



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | Nesbitt ノ論文ニツイテ                                                             |
| Author(s)    | 森田, 紀一                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1939, 172, p. 1-9                                                |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74691">https://doi.org/10.18910/74691</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

761. Nesbitt / 論文 = ツイ 1939

森田 紀一 (東京文理大)

$A/K$  を主単位元  $1$  をもつ  $K$  上ノ多元環トスル。

$\mathcal{L}, \mathcal{R}$  を  $K =$  於ケル  $A$  ノ表現トシ、之レ等ノ表現 = 際シテ  $A$  ノ元  $\alpha =$  對應スル行列ヲ  $B(\alpha), C(\alpha)$  トスル。

$$B(\alpha)P = PC(\alpha) \quad \text{for all } \alpha \in A$$

ヲ満足スル如キ一次独立ナル行列ガ丁度  $h$  箇アルトキ  $h$

$$h = I(\mathcal{L}, \mathcal{R})$$

ナル記号ヲ表ハス。(Nesbitt: On the regular representations of algebras, Ann. of Math 39. NO. 3 (1938))

然ラバ  $\mathcal{L}, \mathcal{R}$  ノ左表現加群ヲ夫々  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  トスルトキ、  
 $\mathcal{N}$  中へ  $A$  作用環トシテ、作用準同型 = 寫ス寫像ト上式ヲ満足スル行列  $P$  トノ間 = 一対一ノ對應ガ存スルコトハヨク知ラレテキル。從ツテ  $h$  ハ、カヽル準同型寫像ノ作ル  $K$  加群ノ  $K =$  對スル階級 = 等シイ。(右表現加群ヲ考ヘルトキハ、 $\mathcal{L}$  ノ右表現加群ヲ  $\mathcal{R}$  ノ右表現加群ノ中ヘウツス作用準同型寫像ノ作ル加群ノ階級ガ  $h$  デアル) 然ラバ

補助定理 1.  $e$  ヲ  $A$  ノ冪等元トスルトキ、 $Ae, eA$  ヲ夫々左、右表現加群ト考ヘテ得ラレル  $A$  ノ表現ヲ  $\psi, \psi^*$  トスル。別ニ  $A$  ノ一ツノ表現  $\mathcal{L}$  = 際シテ  $e$  ガ行列  $B(e) =$

對應スルモノトスル。然ラバ

$$I(\mathfrak{L}, \psi) = I(\psi^*, \mathfrak{L}) = \text{rank of } B(e)$$

証明.  $\mathfrak{L}$ 、左表現加群ヲ  $\mathfrak{M} = v_1 K + \dots + v_m K$  トスル。  $Ae$  ヲ  $\mathfrak{M}$  ノ中ヘヲ  $\psi$  ス作用準同型對應ハ、 $e$  ガ冪等元ナル故

$$e \longrightarrow e m, \quad m \in \mathfrak{M}$$

即チ  $e$  ノ Bild ヲ定メルコト = ヨリ、一意ニ定メラレル。

$\mathfrak{M}$  ノ基ガ  $v_1, \dots, v_m$  デアルカラ、 $e v_1, \dots, e v_m$  ノ中  $K$  = 關シ、一次独立ナルモノノ個數ガ丁度  $I(\mathfrak{L}, \psi)$  デアル。

$$e(v_1, \dots, v_m) = (v_1, \dots, v_m) B(e)$$

デアルカラ

$$I(\mathfrak{L}, \psi) = B(e) \text{ ノ階級}$$

$I(\psi^*, \mathfrak{L}) =$  就テモ同様ニ証明サレル。

定理 I. (Nesbitt. loc. cit. Theorem 1)

$A$  ヲ右表現加群ト考ヘタ時、 $A$  ノ表現ヲ  $\mathfrak{R}$  (第一正規表現)

$A$  ヲ左表現加群ト考ヘタ時、 $A$  ノ表現ヲ  $\mathfrak{L}$  (第一正規表現)

トシ、 $\mathfrak{L} = A$ 、次数  $\mathfrak{L}$  ナル、表現  $\mathfrak{L}$  ガ映ヘラレヲキルトスル。但シ  $\mathfrak{L}$  ハ零表現ヲ含マストスル。然ラバ

$$\mathfrak{L} = I(\mathfrak{L}, \gamma) = I(\mathfrak{R}, \mathfrak{L})$$

証明. コノ際  $B(1)$  ハ次数  $\mathfrak{L}$  ノ單位行列デアル。

扱テ

$$A = Ae_1 + \dots + Ae_t, \quad \sum c_t = 1$$

$$e_i e_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$Ae_i$  は indecomposable left ideal

