



Title	可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スルMarkov過程 (1)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 172, p. 11-19
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74693
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

763. 可附添無限個ノ可能ナ状態ニ関スル
Markov過程(1)

古 田 耕 作 (阪大)

n 個ノ点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ガ或確率ノ法則ニ從ツテ互ニ遷移スルトスル。点 x_i ガ單位時間ノ後ニ点 x_j ニ移ル確率ヲ p_{ij} トスレバ

$$(1) \quad p_{ij} \geq 0 \quad \text{且} \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

である。今コノ法則ニ次ノ假定ヲ設ケル。即チ i) p_{ij} ハ運動点ガ x_i = 來ル前ニ何處ニアツタカト云フコトニ無關係デアリ又 ii) p_{ij} ハ時間ノ経過ニモ無關係デアルトスルヲ
 である。斯ル確率運動ヲ homogeneous⁽¹⁾ + Markov 過程ト呼ブ。コノ時点 x_i ガ m 單位時間ノ後ニ点 x_j = 移ル確率 $p_{ij}^{(m)}$ ハ

$$(2) \quad p_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^n p_{ik} p_{kj}^{(m-1)} \quad (p_{ij}^{(1)} = p_{ij})$$

ニヨツテ與ヘラレル譯である。

n = 有限 + 場合ニハ此ノ過程ノ $m \rightarrow \infty$ ニ於ケル漸近的ナ性質ハ相當精シク研究サレテアル。 n = 有限ガカラ 遷移確率行列 $P = \| p_{ij} \|$ ガ完全連結ノ線型作用素ニナルト云フコトガ利イテ來ル譯デアリマス。⁽²⁾

最近 A. Kolmogoroff⁽³⁾ ハ $n = +\infty$ ノ場合ヲ研究シテ相當精シイコトヲ出シテアリマス。intrinsic + 條件 (1) ノ以外ニ何モ假定セズニ取扱ツテルコトハ注目ニ値シマス。残念ナコトニハ上ノ論文ハ証明ノ (寧ロ結果ノ) 荒筋シカ述ベテナイノデ之ヲ述レマセン。此ノ頃 Kolmogoroff ハ

(1) 空間 = 對シテモ時間 = 對シテモ homogeneous

(2) 筆者談話 716 “確率論ハノ積分方程式ノ應用” § 97 参照セラレタシ。

(3) Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen: Rec. Math. 14, 4 (1936), p. 606

精シイ証明ヲ出シマシタガ何カ露西亞語ナノデ當ガ立チマセ
ン。ソコデ色々考ヘテミタラ直接証明出來ル様マスカラ之ヲ
述ベテミマセヨ。⁽¹⁾

角谷君ハ *mean sojourn* ノ存在丈ナラバ *Birkhoff*
ノ *ergodic theorem* = *reduce* シテ証明出來ルコトヲ
注意サレマシタ。尚角谷君ガ熱心 = *discussion* シテ下サツ
タコトヲ感謝致シマス。

§1. *Mean sojourn* ノ存在

先ツ (1), (2) ヨリ全テノ m = 對シテ

$$(3) \quad p_{ij}^{(m)} \geq 0 \quad \text{且ツ} \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^{(m)} = 1$$

($i, j = 1, 2, \dots$)

ハ明カ。 $q_{ij}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m p_{ij}^{(k)}$ トナリ。

定理 I 全テノ i, j = 對シ *mean sojourn* $\lim_{m \rightarrow \infty} q_{ij}^{(m)}$

= K_{ij} ガ存在シ

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} \leq 1$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} K_{kj} = \sum_{k=1}^{\infty} K_{ik} p_{kj} = \sum_{k=1}^{\infty} K_{ik} K_{kj} = K_{ij}$$

証明: 任意ノ正整数列 $\{n\}$ カラ適當ニ部分列 $\{n'\}$

- (1) *Continuous case* = 於ケル *W. Doeblin* ノ結果ノ積分方
程式取扱ヒ(筆者談話746) ト比較シテ頂キタイ。

ヲ擇ベバ $\lim_{n' \rightarrow \infty} q_{ij}^{(n')} = p_{ij}^{(\infty)}$ カ全テノ i, j = 對シテ存

