



Title	Banach空間ニ於ケルpositive operation III
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 172, p. 24-30
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74695
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

765. Banach 空間 = 於ケル positive Operation III

角 谷 静 夫 (阪大)

I = 於テハ positive operation / 固有値 / 存在 =
關スル Putmann / 結果ヲ Schauder / 不動点定
理ヲ用ヒズ = 証明シタ。証明ハ Putmann / ソレヨリモ
簡單デアルガ normト semi-order ト / 關係 = 對シテ
假定 (I) ヲオイタ。

コノ假定ハ大概ノ場合 = 満足サレテキルカラ、コレデモ十分
ナノデアルガ、出来レバコノ假定ヲ除キタイノデアアル。實際
Putmann / 証明方法 = ヨレバ (I) ハ不要デアルカラ、
Putmann / 証明ハ少々複雑デアツテモ結果ハ大イ = ヨ

イワケデアル。然ル = Rutmann ノ論文ハ單ニ定理トソ
 レヲ証明スルニ要スル lemma トヲ書イテアルガケデアル
 カラ、Rutmann ノ証明ヲソノマニ追ルコトハ出来ナイ。
 次ニ、大体 Rutmann ノ考ヘニ從ツテ、定理ノ証明ヲ與
 ヘル。Rutmann ガ果シテコノ通り考ヘタカドウカハ疑
 問デアルガ、大体コノヤウニ考ヘタコトハ明カデアリ、又實
 際コレニヨツテ (I) ノ必要トシナイ定理ノ証明が得ヲレル。
 先ヅ定理ヲ再ビ記サウ。

定理 1'. E ヲ semi-order ノアル Banach
 空間、 T ヲ E 中ヘウツス positive, com-
 pletely continuous + linear operator ト
 スル。若シ $Tx_0 \geq C_0 x_0$ トナル如キ positive element
 $x_0 > 0$ 及ビ positive real number $C_0 > 0$ が
 存在スレバ $Ty_0 = d_0 y_0$ トナル如キ positive element
 y_0 及ビ positive real number $d_0 \geq C_0 > 0$ が
 存在スル。⁽¹⁾

補助定理 I E ヲ semi-order ノツイタ Banach
 空間、 $x_0 > 0$ ヲ E ノ任意ノ positive element トスレバ
 $f(x_0) > 0$ トナル如キ E 全体デ定義サレタ positive linear func-
 tional $f(x)$ が存在スル。但シ E デ定義サレタ linear functional $f(x)$ が
 positive デアルト云フハ $x \geq 0$ ナル任意ノ x 對シテ $f(x) \geq 0$ トナルコトデアル。

証明: S ヲ E ノ positive part トセヨ。 S ハ

(1) $|x_0| = 1$ デアルト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。

E : strong topology $\Rightarrow$ 開ぢテキル。ヨツテ今
 $p(x)$ ヲ $p(x) = l.u.b. \|x-x'\|_{x' \in S}$ $=$ ヨツテ 定義スレバ
 $x \in S$ ナルトキ $p(x) = 0$, $x \notin S$ ナルトキ $p(x) > 0$ ナ
 ール。且ツ $p(x)$ ハ

$$(i) \quad p(tx) = t p(x), \quad t > 0, x \in E$$

$$(ii) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in E$$

ヲ満足スル。(i) ハ明カデアルカラ (ii) ヲ証明セヨウ。 $p(x)$
 ノ定義ヨリ任意ノ $\varepsilon > 0$ $=$ 對シテ $\|x-x'\| < p(x) + \varepsilon$ ナル
 如キ $x' \in S$ が存在スル。同様ニシテ $\|y-y'\| < p(y) + \varepsilon$
 ナル如キ $y' \in S$ が存在スル。ヨツテ
 $\|(x+y) - (x'+y')\| < p(x) + p(y) + 2\varepsilon$. $x'+y' \in S$
 デアルカラ $p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon$. $\varepsilon > 0$ ハ任
 意デアツタカラ (ii) ヲ得ル。

次ニ $p(x)$ ヲ $x = tx_0$, $t \geq 0$ ナル範囲ニテ考ヘレ
 バ $t \geq 0$ ナル所ニテハ $p(tx_0) = 0$, $t < 0$ ナル所ニテ
 ハ $p(tx_0) > 0$. シカモ $p(tx_0) = |t| \cdot p(-x_0)$ トナツテ
 キル。ヨツテ $p(tx_0) = -t \cdot p(-x_0)$, $t \geq 0$ $=$ ヨツテ
 $p(x)$ ヲ定義スレバ $p(x)$ ハ $x = tx_0$, $t \geq 0$ ナル所ノ
 x $=$ 對シテ定義セラレテ、且ツコトニテ $p(x) \leq p(x)$ ヲ満
 足スル。