ナル分解ヲ考ヘ、 $A$ ノ根基ヲ  $N$  トシ、 $N = \sum v$  Restklasse  
ヲ一ツケテ示ス。

$e_i A$  ヲ右表現加群トスル表現ヲ  $U_i$

$Ae_i$  ヲ左表現加群トスル表現ヲ  $V_i$

$\bar{e}_i \bar{A} = \sum$  ヲ得ラレル表現 (之ハ  $\bar{A} \bar{e}_i$  ヲ表現加群トス  
ル表現ト同値) ヲ  $F_i$

デ表ハス。然ラバ

$$Ae_i \cong Ae_j \Leftrightarrow \bar{A} \bar{e}_i \cong \bar{A} \bar{e}_j \Leftrightarrow \bar{e}_i \bar{A} \cong \bar{e}_j \bar{A} \Leftrightarrow e_i A \cong e_j A$$

( $\Leftrightarrow$  ハ両命題が同値ナルコトヲ示ス)

デアルカラ (Nakayama: Some studies on regular  
representations, induced representations and  
modular representations, Ann. of Math. 39)  
 $U_i, V_i, F_i$  ノ中同値デナイモノヲ標出シテソレヲ  $U_i,$   
 $V_i, F_i, i=1, 2, \dots, t$  トスルコトが出来ル。

定理2:  $L$  ヲ  $A$  ノ一ツノ表現トシ、 $F_\lambda$  ノ  $L$  = 於ケ  
ル multiplicity ( $L$  ヲ auflösen シタトキ、  
対角線上 = 現ハレル既約表現ノ中  $F_\lambda$  = 同値ナルモノノ個  
数) ヲ  $h_\lambda$  トスルトキ

$$h_\lambda \gamma_\lambda = I(L, V_\lambda) = I(U_\lambda, L)$$

ナル関係ガアル。但シ  $\gamma_\lambda = \text{rank of } \bar{e}_\lambda \bar{A} \bar{e}_\lambda$

証明: 補助定理1 = ヲリ  $B(e_\lambda)$  ノ階数ヲ調べバ

ヨイ。

$$\mathcal{L} \cong \begin{pmatrix} & \mathcal{F}_\lambda & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & & & \mathcal{F}_\lambda \\ & & & \end{pmatrix}$$

$\bar{A} \bar{e}_\lambda$  , Automorphismenkörper  $\bar{e}_\lambda \bar{A} \bar{e}_\lambda =$  於ケル表現デハ

$$e_\lambda \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

デアルカラ、 $\mathcal{F}_\lambda$  ナル表現デハ

$$e_\lambda \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & E_{r_\lambda} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad E_{r_\lambda} \text{ ハ } r_\lambda \text{ 次, 単位行列}$$

デアル。 $\mathcal{F}_\lambda$  ト同値デナイ既約表現  $\mathcal{F}_\mu$  ( $\mu \neq \lambda$ ) = テハ、  
 $e_\lambda$  ハ 0 = ウツルカラ、 $B(e_\lambda)$  ノ 對角線上 = アル / ノ 個  
 数ハ  $h_\lambda r_\lambda$  デ、也ノ 對角線上ノ 元素ハ 0 デアル。

即チ  $B(e_\lambda)$  ノ 零ナラザル characteristic roots ノ  
 個数ハ  $h_\lambda r_\lambda$  デアル。  $e_\lambda$  ガ 冪等元故  $B(e_\lambda)^2 = B(e_\lambda)$ 、  
 従ツテ  $B(e_\lambda)$  ノ Elementarteiler ハ linear デアルカ  
 ラ、上記  $h_\lambda r_\lambda$  ガ丁度  $B(e_\lambda)$  ノ 階数デアル。

系  $K$  ガ 代数的閉体デアレバ

$$h_\lambda = I(\mathcal{L}, \nu_\lambda) = I(\mathcal{U}_\lambda, \mathcal{L})$$

(Brauer) 定理: Nesbitt. loc. cit. Theorem 5)

次 =

$u_i = \text{於ケル } \mathcal{F}_j, \text{ multiplicity } \gamma \tilde{c}_{ji}$

$v_i = \text{於ケル } \mathcal{F}_j, \text{ multiplicity } \gamma c_{ji}$

トスルト、上ノ定理ニヨリ

$$\gamma_j c_{ji} = I(v_i, v_j) = I(u_j, v_i) = \gamma_i \tilde{c}_{ij}$$

即チ

$$\text{定理 3. } \gamma_j c_{ji} = \gamma_i \tilde{c}_{ij}$$

(Nakayama. loc. cit. Theorem 3)

