



| | |
|--------------|---|
| Title | 確率法則ノ分解問題, VIII |
| Author(s) | 北川, 敏男 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1939, 172, p. 19-24 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74694 |
| rights | |
| Note | |

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

764. 確率法則 / 分解問題, VIII

北川 敏男 (阪大)

§9. $\mathbb{K}_p^{\text{fin}}(\mathcal{L})$ = 於ケル \mathcal{L} / 分解問題 VI 及
VII = 於テ述ベタ安定 + 確率法則 / 概念 / 当然 + γ /
基底トシテ Lévy ハ 半安定 + (semi-stable) 確率

法則⁽¹⁾ トイフ概念ヲ導入シタ。茲デハコレヲ或 特殊領域
 = 於ケル分解問題 トシテ眺メテ見ヨット思フ。

ソノタメ次ノ様ナ準備ヲスル。函数 $\rho(x, y)$ ハ次ノ様
 ナ三性質ヲモツトスル:

(i) $\rho(x, y)$ ハ, $x > 0, y > 0$ =テ定義セラレ、各
 変数ニ関シテ純單調増加デアアル。

(ii) $x > 0 (y > 0)$ ナラバ $\rho(x, y) > y (\rho(x, y) > x)$

(iii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, 即チ對稱。

カナル ρ = 関シテ次ノ様ナ 正数ノ集合ヲ導入スル:

$\mathcal{M}(a_1, a_2; \rho)$: コレハ豫メ與ヘラレタニツノ正
 数 a_1, a_2 並ビニ上述ノ如キ函数 ρ = 関シテ、次ノ如ク定
 義サレル正数全体ノ集合デアアル。

(i) $a_i \in \mathcal{M}(a_1, a_2; \rho) \quad (i=1, 2)$

(ii) $b \in \mathcal{M}(a_1, a_2; \rho)$ ナラバ

$\rho(b, a_i) \in \mathcal{M}(a_1, a_2; \rho) \quad (i=1, 2)$

次ニ或ル任意ノ確率法則 \mathcal{L} ト上述ノ正数ノ集合 $\mathcal{M}(a_1, a_2; \rho)$ トニ関シテ 確率法則ノ集合 $K_{\rho}^{*2}[\mathcal{L}]$ ヲ定義スル:

$K_{\rho}^{*2}[\mathcal{L}]$: 確率法則 $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1$ = 對應スル分布函数ヲ
 夫々 $F(x), F_1(x)$ トスル。 $F_1(x) = F(bx)$, 但シ
 $b \in \mathcal{M}(a_1, a_2; \rho)$ トナルニツナ \mathcal{L}_1 ノ全体ノ集合 (場
 合ニ依ツテハソノ様ナ $F_1(x)$ 全体ノ集合ト云ツテモ間違ヲ
 生ズル心配ハナイ) ナラバ $K_{\rho}^{*2}[\mathcal{L}]$ ヲ表ハスコトニスル。

茲ニ * ヲツケタノハ、前回並ビ前々回 $K[\mathcal{L}] =$ 對シテ

(1) Lévy, 書: 558 lois semi-stables (p. 204-208)

$\mathbb{K}^*[L]$ を考へた如く homogeneous linear transformation = 限ルコトヲ示シ、又 ρ ト Z トハ二変数ノ函数 ρ ヲ基礎 = トルコトヲ示ス、デアアル。勿論 a_1, a_2 ヲ限ハテ始メテ $\textcircled{2}$ - 集合ハ確定スルノデアアルが便宜上コレヲ書クコトハ省略シタ。

以上ノ定義カラ明カニ (VI 及ビ VII 参照)

$$(1) \mathbb{K}_\rho^{*2}[L] \subset \mathbb{K}^*[L] \subset \mathbb{K}[L]$$

以上ノ考ヘヲ拡張シテ、二変数ノ函数 $\rho(x, y)$ 、正数ノ集合 $\textcircled{2}(a_1, a_2; \rho)$ 及ビ $\mathbb{K}_\rho^{*2}[L]$ ノ代リニ、夫々

$$(2) \begin{cases} \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) & n \text{ 変数ノ函数} \\ \textcircled{2}(a_1, a_2, \dots, a_n; \rho) & \text{正数ノ集合} \\ \mathbb{K}_\rho^{*n}[L] & \text{確率法則ノ集合} \end{cases}$$

ヲ導入スルコトガ出来ル。ソノ方法ハコゝニ繰返シ述ベル必要ハナカロウ。

サテ吾々ハ $\mathbb{K}_\rho^{*2}[L]$ = 於ケル L ノ分解問題ト云フニ考ヘテ見ヨウ。

X_1, X_2 ハ相互ニ独立ナリ且ツ共ニ同ジ L ヲ確率法則ニモツ確率変数トスル。然ルトキニ X_1, X_2 ハリ L ヲ確率法則ニモツ確率変数 X ヲ適當ニトシ

$$(3) a_1 X_1 + a_2 X_2 = \rho(a_1, a_2) X$$

ナル関係ガ成立ツト假定シヨウ。シカラバカナル L 従ツテソノ分布函数 $F(x)$ (或ハ特性函数 $f(t)$ ナモヨイガ) ハ如何ナル形ノモノカト云フ問題ガ起ルデアロウ。