ヨツテ Banach 1 linear functional ノ松
 張ノ定理ニヨリ $x = tx_0$, $t \geq 0$ ナルトキ $\varphi(x) = p(x)$,
 $x \in E$ ナルトキ $\varphi(x) \leq p(x)$ トナル如キ E 全体ニテ定義
 サレタ linear functional $\varphi(x)$ が存在スル。

$f(x) = -\Phi(x)$ トオケバ、コノ $f(x)$ カ求ムルモノデアル。
 先ヨ $x \in S$ トルトキハ $f(x) = -\Phi(x) \geq -\phi(x) = 0$,
 次 $f(x_0) = -\Phi(x_0) = -\phi(x_0) = \phi(-x_0) > 0$

補助定理 2 $\varepsilon > 0$ ヲ任意ノ positive real number トセヨ。 $x \geq \|x\| \cdot \varepsilon \cdot x_0$ ヲ満足スル如キ E ノ点 x 全体ノ集合ヲ S_ε トスレバ $S_\varepsilon \subset S = \tau$ 且ツ $S_2 \cap S$ ト同様ニ次ノ条件ヲ満足スル。

- (1) $x \in S_\varepsilon, y \in S_\varepsilon \rightarrow x + y \in S_\varepsilon$
- (2) $x \in S_\varepsilon, \lambda \geq 0 \rightarrow \lambda x \in S_\varepsilon$
- (3) S_ε ハ strong topology $= \tau$ closed
- (4) $x \in S_\varepsilon, x \neq 0 \rightarrow -x \in S_\varepsilon$

証明ハ容易ナルカテ省略スル。

補助定理 3 任意ノ $x \in S$ ニ對シテ

$U_\varepsilon(x) = x + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|x\| x_0$ トオケバ U_ε ハ S ヲ S_ε ノ中ニツクス連続寫像ナル。

証明: $x + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|x\| \cdot x_0 \in S_\varepsilon$ トナルコトノミヲ証明スレバヨイ。

コレハ實際 $x + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|x\| \cdot x_0 \geq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|x\| \cdot x_0 = \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \|x\| x_0$
 $= \varepsilon \left(\|x\| + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|x\|\right) x_0 \geq \varepsilon \cdot \left\|x + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|x\| \cdot x_0\right\| \cdot x_0$ ヨリ
 明カ。但ニ計算ノ途中ニテ $\|x_0\| = 1$ トナルコトヲ用ヒタ。

補助定理 4 S_ε ノ点 $x = \tau$ $f(x) = 1$ ヲ満足スルモノ全体ノ集合 K ハ convex、且ツ有界ナル。但シ

$f(x)$ の補助定理 1 = 於て定メラル x linear functional
 デアル。

証明: K が convex ナルコトハ明カ。 K が有界ナル
 コトハ次ノ如ク証明サレル: $x \in K$ ナラバ $x \leq \|x\| \cdot \varepsilon \cdot x_0$
 ナルコトヨリ $1 = f(x) \leq \|x\| \cdot \varepsilon \cdot f(x_0)$, ヨツテ

$$\|x\| \leq \frac{1}{\varepsilon \cdot f(x_0)}$$

補助定理 5 $\delta_\varepsilon > 0$ が定メツテ $x \in K$ ナルト
 $\neq f(\cup_\varepsilon T x) \geq \delta_\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \text{証明: } f(\cup_\varepsilon T x) &= f(Tx + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|Tx\| \cdot x_0) \\ &= f(Tx) + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|Tx\| \cdot f(x_0) \geq f(Tx) \geq f(T(\|x\| \cdot \varepsilon \cdot x_0)) \\ &= \|x\| \cdot \varepsilon \cdot f(Tx_0) \geq \|x\| \cdot \varepsilon \cdot C_0 x_0 \geq \frac{f(x)}{\|f\|} \cdot \varepsilon \cdot C_0 x_0 \\ &= \frac{\varepsilon C_0 x_0}{\|f\|} = \delta_\varepsilon > 0 \end{aligned}$$

定理ノ証明: 任意, $x \in S_\varepsilon$, $x \neq 0$ = 對シテ
 $f(x) \geq f(\|x\| \cdot \varepsilon \cdot x_0) = \|x\| \cdot \varepsilon \cdot f(x_0) > 0$ デアルカラ
 $\nabla(x) = \frac{x}{f(x)}$ トカケバ $\nabla(x) \in S_\varepsilon - (0) \cap K = \emptyset$ ナ
 連続寫像ナリ且 $f(x) \geq \delta_\varepsilon > 0$ ナルトコロハ一様連続
 デアル。ヨツテ今 S_ε = テ定義サレタ operator $W_\varepsilon = \nabla \cdot \cup_\varepsilon T$
 ナ考ヘレバ W_ε ハ $K \rightarrow K = \emptyset$ ナ連続寫像ナ、シカ $K =$
 $\neq$ completely continuous デアル。コレハ T が
 completely continuous ナルコト及ビ補助定理 3, 5
 ヨリワカル。

