



Title	Banach空間ニ於ケル positive operation II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 171, p. 758-768
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74690
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

760. Banach 空間 = 於ケル positive operation II

角 谷 静 夫 (阪大)

次 = complex Banach 空間 $E(i) = E + iE$ 考ヘル。

$E(i)$ / 一般 / element $z \wedge z = x + iy, x, y \in E$
ト云フ形アアル。任意 / $z \in E(i)$ 及ビ $\lambda = \alpha + i\beta$
($\alpha, \beta : \text{real}$) = 對シテ $\lambda z = (\alpha + i\beta)(x + iy)$
 $= (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x) =$ ヨツテ λz ヲ定義スル。
次 = $E = \wedge$ 既 = semi-order が定義サレタトシテ、 $E(i)$

= 於ケル *semi-order* を次ノ如ク定義スル: $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ = 對シテ $z \leq z'$ ト云フノハ $x \leq x'$, $y \leq y'$ が同時ニ成立スルトキデアアルト定義スル。 $z < z'$ トナルノハ $x \leq x'$, $y < y'$ 又ハ $x < x'$, $y \leq y'$ トナルトキデアアル。

更ニ $z \ll z'$ ハ $x \leq x'$, $y \ll y'$ 又ハ $x \ll x'$, $y \leq y'$ ナルトキト定義スル。 $x \ll x'$, $y \ll y'$ ナルトキハ $z \ll z'$ ト書クコトニスル。

今 T 又 E = 於ケル *linear operator* トスレバ $Tz \equiv T(x + iy) = Tx + iTy$ ハ $E(i)$ = 於ケル (*real*) *linear operator* デアル。

以下ニ於テハ $E(i)$ = 於ケル *linear operator* ハイツモ、カ、ルモノヲ考ヘルコトニスル。コレハ明カニ $T(\lambda z) = \lambda T(z)$ ヲ満足スル T が (*strongly*) *positive* ナルトキ、 T ハ又 $E(i)$, *operator* トシテ (*strongly*) *positive* = ナル。

次ニ $E(i)$ = 於ケル *operator* トシテ、 T ノ固有値 (一般ニハ *complex valued*) ヲ論ジルワケデアアルガ、コノタメニハ $z = x + iy$ = 對シテソノ“絶対値” $|z|$ ヲ定義スルコトが便宜デアアル。⁽¹⁾

- (1) E が実数値ノ函数ノ空間トシテ與ヘラレルトキハ $E(i)$ ハ複素数値ノ函数ノ空間トナルカラ、ソノ“絶対値”ハ普通ノ様ニ定義出來ルカ一般ノ場合ニハサウヘ行カナイ。

|Z| ハ 絶対値 ト云ッテモ實ハ E ノ element デアル。

|Z| ヲ定義スルタメニハ E ノ semi-order = 関シテ、少シ假定ヲ加ヘル必要ガアル。以下ニ述ベル假定 (1), (2) ハ何レモ大概ノ場合ニ假定サレテキルモノデアル。(2)

假定 (1) 任意ノ $x \in E$, $y \in E$ = 對シテ $x \leq u$, $y \leq u$ ナル如キ $u \in E$ が存在スル。

(2) E ノ部分集合 $\mathcal{M}$ = 對シテ、モシ $x \leq u$ ガスベテノ $x \in \mathcal{M}$ = 對シテ成立スル如キ $u \in E$ が存在スレバ、カカル u ノうちニテ最小ノモノガアル。即チ $u_0 \in E$ が存在シテスベテノ $x \in \mathcal{M}$ = 對シテ $x \leq u_0$ トナリ、シカモ、スベテノ $x \in \mathcal{M}$ = 對シテ $x \leq u$ トナル如キ任意ノ $u \in E$ = 對シテ $u_0 \leq u$ トナル。コノ u_0 ノコトヲ $\text{l. u. b. } (x)$
 $x \in \mathcal{M}$ ト書ク。

特ニ $\mathcal{M}$ がニツノ element x, y ヨリ成ルトキハ (1) = ヨリ $x \leq u$, $y \leq u$ ナル $u \in E$ が存在スルカラ $\text{l. u. b. } (x, y)$ が存在スル。コレヲ $\max(x, y)$ ト書ク。

(2) 例ヘバ J. v. Neumann / continuous geometry = 於ケルが如シ。

又一般ノ semi-ordered linear space = 関シテハ次ノニツノ論文ヲ参照サレクイ。

H. Freudenthal: Teilweise geordnete Moduln, Proc. Acad. Amsterdam, 39 (1936).

L. Kantorovitch: Lineare halbgeordnete Räume, Recueil Math., 2(44)-1. (1937).

定義 任意 $z = x + iy \in E(i) = \text{複素数}$

$$|z| = \text{l.u.b.} (\alpha x - \beta y) \text{ トオク。但し } \text{l.u.b.} \wedge \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