更ニ  $u_\lambda, v_\lambda$  ノ次数ヲ  $u_\lambda, v_\lambda$  トスルト定理 1 ヨリ

$$u_\lambda = I(u_\lambda, \gamma) = I(\gamma, v_\lambda)$$

$$v_\lambda = I(v_\lambda, \gamma) = I(\mathcal{R}, v_\lambda)$$

(第一ノ等式ハ補助定理 1 ニヨル)

ヨツテ定理 2 カラ、次ノ

定理 4.  $\mathcal{F}_\lambda$  ノ  $\mathcal{R}$  = 於ケル multiplicity ハ  $v_\lambda / \gamma_\lambda$

$\mathcal{F}_\lambda$  ノ  $\gamma$  = 於ケル multiplicity ハ  $u_\lambda / \gamma_\lambda$

デアル。

ヲ得ル、之ハ  $K$  が代数的圓体ナルトキノ Keshitt が上記論文ニ述ベテキル事柄デアル。

次ニ、 $A$  ヲ含ム  $K$  ノ上ノ多元環  $A^*$  ヲ考ヘ、之ヲ前同様直既約ノ左イデヤルノ直和ニ分解スル。但シ  $A, A^*$  ノ主單位元ハ相等シク / トスル。

$$A^* = A^* e_1^* + \dots + A^* e_s^*, \quad \sum e_i^* = 1$$

$A^* e_i^*$  ヲ  $A$  ノ左表現加群ト考ヘテ得ル  $A$  ノ表現ヲ  $\mathcal{L}_i$  トシ、

$\mathcal{L}_i = \text{於ケル } \mathcal{F}_\lambda, \text{ multiplicity } \gamma b_{\lambda i}$  トスル、又

$e_\lambda A^* = \text{ヨル } A^* \text{ の表現 } \mathcal{L}_\lambda^* = \text{於ケル } \mathcal{F}_q^* (A^*, \text{根基 } \mathcal{N}^* \text{ トシタ トキ、} A^* e_q^* / \mathcal{N}^* e_q^* \text{ が表現加群トシテ得ラレル } A^* \text{ の既約表現) の multiplicity が } \tilde{a}_{q,\lambda} \text{ トスル。}$

然ラバ

定理 5.  $\gamma_\lambda b_{\lambda,q} = \gamma_q^* \tilde{a}_{q,\lambda}$ ,  $\gamma_q^* = \text{rank of } \bar{e}_q^* A^* \bar{e}_q^*$  が成立スル。コレハ中山氏前掲論文ニテ Frobenius の induced character = 關スル定理ノ擴張ト呼バレテキル定理デアアル。

証明定理 2 ニヨリ

$$\gamma_\lambda b_{\lambda,q} = I(\mathcal{L}_q, \mathcal{V}_\lambda)$$

$$\gamma_q^* \tilde{a}_{q,\lambda} = I(\mathcal{L}_\lambda^*, \mathcal{V}_q^*) = I(\mathcal{U}_q^*, \mathcal{L}_\lambda^*)$$

但シ、 $\mathcal{V}_q^*$ ,  $\mathcal{U}_q^*$  ハ夫々  $A^* e_q^*$ ,  $e_q^* A^*$  が表現加群トシテ得ラレル  $A^*$  の直既約表現トスル。

處テ

$$I(\mathcal{L}_q, \mathcal{V}_\lambda) = \text{rank of } e_\lambda A^* e_q^*$$

$$I(\mathcal{U}_q^*, \mathcal{L}_\lambda^*) = \text{rank of } e_\lambda A^* e_q^*$$

デアアルカラ、定理が成立スル。

次ニ、元ニ於ツテ  $A = \text{ツイテ考ヘル。} d \text{ が } A \text{ ノ一ツノ元トシ、} Ad = \text{ヨル } A \text{ ノ表現ヲ } \mathcal{V}^d, dA = \text{ヨル } A \text{ ノ表現ヲ } \mathcal{V}^{d*} \text{ トシ、} R, \mathcal{V} \text{ ナル表現ニ際シテ}$

$$d \rightarrow R(d), \quad d \rightarrow S(d)$$

トスル。然ラバ

補助定理 2. degree of  $\mathcal{V} = \text{rank of } R(d)$

degree of  $\psi^* = \text{rank of } S(d)$

従って Frobenius algebra ( $\mathcal{R}, \gamma$  が同値) デハ、 $\psi, \psi^*$  の次数ハ相等シイ。

