ニハ $Pr.\{A', \sum_{k=1}^{\infty} X_k < N\} = P > 0$ トナル様ナ整数 N が存在スル。コレが矛盾ニ陥ルコトヲ示サウ。事象 A' ノモトニ於テハ, §3, IV デ定義シタ $\nu(t)$, $S(t)$ が定義サレル,

即チ $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \geqq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(1-\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \geqq t$ トナル様ナ n ガ存在スル。依ッテ $\Pr.\left\{A', \sum_{k=1}^{N} Y_k < N-t\right\} \geqq P > 0$ 依ッテ、コノコトハ $\left|\sum_{k=1}^{N} Y_k\right| = |S(t)|$ ハ t ＝無関係ナ正数 P ノ確率ノ場合＝於テ t ノ大キサデアルコトヲ示ス。然ルニ定理 4 ＝依レバ t ガ充分大ナラバ，$|S(t)|$ ハ $\sqrt{t}$ ノ大キサデナケレバナラヌ，コレハ矛盾デアル。(証終)

§5. 連鎖系列ニ関スル中心極限定理　§3＝述ベタ Liapounoff ノ定理ノ発展トシテ所謂 Lévy ノ中心極限定理トイフノガ知ラレテヰル。先ヅ或ル数 γ $(0<\gamma<1)$ ニ対スル $S_n = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n$ ノ散縮度ヲ $l_n(\gamma)$ デ表ハシ，或ル $\varepsilon > 0$ ニ対シテ

$$(5)\begin{cases} \text{(i)} & \Pr.\{|X_k| > \varepsilon\, l_n(\gamma)\} \equiv \alpha_{n,k}(\varepsilon) \\ \text{(ii)} & \max_{1\leqq k\leqq n} \alpha_{n,k}(\varepsilon) \equiv \alpha_n(\varepsilon) \\ \text{(iii)} & \eta_n(\varepsilon) \equiv \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}(\varepsilon) \end{cases}$$

ナルモノヲ導入スル。更ニ、次ノ概念ヲ導入スル。

<u>條件 (N_1)</u>：　任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ $\lim_{n\to\infty} \alpha_n(\varepsilon) = 0$ トナルコトヲ意味スル。コレヲ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ ハ S_n ノ散縮度 $l_n(\gamma)$ ニ比シ，個々ニ無視シ得ル＝至ルトイフ。

<u>條件 (N_2)</u>：　任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ $\lim_{n\to\infty} \eta_n(\varepsilon) = 0$ トナルコトヲ意味スル。コレヲ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ ハ S_n ノ

散縮度 $l_n(\gamma)$ = 比シ，最大項 = 於テ無視シ得ル = 至ルトイフ。

コレニ関シテ

定理C (Lévy) 独立ナ確率変数ノ系列 $\{X_n\}$ = 於テ条件 (N_1) ガ成立ツトスル。然ルトキ適當ニ選ンダ数列 $\{A_n\}$, $\{N_n\}$ = 対シテ $(S_n - A_n)/N_n$ ガ $n\to\infty$ ノトキ Gauss ノ分布函数 = 法則収斂スルタメノ必要條件ハ條件 (N_2) ノ成立スル事デアル。

コレニ對應スル聯鎖級數ノ定理モ亦 Lévy = 依ツテ與ヘラレタ。先ヅ定理C ノ條件ノ充分ナルコトニ對應スルモノトシテ：

定理8 (Lévy)[1] 聯鎖系列 $\{X_k\}$ ($k=1,2,3,\cdots\cdots$) = 對シテ、次ノ條件ガ満足サレヲルトキルモノトスル。

(i) 各 k = 對シテ次ノコトガ成立ツ： $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{k-1}$ ガ知ラレヲルトキ X_k ノ従フ條件付確率ハ對稱的デアル。即チ任意ノ正數 x = 對シテ $Pr_{k-1}\{X_k < -x\} = 1 - Pr_{k-1}\{X_k > x\}$ ($k=1,2,3,\cdots\cdots$) (コレヲ條件 (C_1) ガ示ス)

(ii) $\varepsilon>0$, $\gamma>0$, $\eta'>0$ ヲ任意ニ與フルトキ，$t_0(\varepsilon,\gamma,\eta')>0$ ガ定マリ．$t \geqq t_0(\varepsilon,\gamma,\eta')$ ナル任意ノ各

---

(1) Paul Lévy: Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires inelép. on enchainées. Journ. de Math. tome XIV (1935), Théorème VII. (p. 393)

t ニ對シテ、$n(t)$, $S(t)$ が前 §3 ノ如ク定義スルコトが出来，且ツ又

$$(6)\quad \eta_{n(t)} \equiv \sum_{k=1}^{n(t)} Pr_{k-1}\{|X_k|_0 > \eta'\sqrt{t}\}$$

ト置クトキニハ

$$(7)\quad Pr.\{\eta_{n(t)} > \varepsilon\} < \gamma$$

ナラシメ得ル。

然ル時ニハ、任意ノ実数 x ニ對シテ

$$(8)\quad \lim_{t\to\infty} Pr.\left\{\frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x\right\} = \Phi(x)$$