ナラバ実数ノ組 $(\alpha, \beta) = \text{複素数}$ トスル。

$\alpha x - \beta y$ ハ $(\alpha + i\beta)(x + iy)$ ノ *real part* デアル

カラ $|z| = \text{l.u.b.}_{|\theta|=1} \Re(\theta z)$ ト考ヘルコトが出来ル。コノ

$= \Re$ ハ *real part* ヲ表ハシ θ ハ絶対値 1 ノ *complex number*

complex number ヲウチリメノトスル。

コノ定義が可能デアルタメニハ $\alpha x - \beta y \leq u$ カスベ

ヲノ $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ナル実数ノ組 $(\alpha, \beta) = \text{複素数}$ 成立スル如

キ $u \in E$ カ存在シナケレバナラナイ。實際 $u = \max(x, -x)$

+ $\max(y, -y)$ トオケバコレが求ムル u デアル。

次ニコノ $|z|$ ノ性質ヲ調ベル。先ツ任意ノ *complex*

number $\lambda = \text{複素数}$

$$(1) \quad |\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$$

トナルコトハ殆ド明カデアル。

$$\text{何トナレバ } |\lambda z| = \text{l.u.b.}_{|\theta|=1} \Re(\theta \lambda z) = \text{l.u.b.}_{|\theta|=1} \Re(\theta \lambda |z|)$$

$$= |\lambda| \cdot \text{l.u.b.}_{|\theta|=1} \Re(\theta z) = |\lambda| \cdot |z|.$$

次ニ

$$(2) \quad |z| \geq 0$$

トナルコトハ $|z| \geq x$ ($\alpha = 1, \beta = 0$), $|z| \geq -x$ ($\alpha = -1,$

$\beta = 0$) ヨリ $2|z| \geq x + (-x) = 0$ ヲ得ルコトカラワカ

ル。又

$$(3) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

トナルコトモ容易=ワカル。實際 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ トスレバ $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ +ル任意ノ α, β = 對シテ
 $\alpha(x_1 + x_2) - \beta(y_1 + y_2) = (\alpha x_1 - \beta y_1) + (\alpha x_2 - \beta y_2)$
 $\leq |z_1| + |z_2|$. ヲツテ l.u.b. ノ定義ヨリ $|z_1 + z_2| \leq$
 $|z_1| + |z_2|$ トナル。⁽³⁾

更ニ次ノコトモ明ラカデアロウ。

$$(4) \quad \theta z \leq |z| + i|z|$$

ガ任意ノ $|z|=1$ +ル complex number θ = 對シテ 成立
シ、且ツ $|z| + i|z|$ ハカ、ル性質ヲモツモノノうちニテ最
小デアアル。即チ $E(i)$ = 於ケル semi-order ノイミデ

$$\text{l.u.b.}(\theta z) = |z| + i|z| \text{ デアル。}$$

$$|\theta| = 1$$

最後ニ z ガ real. 即チ $z = x$ ($y=0$) +ルトキ
 $= \wedge |z| = \max(x, -x)$ トナリ。 $z = x + iCx$,
又ハ $z = Cx + iy$, C ハ real const., +ルトキハ
 $|z| = \sqrt{1+C^2} \cdot |x| = \sqrt{1+C^2} \cdot \max(x, -x)$ トナルコ
トヲ注意シテオク。

(3) コレハ又直接ニ

$$|z_1 + z_2| = \text{l.u.b.}_{|\theta|=1} \Re(\theta z_1 + \theta z_2)$$

$$\leq \text{l.u.b.}_{|\theta|=1} \Re(\theta z_1) + \text{l.u.b.}_{|\theta|=1} \Re(\theta z_2) = |z_1| + |z_2|$$

ト計算スルコトモ出來ル。

補助定理 1 T が positive operator たら
 任意 $z \in E(i)$ 対して $T(|z|) \geq |T(z)|$ となる。(4)

証明: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ かつ α, β 対して $T(|z|)$
 $\geq T(\alpha x - \beta y) = \alpha T(x) - \beta T(y)$. ヨツテ
 $T(|z|) \geq l.u.b. (\alpha T(x) - \beta T(y)) = |T(x) + iT(y)|$
 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$
 $= |T(z)|.$

然らば $T(|z|) = |T(z)|$ となる、如何なる場合か。
 integral operator の場合ヨリ豫想スレバ、コノタメニ
 z の real part x と imaginary part y とが
 “比例”スルコトが必要且ツ十分ノ様アアル。シカシコレハ
 一寸証明が困難ノ様アアル。ヨツテ、後ノ議論ニ必要ナ次ノ
 補助定理ヲケテ証明シテオク。

