



Title	確率法則ノ分解問題, VII
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 171, p. 751-756
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74688
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

758. 確率法則ノ分解問題, VII

北川 敏男 (阪大)

§ 8. $K[L], K^*[L] =$ 於ケル L ノ分解問題 (續キ)

[2] 安定+確率法則 (続キ) 安定+確率法則ヲ

construire スル方法トシテハ、上述ノ他 = Lévy ハ尚モウ
 一ツ direct + 方法⁽¹⁾ヲ與ヘテ居レガ、茲デハソノ紹介ハセ
 メテ、Khintchine ノ簡單+構成法⁽²⁾ヲ述べヨウ。前回補
 助定理 9ヲ與ヘタ如ク、(136) 参照) 指數 α ガ各安定+確
 率法則 = 對シテ定マルワケデアアルガ、以下述ベル方法ハ $\alpha = 1,$
 2 ヲ除キ (コノ古典的+場合ハ既 = ヨク知ラレテ居レ) ソノ
 他、任意ノ α ($0 < \alpha < 2$) = 對シテノ構成法ヲ與ヘル。

(i) $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ハ相互 = 独立+確率変数
 ノ系列デアリ、ソノ分布函数ハ皆同レテ $x > 0$ ノトキ = ハ
 $\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ = 等レク、 $x < 0$ ノトキ = ハ 0 = ナルトスル。
 $U_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ トオク。他方 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n,$
 $\dots$ モ亦相互 = 独立+確率変数ノ系列デアツテ $x > 0$ ノ
 トキ = ハ $\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$ = 等レク $x < 0$ ノトキ = ハ 0 = ナルト
 スル。 $V_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ トオク。同様 = 、

(1) Journ. des Math. pures et appl. (IV) 14, 1935.

(2) Exemples des variables aléatoires obéissant
 à des lois stables. Bull. l'université de
 Moskou Section A, vol. 1 (1937)

$Z_1, Z_2, \dots$ と $W_1, W_2, \dots$ トヲ定義スル、 $\forall$ ノ際上
) parameter λ ハ $\lambda_1 + \lambda_2$ トスル。 ($W_n = Z_1 + Z_2 + \dots$
 $\dots + Z_n$)

(ii) 確率変数列 $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots, V_1, V_2, \dots,$
 $\dots, V_n, \dots$ ヲ、増加系列 = 並べたモノヲ $D_1, D_2, D_3, \dots$
 $\dots$ トスル。

補助定理11: スベテノ $n =$ 對シテ n 変数 $D_1, D_2, \dots,$
 D_n ノ répartition ハ n 変数 $W_1, W_2, \dots, W_n$ ノ
 $\forall$ レ = 一致スル。

証明: 今 $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$ ノ値が與ヘテレタト
 シ、 $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$ ノ内 = 含マレル U_i, V_i ノ量
 ノ最モ大ナル値ヲ U_k, V_l トスル。 U_k, V_l ノうちノ少ク
 モ一ツハ $D_{n-1} =$ 等シイ) $x < D_n < x + \Delta x$ トナル確率ハ
 次ノニツノ確率ノ和 = 等シイ。

1) $X_{k+1} > D_{n-1} - U_k, Y_{l+1} > D_{n-1} - V_l$ ト云
 フ條件ノモトデ $x - U_k < X_{k+1} < x + \Delta x - U_k$ デ且ツ
 $Y_{l+1} > x - V_l$ トナル確率

2) 1) ト同ツ條件ノモトデ $x - V_l < Y_{l+1} < x +$
 $\Delta x - V_l$ デ且ツ $X_{k+1} > x - U_k$ トナル確率

然ルニ明カ = 1) ハ $\lambda_1 e^{-\lambda_1(x-D_{n-1})} e^{-\lambda_2(x-D_{n-1})} \Delta x$
 $=$, 2) ハ $\lambda_2 e^{-\lambda_2(x-D_{n-1})} e^{-\lambda_1(x-D_{n-1})} \Delta x =$ 等シイ。

依ツテ $x < D_n < x + \Delta x$ トナル確率ハ

$(\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(x-D_{n-1})} \Delta x =$ 等シイ, コレハ