スベテ、 $\lambda = \text{對シ } U_\lambda \cong V_\lambda$  ナル必要十分條件が求メラレテキル今日 (Nakayama and Nesbitt, Note on symmetric algebra, Ann. of Math. 39) symmetric algebra が merhly symmetric ナルコトノ別証明ハ、ツマラスカモ知レマセンガコノ際ハ比較的簡單ニ証明サレマスノデ、叙述ヲ稍ニ一般ニシテ述ベテミマス。

定理 6.  $\mathcal{R}, \gamma$  ナル同一ノ基ニヨリ定義サレタ第一、第二正規表現トスル。モシ  $\mathcal{R}T = T\gamma, \mathcal{R}T' = T'\gamma, |T| \neq 0$  ナル行列  $T$  が存在スレバ  $d$  ナ  $A$  ノ任意ノ元トスルトキ、 $Ad, dA$  ナ表現加群トシテ得ラレル  $A$  ノ表現  $\psi, \psi^*$  ハ同値デアアル。

証明: コノ時  $A$  ハ Frobenius ナル故補助定理 2 ニヨリ  $\psi, \psi^*$  の次数ハ相等シイ。今ソレヲ  $\mu$  トスル。  $\mathcal{R}, \gamma$  ナル  $A$  ノ基ヲ  $u_1, \dots, u_n$  トシ

$$(u_1, \dots, u_n) = (u_1^*, \dots, u_n^*)T, \quad |T| \neq 0$$

ニヨリ  $u_1^*, \dots, u_n^*$  ナル。然ラバ定理ノ仮定カラ基  $u_1^*, \dots, u_n^*$  ナル採用シタ時、 $A$  ノ第一、第二正規表現ハ  $T$  度  $\gamma, \mathcal{R}$  トナルコトガナル。アルーツノ基ニヨリ得ラレタ  $\mathcal{R}, \gamma$  ニツイテ定理ノ條件ヲ満足スル知キ  $T$  が存在スレバ、他ノ基ニヨリ得ラレタ第一、第二正規表現  $\bar{\mathcal{R}}, \bar{\gamma}$  ニ對シテモ、同様ナル行列  $\bar{T}$  が存在スル。

従って、今

$$Ad = u_1 K + \dots + u_m K$$

とル如ク  $u_1, \dots, u_m$  が選バレテキルトシテ差支ヘナイ。

然ラバスベテ  $i = 1, \dots, m$  對シ  $u_i d \in Ad$  ナル故

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} d = R(d) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad R(d) = (D, 0),$$

$D$ ,  $m$  階数  $m$  ナル  $(m, m)$  型ノ行列

トナル。

$$\text{所テ } d(u_1^* \dots u_m^*) = (u_1^* \dots u_m^*) R(d)$$

ナアルカラ、 $du_1^*, \dots, du_m^*$  ハ  $K$  内シ一次独立ナル  $m$  個ナルベシトナル。

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{pmatrix} a = S(a) \begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{pmatrix}, \quad a \in A$$

ニテ、 $u_i$  ナル基ノ選ビ方ニヨリ  $S(a) = \begin{pmatrix} D(a) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ ,

$D(a) \in \mathfrak{g}$  ナルコトニ注意シ、上式ニ左ヨリ  $d$  ヲ乗ズレバ

$$\begin{pmatrix} du_1^* \\ \vdots \\ du_m^* \end{pmatrix} a = D(a) \begin{pmatrix} du_1^* \\ \vdots \\ du_m^* \end{pmatrix}, \quad D(a) \in \mathfrak{g}$$

トナル。 $du_1^*, \dots, du_m^*$  ハ明ニ  $dA$  ノ一ツノ基ヲナスカラ  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$  が成立スル。

系. symmetric algebra (本定理ニ云フ  $T$  が symmetric matrix ナル場合) ニテハ  $\mathcal{U}_\lambda \cong \mathcal{V}_\lambda$  ナル。

(注意) weakly symmetric algebra ならば、必ずしも  $\mathcal{U} \cong \mathcal{U}^*$  が成立しない。

例へば、上記 Nakayama, Nesbitt 両氏、論文所載、第一例 =  $d = a_1 + a_2 + a_3$  とおけば  $\alpha^2 + \beta^2$  により  $\mathcal{U}$  と  $\mathcal{U}^*$  とは同値でない。