コノ問題ハ少シ考ヘテ見レバ容易ニ余レヌウニ、函数 ρ 、

正数 a_1, a_2 が豫メ與ヘラレタトキ) $\mathbb{K}_\rho^{*2}(\mathcal{L})$ が分解可能
 デアル様ナ \mathcal{L} ハ如何ナルモノカト云フ問題 = ナルノデアアル。

同様 = シテ $\mathbb{K}_\rho^{*n}(\mathcal{L})$ = 於ケル分解問題 = 問シテハ

$$(4) \quad a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \\
 = \rho(a_1, a_2, \dots, a_n) X$$

ナル確率変数間ノ関係 = 依ツテ規定セラレル \mathcal{L} が問題 = ナ
 ルデアロウ。茲 = 勿論 X_1, X_2, \dots, X_n ハ相互 = 独立
 デ且ツ、各々ハ X ト同ジク、同ジ \mathcal{L} ナル確率法則 = 従フ確
 率変数デアルトスル事ハ言フ迄ニナイ。

VI 及ビ VII デ論ヅタ $\mathbb{K}^*(\mathcal{L})$ = 於ケル分解問題 = 於テ
 ハ、 a_1, a_2 ハ任意ノ正数ヲ動キ得ルトシテ (3) フ解イタノ
 デアルガ、 $\mathbb{K}_\rho^{*2}(\mathcal{L})$ デ意味スル (3) ノ a_1, a_2 ハ豫メ與ヘ
 ラレタ只一組ノ値シカ意味シナイノデアアル。一般 = $\mathbb{K}_\rho^{*n}(\mathcal{L})$
 = 於テモ a_1, a_2, \dots, a_n ハ同様 = 與ヘラレタ只一組 = 限
 レノデアアル。

$\mathbb{K}_\rho^{*n}(\mathcal{L})$ = 於ケル分解問題ハ未ダ全面的ナ解決 = 到達
 シテ居ラナイ様デアアル。

ソコデ此処 = ハ、コノ問題ヘノ一ツノ 部分的ナ解答 フ與
 ヘルモノトシテ 半安定ナ確率法則 フ簡單 = 述べル = 止メ
 コウ:

特性函数ノ對數 $\psi(t)$ が或ルーツノ g ($g \neq 0, 1$)
 = 對シテ

$$(5) \quad \psi(tg) = g^t \psi(t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

ヲ満足スルトキ、カ>ル特性函数ヲ確率法則 = スルモノヲ

半安定 + リ トイフ。 $q > 1$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。ソノ
トキ必然的 = $\alpha > 0$ トナル。

$$(6) \quad Q = q^\alpha$$

ト置ク。

[1] 今若シモ

$$(7) \quad Q^{-m} + Q^{-m'} = 1$$

トナル様ナ整数 m, m' ガアルヲバ

$$(8) \quad \psi(tq^{-m}) + \psi(tq^{-m'}) = (Q^{-m} + Q^{-m'})\psi(t) = \psi(t)$$

トナル。即チ

$$(9) \quad q^{-m} = a_1, \quad q^{-m'} = a_2, \quad \rho(a_1, a_2) = 1$$

トナクヲバ $\exp \psi(t) \equiv f(t)$ = 関シテハ

$$(10) \quad f(a_1 t) f(a_2 t) = f(\rho(a_1, a_2) t)$$

トナル。サテ (10) ハ (3) ト同シ内容ナル。

[2] 次 = 若シモ

$$(11) \quad Q^{-m_1} + Q^{-m_2} + \dots + Q^{-m_n} = 1$$

ナル様ナ整数 (m_1, m_2, \dots, m_n) ガアルバ, 全ク同様 =

シテ (4) ト同シ内容ナル

$$(12) \quad f(a_1 t) f(a_2 t) \dots f(a_n t) \\ = f(\rho(a_1, a_2, \dots, a_n) t)$$

= 到達スルコトヲ見ルノナル。但シ茲 =

$$(13) \quad q^{-m_i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \rho(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$$

ソコデ函数方程式 (5) ヲ解クコトガ吾々ノ問題解決ノ

タメノ 一ツノ示唆 ヲ與ヘル事 = ナルノヲ見ル。

函数方程式(5)ノ解法: 無限 = 分解可能ナ確率法

則ノ概念が如何 = 有力ナモノデアルカ、又確率法則ノ分解ト
イフ一見代数的ナ問題が如何 = 深ク確率変数列ノ *Limit*
process = 関係シテクルカ —— 何レモ既ニ屢々見タ所デア
アルカ —— フ例示スル意味 = 於テ函数方程式(5)ノ解法
(*Lévy loc. cit.*)ハ誠ニ興味深イ。今回ハ問題ノ説明
ヲ主眼トシタシ、以下ノ議論ニ引用シナイ結果デアモアルカラ、
コトニ紹介スルコトハ止メルコトニスル。