$W_{n-1} = D_{n-1}$ ノ條件ノモトデ $x < W_n < x + \Delta x$ トナル

ル確率=等シイ。〔証終〕

(iii) 先ッ $\Delta > 1$ トシ

$$(44) \quad A_{\Delta}(\lambda_1) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{-\Delta}$$

ナ Δ 級数ヲ考ヘル。 k が充分大ナルトキ、大数ノ強法則
(*la loi forte des grands nombres*) = 依リテ
 U_k ハ殆ド確カ= k , *ordre* テアル。従ツテ (44) が収斂
スル確率ハ 1 テアル。同様ナコトが

$$A_{\Delta}(\lambda_2) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^{-\Delta}, \quad A_{\Delta}(\lambda_1 + \lambda_2) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k^{-\Delta}$$

= 関シテモイハレル。補助定理 11 = 依リ、 $A_{\Delta}(\lambda_1) + A_{\Delta}(\lambda_2)$
ノ分布函数ハ $A_{\Delta}(\lambda_1 + \lambda_2)$ ノソレ=等シイ。

今 $C_1 = \lambda_1^{\Delta}$, $C_2 = \lambda_2^{\Delta}$, $C_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)^{\Delta}$ トオキ、

$A_{\Delta}(1)$ ナル確率変数ヲ已デ示サウ。然ラバ

$$C_1 E = \lambda_1^{\Delta} E, \quad C_2 E = \lambda_2^{\Delta} E,$$

$$C_3 E = (\lambda_1 + \lambda_2)^{\Delta} E$$

コレハ、 $A_{\Delta}(\lambda_1)$, $A_{\Delta}(\lambda_2)$, $A_{\Delta}(\lambda_1 + \lambda_2)$ ト同ヅ確率法則=
従フ。依ツテ

$$C_3^{\frac{1}{\Delta}} = C_1^{\frac{1}{\Delta}} + C_2^{\frac{1}{\Delta}} = \lambda_1 + \lambda_2$$

コレ=對シテ $0 < \alpha < 1$ ナル指數 α = 對スル安定法則が
construire サレタ。 ($\frac{1}{\Delta} = \alpha$ トオケバヨイ)

(iv) $\alpha > 1$ ノ場合。コノトキ $1/\Delta = \alpha$ トアルト、コ
ノ Δ = 對シテハ (44) ハ発散スル確率が 1 テアル、依ツテ

$$B_{\Delta}(\lambda_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \sigma_k^{-\Delta} - \lambda_1^{\Delta} \frac{n^{1-\Delta}}{1-\Delta} \right\}$$

＋ル変形ヲ施ス、コレハ $\frac{1}{2} < \Delta < 1$ ニ對シテハ收斂スル確率カ 1 デアル。同様ニシテ $B_{\Delta}(\lambda_2)$, $B_{\Delta}(\lambda_1 + \lambda_2)$ ヲツクル。確率 0 ノ場合ヲ除イテハ、 $D_1, D_2, \dots, D_n$ + ル數ノウチ、 σ_k ハ $\lambda_1 n / (\lambda_1 + \lambda_2) = \bar{x}$ ハメテ近イ（從ツテ σ_k ノソレハ、 $\lambda_2 n / (\lambda_1 + \lambda_2) = \bar{y}$ ハメテ近イ）ト考ヘルコトが出来ル。

然ルヲ以テ次ノニツノ確率変數

$$\sum_{k=1}^n D_k^{-\Delta} - \lambda_1^{\Delta} \frac{\left(\frac{\lambda_1 n}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{1-\Delta}}{1-\Delta} - \lambda_2^{\Delta} \frac{\left(\frac{\lambda_2 n}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{1-\Delta}}{1-\Delta}$$

$$\sum_{k=1}^n W_k^{-\Delta} - (\lambda_1 + \lambda_2)^{\Delta} \frac{n^{1-\Delta}}{1-\Delta}$$

ハ補助定理 11 及ビ恒等式

$$\lambda_1^{\Delta} \left(\frac{\lambda_1 n}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{1-\Delta} + \lambda_2^{\Delta} \left(\frac{\lambda_2 n}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{1-\Delta} = (\lambda_1 + \lambda_2)^{\Delta} n^{1-\Delta}$$