補助定理 2 T が strongly positive + linear
 operator デアレバ $T(z) = \lambda z$, $T(|z|) = |\lambda| \cdot |z|$
 となる、 λ が real positive かつ且ツ $z = x + iy$,
 $x = cy$ ($x \wedge y = cx$)⁽⁵⁾ c : real const. となる場合
 に限ル。

(4) コレハ real non-negative kernel $K(x, y)$ 対して

$$\left| \int f(x) K(x, y) dx \right| \leq \int |f(x)| K(x, y) dx$$

となるコトノ擴張デアアル。

(5) $y = 0$ ナルトキガアルカモ知レナイノデ $y = cx$ ト書キ
 直シタ。

証明: $\theta z \leq (1+i)|z|$ は任意の $|\theta|=1$ なる complex number θ に対して成立スル。ヨツテ各 $|\theta|=1$ なる θ に対して $\theta z \leq d_\theta (1+i)|z|$ トナル如キ最小の const. d_θ が定マル。 $-1 \leq d_\theta \leq 1$ デアル。 θ がアラル $|\theta|=1$ テウゴクトキノ d_θ ノ下限ヲ d_0 トセヨ。 $d_{\theta_n} \rightarrow d_0$ ナル如キ $\{\theta_n\}$ が存在スルカラ、コノ $\{\theta_n\}$ カラ部分列 $\{\theta_{n'}\}$ ヲ選ンテ $\theta_{n'} \rightarrow \theta_0$ ナラシメルト $|\theta_0|=1$ 且ツ

$$(*) \quad \theta_0 z \leq d_0 (1+i)|z|$$

トナル。コノ不等式ハ real part ノ不等式ト imaginary part ノ不等式トニワケテ考ヘルコトが出来ル。モシ何レノ方モ等号が成立シナケレバ T が strongly positive デアルト云フコトヨリ

$$T(\theta_0 z) \ll d_0 (1+i) T(|z|)$$

トナル。トコロが假定ニヨリ

$$\text{左辺} = \theta_0 T(z) = \theta_0 \lambda \cdot z = |\lambda| \cdot \frac{\theta_0 \lambda}{|\lambda|} z$$

$$\text{右辺} = d_0 (1+i) \cdot |\lambda| \cdot |z|$$

$$\text{デアルカラ } \theta'_0 = \frac{\theta_0 \lambda}{|\lambda|} \text{ トオケベ}$$

$$\theta'_0 z \ll d_0 (1+i) |z|.$$

ヨツテ $\varepsilon > 0$ ヲ十分小サクトレバ

$$\theta'_0 z \leq (d_0 - \varepsilon)(1+i)|z|$$

が成立スル。コレハ d_0 ノ定義ニ矛盾スル。ヨツテ $(*)$ ニ於テハ real part 又ハ imaginary part デ等号が成立シナケレバナラナイ。ドチラデモ同様デアルカラ

$$\mathcal{R}(\theta_0 z) = d_0 |z|$$

トナルモノトシヨウ。コレヨリ λ が real ナルコト、及ビ
 コノ real part ト imaginary part トが比例スル
 コトヲ証明スル。後者ヲ証明スルニハ $z_1 = \theta_0 z = x_1 + iy_1$
 トオイテキ $y_1 = cx_1$ ($\wedge x_1 = cy_1$) トナルコトヲ示
 セルヨイ。⁽⁶⁾ $T(z_1) = \lambda z_1$, $T(|z_1|) = |\lambda| |z_1|$ ハ勿論
 成立スル。先ヅ上ノ結果ヨリ

$$x_1 = d_0 |z_1|.$$

ヨツテ $T(x_1) = d_0 T(|z_1|) = d_0 |\lambda| \cdot |z_1| = |\lambda| x_1$. 即
 チ x_1 ハ $T(x_1) = |\lambda| \cdot x_1$ ヲ満足スル。次ニ λ が real
 ナルコトヲ示スナメ $\lambda = \mu + i\nu$ トオク。 $T(z_1) = \lambda z_1$
 ヨリ

$$T(x_1) = \mu x_1 - \nu y_1, \quad T(y_1) = \mu y_1 + \nu x_1$$

ヨツテモシ λ が real ナラバ $\nu \neq 0$ デアルカラ

$$y_1 = \frac{1}{\nu} (\mu x_1 - T(x_1)) = \frac{1}{\nu} (\mu x_1 - |\lambda| x_1) = \frac{\mu - |\lambda|}{\nu} x_1.$$

從ツテ

$$T(y_1) = \frac{\mu - |\lambda|}{\nu} T(x_1) = \frac{\mu - |\lambda|}{\nu} \cdot |\lambda| \cdot x_1 = |\lambda| \cdot y_1.$$

$$\text{故ニ } T(z_1) = T(x_1) + iT(y_1) = |\lambda| x_1 + i|\lambda| y_1 = |\lambda| \cdot z_1$$