在シ且ツ $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^{(\infty)} \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots$). コレハ (3)

及ビ對角線論法ヲ得ラレル。コノ $p_{ij}^{(\infty)}$ = 對シ

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(\infty)} = p_{ij}^{(\infty)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} p_{kj}^{(n)} = p_{ij}^{(\infty)} \quad (n = 1, 2, \dots, +\infty)$$

ガ成立ツ。先ツ

$$(6) \text{ノ証} \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} q_{kj}^{(n')} - q_{ij}^{(n')} = \frac{1}{n'} \left\{ p_{ij}^{(n'+1)} - p_{ij}^{(n')} \right\} \rightarrow 0$$

$$\text{as } n' \rightarrow \infty \text{ カラ } \lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} q_{kj}^{(n')} = p_{ij}^{(\infty)}. \text{ 所ガ } \sum_{k=1}^{\infty} |p_{ik}| = 1$$

及ビ $0 \leq q_{kj}^{(n')} \leq 1$ カラ 明カニ

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} q_{kj}^{(n')} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} \left(\lim_{n' \rightarrow \infty} q_{kj}^{(n')} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} p_{kj}^{(\infty)}.$$

$$(7) \text{ノ証} \quad \text{上ト同様ニシテ } \lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}^{(n')} p_{kj}^{(\infty)} = p_{ij}^{(\infty)}.$$

p, q 全テ ≥ 0 カカラ任意ノ $t < +\infty$ = 對シテ

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^t q_{ik}^{(n')} p_{kj}^{(\infty)} = \sum_{k=1}^t p_{ik}^{(\infty)} p_{kj}^{(\infty)} \leq p_{ij}^{(\infty)}. \text{ 從ツテ}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} p_{kj}^{(\infty)} \leq p_{ij}^{(\infty)}. \text{ 此ノ最後ノ式ニ於テ或 } i, j \text{ = 對}$$

シ實際 = 不等式が成立ツトスレバ、両辺ヲ $j = \forall$ キ sum シ

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_{kj} \right) < \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^{(\infty)} \quad \text{ヲ得テ (3) = 矛盾スル。}$$

斯クテ (7) ハ $m=1, 2, \dots$ / トキ証明サレタ。之ヨリ

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} q_{kj}^{(n')} = p_{ij}^{(\infty)}. \quad \text{故ニ } n' \rightarrow \infty \text{ ナラシメテ (6) / ト}$$

$$\text{キト同ジ様ニシテ } \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} p_{kj}^{(\infty)} = p_{ij}^{(\infty)} \quad \text{ヲ得ル。}$$

惜 $\{n'\}$ ト相異ル $\{n''\}$ = 對シテ $\gamma_{ij}^{(\infty)} = \lim_{n'' \rightarrow \infty} q_{ij}^{(n'')}$ が得ラレタトスル。コノトキ全テノ i, j = 對シテ $\gamma_{ij}^{(\infty)} \geq p_{ij}^{(\infty)}$ が成立ツコトが云へレバ定理ノ証明ハ終ル訳ニナル。議論ガ

γ, p = 對シテ symmetric ナカラ

所ガ $m = \infty$ = 於ケル (7) ヲ得タト同様ニシテ

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} \gamma_{kj}^{(\infty)} = p_{ij}^{(\infty)}. \quad \text{又 } \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} \gamma_{kj}^{(\infty)} = \gamma_{ij}^{(\infty)}$$

$$(6) \text{ カラ } \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}^{(n')} \gamma_{kj}^{(\infty)} = \gamma_{ij}^{(\infty)}. \quad \gamma, q \text{ 全テ } \geq 0$$

ナカラ任意ノ t = 對シ、

$$\gamma_{ij}^{(\infty)} = \lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}^{(n')} \gamma_{kj}^{(\infty)} \geq \lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^t q_{ik}^{(n')} \gamma_{kj}^{(\infty)} = \sum_{k=1}^t p_{ik}^{(\infty)} \gamma_{kj}^{(\infty)}.$$

$$\text{從ツテ } \gamma_{ij}^{(\infty)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(\infty)} \gamma_{kj}^{(\infty)} = p_{ij}^{(\infty)} \quad \text{ヲ得ル。} \quad \text{—以上—}$$