ニ依ツテ同ジ分布函數ヲモツコトヲ知ル、從ツテ $B_{\Delta}(\lambda_1) + B_{\Delta}(\lambda_2)$ ト $B_{\Delta}(\lambda_1 + \lambda_2)$ トハ同ジ分布函數ヲモツ、コレカラ $B_{\Delta}(\lambda)$ ハ指數 $\Delta (= \frac{1}{\alpha})$ ノ安定＋確率法則デアルコトヲ知ル。

[証終]

[3] 準安定＋確率法則：コレハ前々回定義シタ如ク $K[F]$ が結合ニ關シテ開カテ居ル様ニ確率法則（＝分布函數） $F(x)$ ヲ意味スル。即チ次ノ性質ヲモツヤウナ分布函數

$F(x)$ を指すノデアル:

(S_2) X_1, X_2 が相互 = 独立デ且ツ共 = $F(x)$ を分布
函数トスルトキ = ハ、任意ノ $a_1 > 0, a_2 > 0$, 任意ノ実数 $b_1,$
 b_2 = 對シテ

$$(45) \quad (a_1 X_1 + b_1) + (a_2 X_2 + b_2) = a X + b$$

トナル様ナ $a = f(a_1, a_2, b_1, b_2)$ ト $b = 0(a_1, a_2,$
 $b_1, b_2)$ ト $F(x)$ を分布函数 = スル確率変数 X トが定マル
事ヲ意味スル。

與ヘラレタ b_1, b_2 を常 = 0 トシ, b 亦 0 トシテ定マ
ルトイフナラバ (S_2) $\wedge$ (S_1) トナル。サテカクノ如ク (43)
ヲ (44) = 迄拡張スルコトハ必要ナ事ハ明ラカデアルガ、カ
クシテモ *trivial* ナ拡張シカ得ラレナイデアロウトモ想像
サレテ居ツタ。然ルニ、昨年 A. Khintchine ハソノ豫想
ハ當ラナイコトヲ示シタ。

定理 9⁽¹⁾ (Khintchine): 準安定 + 確率法則ノ特性
函数 $f(t)$ ハ定理 8 デ導ケタモノノ外ニ尚

$$(46) \quad \exp \left\{ -|t| + i\beta \frac{2}{\pi} t \log |t| \right\} \quad (|\beta| \leq 1)$$

ナル形ノモノガアル。 $|\beta| \leq 1$ ナル任意ノ β = 對シテ (45) ハ
常 = 準安定 + 確率法則ヲアタヘル。

注意 1: (46) デ $\beta = 0$ ナラバ *stabil* トナツテ定理

(1) *Invariante Klassen von Verteilungsgesetze:*
Bull. de L'Université d'état à Moscou, vol. 1.
section A (1937)

8, (34) $\Pi = \lambda \nu$. $|\beta| \leq 1$ 且 $\beta \neq 0$ デアルナラバ, (46)

ハ安定デナイ。

注意 2: 相互 = 独立ナ確率変数ノ系列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ = 於テ各 X_n ノ從フ確率法則ヲ

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 1 \text{ ノトキ}) \\ 1 - \frac{1}{x} & (x \geq 1 \text{ ノトキ}) \end{cases}$$

トスル。然ルトキニハ, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ノ分布函数ハ $n \rightarrow \infty$

ノトキ (45) ノ形ノ分布函数ニ法則收斂ヲナス。

注意 3: 相互 = 独立ナ確率変数ノ系列 $X_1, X_2, \dots, \dots, X_n, \dots$ = 於テ各 X_n ノ從フ確率法則ヲ

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0 \text{ ノトキ}) \\ 1 - e^{-x} & (x \geq 0 \text{ ノトキ}) \end{cases}$$

トスレバ, $\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{S_k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right\}$ ノ收斂スル確率ハ 1

デ、ソノ和ハ (46) ノ形ノ分布函数ヲモツ (Khintchine)

証明ハ前四獎ヘタモ、ト全ク *parallel* = シテ出來ルコトハ疑ヒナイ。