然ルニ一方 $T(z_1) = \lambda z_1$ ナル故ニ $\lambda = |\lambda|$. 即チ λ ハ real
 positive. コレハ λ が real ナリ ($\nu \neq 0$) トシテ假

(6) $d_0 = 0$ ナルトキハ trivial ナルカラ $d_0 \neq 0$ ト
 スル。

定 = 反スル。

ヨツテ λ は *real* デナケレバナラナイ。 λ が *real* ナラバ $\lambda = 0$ トナリ $T(x_1) = \mu x_1 = \lambda x_1$, $T(y_1) = \mu y_1 = \lambda y_1$ ナ得ル。 $x_1 > 0$ ナハ $x_1 < 0$ デアルカテ $x_1 > 0$ ト假定スルコトが出来ル。 λ が *positive* ナルコトハ明カデアル。

ヨツテ $y_1 = Cx_1$ ナルコトヲ示ス = ハ次ノ補助定理ヲ証明スレバヨイ。

補助定理 3 (コレハ *real Banach* 空間 = 於ケル定理) T が *strongly positive* ナ且ツ *real positive* ナ $\lambda =$ 對シテ $T(x) = \lambda x$, $T(y) = \lambda y$, $x > 0$ ナラバ $y = Cx$, $C: \text{const.}$ トナル。

証明: T が *strongly positive* ナルコトト $x > 0$ ナルコトトヨリ $\lambda x = T(x) >> 0$. ヨツテ十分大ナ d constant $d =$ 對シテ $y \leq dx$ トナル。

今 $y \leq dx$ が成立スル如キ最小ノ d ヲ d_0 トセヨ。
 ϵ シ $y \leq d_0 x$ = 於テ等号が成立シナカツタトスレバ T が *strongly positive* ナルコトヨリ $T(y) \ll d_0 T(x)$
然ル = 假定ヨリ $T(y) = \lambda y$, $T(x) = \lambda x$, $\lambda > 0$
ナル故 $y \ll d_0 x$.

ヨツテ十分小ナ $\epsilon > 0$ = 對シテ $y \leq (d_0 - \epsilon)x$. コレハ d_0 ノ定義 = 矛盾スル。

定理3. T が *strongly positive + linear operator* + ルトキ T の *proper value (complex valued)* ノうち絶対値最大ノモノが存在スレバ、ソレハ唯一ツシカ存在セズ、シカモ *real, positive* デアル。且ツ コノ固有値 $\lambda =$ 對スレ 固有要素 z , $z = x + iy$ ($Tz = \lambda z$) ハ $x = cy$ (又ハ $y = cx$, $c: \text{const.}$) ヲ満足スレ。又 λ ハ T ノ *simple* + 固有値デアル。

証明: $T(z) = \lambda z$ ヨリ、先ヅ補助定理1ヨリ $T(|z|) \geq |\lambda| \cdot |z|$.

ヨツテ、今若シコノ式ニ等号が成立シナカツタトスレバ T が *strongly positive* + ルコトヨリ $T(T(|z|)) \gg |\lambda| T(|z|)$ トナル。即チ $T(x) \geq (\lambda + \varepsilon) \cdot x$ + ル如キ $x > 0$ が E 内ニ存在スル。從ツテ、前号ノ定理 2⁽⁷⁾ = ヲツテ $\lambda, \geq (\lambda + \varepsilon) > |\lambda|$ + ル如キ固有値が存在スル筈デアル。コレハ $|\lambda|$ が *max.* デアルト云フ假定ニ反スル。ヨツテ $T(|z|) = |\lambda| \cdot |z|$ トイハネバナラナイ。

スルト補助定理2が使ヘルカラ λ ハ *real positive* トナリ、シカモソノ固有要素 $z = x + iy$ ハ $x = cy$ (又ハ $y = cx$) ヲ満足スル。

最後ニ $T(x) = \lambda x$, $T(y) = x + \lambda y$ ヲ満足スル如キ $x, y \in E$ が存在シナイコトハ次ノ様ニスレバワカル。先ヅ $x > 0$ ト假定シテヨイコトハ直ニワカル。ヨツテ又 $x \gg 0$

である。故に $y \leq dx$ とナル如き d が存在スル。カゝル d は $\min.$ である。トセヨ。

$y \leq d_0 x$ である。ヨツテ $x + \lambda y = T(y) \leq d_0 T(x) = d_0 \lambda x$. 即ち $\lambda y \leq (d_0 \lambda - 1)x$. $\lambda > 0$ ナル故 $y \leq (d_0 - \frac{1}{\lambda})x$. コレハ d_0 が $\min.$ トイフコト=矛盾スル。