§2. 定理1ノ應用

Lemma I i ノ 隣ヘタトキ $K_{ij} > 0$ ナル如キ x_j

ノ 集合ヲ A_i トスレバ, $x_k \in A_i$ ノ トナ

$$(8) \sum_{x_j \in A_i} p_{kj}^{(m)} = \sum_{x_j \in A_i} K_{kj} = j \quad (m=1, 2, \dots)$$

証明. (5) ヨリ $\sum_{x_k \in A_i} K_{ik} \left(\sum_{x_j \in A_i} p_{kj}^{(m)} \right) = \sum_{x_j \in A_i} K_{ij}.$

然シテ $0 \leq \sum_{x_j \in A_i} p_{kj}^{(m)} \leq 1$ ナカラ (8) ヲ得ル (但シ $p_{kj}^{(\infty)} = K_{kj}$

トスル。 — 以上 —

今一般ニ $p_{xt}^{(m)} > 0$ ナル如キ m ノ 存在スルトキ

$x_b \rightarrow x_t$ ト書ク。

A_i ノ 分解 $A_i = \sum_{\alpha} A_i^{(\alpha)}$ ト可附番個 = 分解シ

i) $x \in A_i, y \in A_i$ ナラ $x \rightarrow y$

ii) $x \in A_i^{(\alpha)}, y \in A_i^{(\beta)}$ ナラ $x \rightarrow y$

iii) $x_t, x_b \in A_i^{(\alpha)}$ ナラ $x_t \rightarrow x_b$ 且ツ 全テ, $m (m=\infty$

$$x \in A_i) = \text{對シ} \sum_{x_b \in A_i^{(\alpha)}} p_{tb}^{(m)} = 1$$

証明: i) ハ (8) ヨリ明カ. 任意ノ $x_b \in A_i$ = 對シテ

$x \in A_i$ が存在シタ $\rightarrow x_b$. 何者, $\sum_{x_j \in A_i} K_{ij} \cdot p_{jb} = K_{ib} > 0$

カラ明カ. 今 $x_t \rightarrow x_b$ トシ, 且ツ $x_t \rightarrow y$ ナル如キ y ノ 集

合ヲ A_{it} トヲケバ上カラ $x_b \in A_{it} \subset A_i$. コノ A_{it} ガ x_b ヲ

含ム或ル $A_i^{(\alpha)}$ ナアル。

以下其証明: $A_i - A_{it} = B$ トヲク, $x \in A_{it}$, $y \in B$
 ナラ $x \rightarrow y$ デアルが逆 $= y \rightarrow x$ ノ 成立ツコト即チ A_i
 が $A_{it} + B$ ト 完全 = 分解 スルコトがワカル。何者, $x_l \in B$

$$\text{トスレバ } \sum_{x_j \in B} K_{ij} p_{jl} = K_{il}, \text{ 従ツテ } \sum_{x_j \in B} K_{ij} \left(\sum_{x_l \in B} p_{jl} \right) =$$

$$\sum_{x_l \in B} K_{il}. \text{ 所が } 0 \leq \sum_{x_l \in B} p_{jl} \leq 1 \text{ ナカラ } \sum_{x_l \in B} p_{jl} = 1 (x_j \in B)$$

トナラナケレバナラヌカラ。次 $x_l \in A_{it}$ トシ $x_l \rightarrow y$
 ナル如キ y 全体ノ 集合ヲ A_{itl} トスルト $A_{itl} \subseteq A_{it}$ デアル
 が $A_{itl} = A_{it}$ トナラナケレバナラヌ。若シ然ラズトスレ
 バ, 上ト同様ニシテ, A_{it} が 完全 = 分解 スルコトニナツテ
 矛盾ナカラ。即チ任意ノ $x_l \in A_i$ ハ或ル $A_{it} \subseteq A_i =$ 合マレ
 且ツ A_{it} ハ 全テノ $x_l \in A_{it} =$ 對シ $A_{itl} = A_{it}$. 之レト
 (8) カラ A_{it} がアル $A_i^{(d)}$ = ナルコトが分々タ。