補助定理 4 = ヨリ K ハ convex 且ツ有界デアルカラ

$K \subset W_\varepsilon$ に対して Schauder の不動点定理⁽²⁾ が使へて
 $W_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$ となる如き $x_\varepsilon \in K$ が存在する。即ち
 $U_\varepsilon T(x_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon > 0$ となる如き $x_\varepsilon \in K$ が存在する。
 更に U_ε の定義 = ε トレバ

$$T(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \|T(x_\varepsilon)\| \cdot x_0 = \lambda_\varepsilon x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon > 0$$

となる如き $x_\varepsilon \in K \subset S_\varepsilon$ が存在する。此の如き $\lambda_\varepsilon, x_\varepsilon$ は
 任意の $\varepsilon > 0$ に対して存在するから $\varepsilon_n \rightarrow 0$ となる ε_n を
 とり、これに対応する $\lambda_\varepsilon, x_\varepsilon$ を夫々 λ_n, x_n と表はすと

(*) $T(x_n) + \frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n} \|T(x_n)\| \cdot x_0 = \lambda_n x_n, \lambda_n > 0,$
 $x_n \in K, \subset S_\varepsilon$ かつ $0 < C_0 \leq \lambda_n \leq C_1 < \infty, n=1,$
 $2, \dots$ となる如き C_0, C_1 の存在が証明される

$T(x_{n_\nu}) \rightarrow x_\infty, \lambda_{n_\nu} \rightarrow \lambda_\infty, C_0 \leq \lambda_\infty \leq C_1$ となる如き
 $\{n_\nu\}, x_\infty \in S, \lambda_\infty$ が存在する。この x_∞, λ_∞ が

$$T(x_\infty) = \lambda_\infty x_\infty$$

を満足する。この (*) = T を施して得られる。

$$T T(x_n) + \frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n} \|T(x_n)\| \cdot T(x_0) = \lambda_n T(x_n)$$

を $n_\nu \rightarrow \infty$ とし得る。 ($\|T(x_n)\|$ が有界, $\varepsilon_n \rightarrow 0$
 となること = 注意)。

しかも $x_\infty > 0$ である。何とすれば先づ $1 = f(x_n) \leq$
 $\|x_n\| \cdot \|f\|$ より $\|x_n\| \geq \frac{1}{\|f\|}$, 次 $x_n \geq \varepsilon \|x_n\| \cdot x_0$ より
 $T(x_n) \geq \varepsilon \|x_n\| \cdot T(x_0) \geq \varepsilon \cdot \frac{1}{\|f\|} \cdot T(x_0) > 0$ かつ又

(2) J. Schauder: Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen, *Studia Math.*, 2(1930),
 171-180

$$x_0 \geq S \cdot \frac{1}{\|f\|} T(x_0) > 0.$$

此ノ如クシテ定理ノ証明ニハ次ノ補助定理ヲ証明スレバ
十分ナコトガ分ル。(Cノ存在ハ明カナル).

補助定理6 $Tx + \alpha x_0 = \lambda x$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$,
 $x \in S'_2$ が成立スレバ $C_0 \leq \lambda$ ナル。

証明: $Tx + \alpha x_0 = \lambda x$ ヨリ $\alpha x_0 \leq \lambda x$. T ヲ両辺
ニ施シテ $\alpha Tx_0 \leq \lambda Tx$,

然ルニ $Tx_0 \geq C_0 x_0$, $Tx = \lambda x - \alpha x_0$ ナル故

$$\alpha C_0 x_0 \leq \lambda (\lambda x - \alpha x_0) \leq \lambda^2 x$$

更ニ両辺ニ T ヲ施シテ

$$\alpha C_0^2 x_0 \leq \alpha C_0 Tx_0 \leq \lambda^2 Tx \leq \lambda^2 (\lambda x - \alpha x_0) \leq \lambda^3 x$$

此ノ如クニシテ一般ニ

$$\alpha C_0^{n+1} x_0 \leq \lambda^{n+1} x$$

ヨツテ $\forall n \in \mathbb{N}$ $C_0 > \lambda$ ナラバ

$$\alpha x_0 \leq \frac{\lambda^n}{C_0^{n+1}} x$$

ヨリ $n \rightarrow \infty$ ナラシメレバ右辺 $\rightarrow 0$ *strongly*. ヨツテ

$$\alpha x_0 \leq 0$$

コレハ $\alpha x_0 > 0$ ニ矛盾スル。ヨツテ $C_0 \leq \lambda$.

コレニヨツテ補助定理6. シタガツテ又定理ノ証明が
完結スル。