注意：　証明ニ先テ定理8ノ條件ヲ定理5ノソレト對比シテ見ルト定理5ノ條件 (C) ハ今ハ (C_1) ニ依ツテ、置キカヘラレテ居ル。(C_1) ハ勿論 (C) ヨリ強イ。定理5ノ (ii), (iii) ニ相應スル役ヲ定理7ノ (ii) ガナシテ居ル。茲デ尤モ注意スベキコトハ，定理5ノ (iii)、コレハアル意味ニ於テ $|X_\nu|$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$ ノ一様有界性ノ條件デアルガ、ソレガ定理7ノ假定中ニハナイノデアル。一様有界性ハ假定シナイガ、無闇ニ大キクナラナイトイフ條件——ソレハ定理Cデハ條件 (N_2) デアルガ——コノ場合，定理8ノ (ii) デ與ヘテ居ルノデアル。

<u>証明</u>：　$\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $\eta' > 0$ ヲ任意ニ與ヘタトスル。(ii) ニヨリ $n(t)$ ヲ定メル。茲ニ聯鎖確率変数ノ行列ヲ導入スル：

(9) $$X'_{n(t),\nu}=\begin{cases} 0 \ [|X_\nu| \geqq \varepsilon'\sqrt{t} \ \text{ノトキ}] \\ X_\nu \ [|X_\nu| < \varepsilon'\sqrt{t} \ \text{ノトキ}] \end{cases}$$

$$(\nu=1,2,\cdots\cdots,n(t))$$

條件 (C_1) = 依リ、$E_{\nu-1}\{X'_{n(t),\nu}\}=0$ デアル。

即チ

$\{X'_{n(t),\nu}\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots,n(t))$ ニ對シテハ 條件 (C) ガ成立チ、且ツ各項ハ $\eta'\sqrt{t}$ ヲ超ヘナイ。依ッテ定理4ニ依リ、今 $S'(t)=X'_{n(t),1}+\cdots\cdots+X'_{n(t),n(t)}$ ト置クトキニハ、スベテノ実数 x ニ對シテ

(10) $$\left|\Pr.\left\{\frac{S'(t)}{\sqrt{t}}<x\right\}-\Phi(x)\right|<6\eta'^{\frac{1}{4}}$$

他方ニ於テ、$S(t)$ ト $S'(t)$ トガ相異ル確率ヲ考ヘルニソレハ $\Pr.\{\eta_{n(t)}>0\}$ ヲ越ヘナイ。然ルニ

(11) $$\Pr.\{\eta_{n(t)}>0\}=\Pr.\{\eta_{n(t)}>\varepsilon\}+\Pr.\{\varepsilon\geqq\eta_{n(t)}>0\}$$

デアリ、假定(ii)ノ (7) ニ依リ、(11) ナル値ハ $\gamma+\varepsilon$ ヲ コエナイ。

依ッテ (10) トー共ニシテ

$$\left|\Pr.\left\{\frac{S(t)}{\sqrt{t}}<x\right\}-\Phi(x)\right|<6\eta'^{\frac{1}{4}}+\gamma+\varepsilon$$

コレカラ (8) ヲ得ル。

注意1: 定理8ノ証明ノ要点ハ (9) ヲ考ヘルトコロニアル。假リニ、條件(C)ニカ假定シナカッタトスルト、$\{X'_{n(t),\nu}\}$ ガ條件 (C) ヲ満足スルトハ限ラナクナル。ソコデ始メニ、(C) ヨリモ強イ條件 (C_1) ヲ假定シテ置イ

タノデアル。要ハソコニアルノダカラ、條件(C_1)ニカナリノ modifications ヲ加ヘテモ宜シイ譯デアル。例ヘベ:

例 1 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{n-1}$ ノトル値ニ依ッテ定メテモヨイ。B_nノ系列$\{B_n\}$ニ対シテ若シモ$\sum Pr_{n-1}\{|X_n| > B_n\}$が収斂スル確率ガノデアルナラバ各法則$\mathcal{L}_{n-1}^{(n)}$(即チ$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{n-1}$ヲ知ルトキ$X_n$ノ従フ確率法則)ニ對シテハ、$(-\infty, -B_n)$, (B_n, ∞)ニ對スル部分ノ法則ヲ如何ニ変ヘテモ上ノ定理8ノ成否ニハ変リナイワケデアルカラ、適當ニ変ヘテ変ッタ$\mathcal{L}^{*(n)}_{n-1}$ニ對シテヘ條件(C_1)ガ成立ツトイフ條件デモ定理8ハ成立ツ。

例 2 $\lim_{t\to\infty} C_{n(t)}/t = 0$, 且ツ $\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{n(t)} Pr_{k-1}\{|X'_{n(t),k}| < C_{n(t)}\} = 0$トル如キ$\{C_{n(t)}\}$ニ對シテハ$\mathcal{L}_{n-1}^{(n)}$ノ$(-C_{n(t)}, C_{n(t)})$ニ對スル分布狀態ヲ如何ニ変ヘテモ定理8ノ成否ニハ関係シナイ。

注意2: 上ノ証明ニ於テ standard deviation ヲ使用シテ居ル($n(t)$, $S(t)$ノ定義ニ於テ)コレヲ散徴度デ置キ換ヘ得ナイカ。ソノ方ガ定理Cトノ聯関ヲ明カニスルノデアルカラ望マシイト思フ。