— 以上 —

上ノ如クニシテ得ラレル $A_i^{(d)}$ ノ如キモ、ヲ final set
 ト呼ブ。

final set ノ性質 E_α ヲ final set トスル。

$$x_k \in E_\alpha \text{ ナラ } \sum_{x_j \in E_\alpha} p_{kj}^{(m)} = 1 \quad (m = 1, 2, \dots, +\infty) \text{ ナ}$$

$$x, y \in E_\alpha \text{ ナラ } x \rightarrow y,$$

x_i カラ 出発シテ A_i ヲ 定義シ之カラ final sets $A_i^{(u)}$
 が得ラレタ。 x_i ノ トリ方ニヨツテ 色々ナ final sets が
 得ラレルガ, 上ノ性質カラニツノ final sets ハ 全ク一致

スルカ全ク離レテヲル。故ニ $R = (x_1, x_2, \dots)$ ハ
商々可附番個ノ *final sets* E_α ト残リノ D トニ分レル:

$$R = \sum_{\alpha} E_{\alpha} + D.$$

D テ *dissipative set* ト呼ブ。

Dノ性質 D ハモハヤ *final sets* ヲ含マヌカラ

$x_j \in D$ ナラバ、任意ノ x_i = 對シテ $K_{ij} = 0$ 。

§3. Lemma 2 及び其應用

$R = S + T$ (S 及 T モ空集合デナイ) ト適當ニ分レ
バ、 $x \rightarrow y$ iff $x \in S, y \in T$ トナルトキ R テ reducible
ト呼ブ。然ラザルトキハ *irreducible*。

Lemma 2 R が *irreducible* ナラバ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i p_{ij} = \xi_j \quad (j=1, 2, \dots), \quad 0 < \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < +\infty$$

ナル如キ実数 ξ ハ全テ ≥ 0 スルハ全テ ≤ 0

証明: $\xi_i > 0$ ナル i ノ集合ヲ P , $\xi_i < 0$ ナル i ノ
集合ヲ N トシ、各々空集合ナラズトシテ示出ス。即チ

$$\sum_{i \in P} \xi_i \left(\sum_{j \in P} p_{ij} \right) + \sum_{i \in N} \xi_i \left(\sum_{j \in P} p_{ij} \right) = \sum_{j \in P} \xi_j \quad \text{及} \quad 0 \leq \sum_{j \in P} p_{ij} \leq 1$$

ナラ

$$\sum_{j \in P} p_{ij} = 1 \quad \text{for } i \in P, \quad \sum_{j \in P} p_{ij} = 0 \quad \text{for } i \in N$$

之ハ R ノ *irreducibility* = 及スル。

—以上—

final set / ergodicity $E_\alpha \neq \text{final set}$

トスル。final set の性質ト (5) = ヲリ, $x_i \in E_\alpha$ ナラバ

$$\sum_{x_j \in E_\alpha} K_{ij} = 1, \sum_{x_j \in E_\alpha} K_{ij} p_{jkl} = K_{il} \text{ for } x_l \in E_\alpha.$$

final set の明カ = irreducible ナカラ Lemma

2 = ヲリ, $K_{ij} \cdot (x_j \in E_\alpha) \wedge i(x_i \in E_\alpha) = \text{無関係}$ ナ

ナケレバナラス。即チ $K_{ij} = K_j$ 。

dissipative set ヲリ final set $x_i \in D,$

$x_j \in E_\alpha$ トスル。

$$K_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} K_{ik} K_{kj} \text{ ハ } D \text{ の性質及ビ final set の性質 ヲリ}$$

$$K_{ij} = \sum_{x_k \in E_\alpha} K_{ik} K_{kj} \text{ ト書ケル訣ナルカラ,}$$

$$K_{ij} = K_j \sum_{x_k \in E_\alpha} K_{ik}$$

此ナハ final set 中ノ運動ヲ調べヌ。