



Title	可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スルMarkov過程 (2)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 173, p. 31-37
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74696
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

766. 可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スル

Markov 過程(2)

吉田 耕作(阪大)

才断 11 前談話ヲ書イタ時ニハ良イ積リガツタノデ
スガ、後カラ述ベル $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ ノ証明ニ関スル筆者ノ
方針デハ不十分ナコトガ角谷君ノ御注意デワカッタ。(本談
話ノ最後ヲミラレタイ) 角谷君ガ色々文献ヲシラベテ結局
additive number theoryニ於ケル A. Khintchine ノ
定理ヲ使ヘバ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ ガ云ヘルコトヲ考ヘ出シテ下
サッタ。本号ノ角谷君ノ談話ヲミラレタイ。Kolmogoroff
自身相當頁ヲ賞シテ証明シラレコトデスカラ相當難カシイ事
ガツタ譯デシタ。(1)

§4. Lemma 3 及び其應用

Lemma 3 点 x_i ガ l 單位時間後ニハ点 x_j ニ來ズ
且 $(l+1)$ 單位時間後ニハ点 x_j ニ來ル確率ヲ $K_{ij}^{(l+1)}$ 点 x_i
ガ l 單位時間後ニモ亦 $(l+1)$ 單位時間後ニモ点 x_j ニ來
ズ且ツ $(l+2)$ 單位時間後ニハ点 x_j ニ來ル確率ヲ $K_{ij}^{(l+2)}$
トス。

- (1) 尚前談話 763, p. 17, 第2行目 $y \rightarrow x$ ハ $y \rightarrow x$ ノ誤リデス。
同ジク 6 行目, ナラヌカラ, 1 次ニ從ッテ $x_t \in A_{i,t}$ ヲ補ヒマス。
同ジク 10 行目, 矛盾ノ前ニ $x_t \in A_{i,t}$ トヲ補ヒマス。斯ク補ヘバワカ
リヨイデスカラ。

以上同様 = シテ $K_{ij}^{(l+m)}$ ヲ定義スルベ $(l, m = 1, 2, \dots)^{(1)}$

$$(i) \quad 0 \leq p_{ij}^{(l)} + K_{ij}^{(l+1)} + K_{ij}^{(l+2)} + \dots + K_{ij}^{(l+m)} \leq 1$$

$$(ii) \quad p_{ij}^{(l+m)} = p_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(m)} + K_{ij}^{(l+1)} p_{jj}^{(m+1)} + K_{ij}^{(l+2)} p_{jj}^{(l+2)} + \dots \\ \dots + K_{ij}^{(l+m-1)} p_{jj}^{(1)} + K_{ij}^{(l+m)}$$

証明: 明カ。

系1 或 $j = \infty$ 對シテ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ が存在スルベ, 任意, $i = \infty$ 對シ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ が存在スル。

証明: (1), (2) = 於テ $l=0$ ト置ケル $(p_{ij}^{(0)} = 0) \exists$:

Toeplitz, summation.

系2 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ + 然レ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ が存在スル。

証明: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \alpha > \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \beta > 0$ トシテ

示ス。

任意, $\varepsilon > 0$ = 對シ $p_{ij}^{(n)} \leq \alpha + \varepsilon$ for $n \geq n_0$. + 如

(i) Kolmogoroff: loc. cit. 冒頭 = (ii) 式, $l=1$ + ル場合が
出テヲル。筆者ハ之カラ以下ノ所論ヲ思ヒツイタ譯デス
ガ, Kolmogoroff, 露語ノ論文(精シク証明シタヌ)ヲ調べ
テミルト, ハッカリワカリマセンガドウヤラ (i), (ii)ヲ使ッ
テ種デス。併シ Kolmogoroffノハ之ヲ出希点トシテ色
々結果ヲ出シタヒデ mean sojourn, 存在ヲ出シタリ
シテル様ナノガ行キ方ハ全然チガフワケデス。

★ Δ_0 がトレル。 m_0 を Δ_0 より大きい ε ノデ $p_{jj}^{(m_0)} \leq \beta + \varepsilon$
 ナル如キモノトスル。然ラバ (ii) ヨリ

$$\begin{aligned}
 p_{jj}^{(l+m_0)} &\leq p_{jj}^{(l)} (\beta + \varepsilon) + \left\{ K_{jj}^{(l+1)} p_{jj}^{(m_0-1)} + K_{jj}^{(l+2)} p_{jj}^{(m_0-2)} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + K_{jj}^{(l+m_0-\Delta_0)} p_{jj}^{(\Delta_0)} \right\} \\
 &\quad + \left\{ K_{jj}^{(l+m_0-\Delta_0+1)} p_{jj}^{(\Delta_0-1)} + K_{jj}^{(l+m_0-\Delta_0+2)} p_{jj}^{(\Delta_0-2)} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + K_{jj}^{(l+m_0-1)} p_{jj}^{(1)} + K_{jj}^{(l+m_0)} \right\}
 \end{aligned}$$

所ガ (i) = ヨリ l_0 を 充分大キクトレバ $\sum_{k=l_0+m_0-\Delta_0+1}^{\infty} K_{jj}^{(k)} < \varepsilon$. 従ッ

テ $l \geq l_0 + \tau$, (i) = ヨリ

$$\begin{aligned}
 p_{jj}^{(l+m_0)} &\leq p_{jj}^{(l)} (\beta + \varepsilon) + (1 - p_{jj}^{(l)}) (\alpha + \varepsilon) + \varepsilon \\
 &= p_{jj}^{(l)} (\beta - \alpha) + \alpha + 2\varepsilon. \quad \text{コノトキ尚 } l \text{ を 充分大キ } ?
 \end{aligned}$$

トレバ ($l \geq l_1 \geq l_0$) $p_{jj}^{(l)} \geq \beta - \varepsilon$. 従ッテ

$$\alpha = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} p_{jj}^{(l+m_0)} \leq (\beta - \varepsilon)(\beta - \alpha) + \alpha + 2\varepsilon.$$

ε 任意小キタカラ之レヨリ $0 \leq \beta(\beta - \alpha)$ を得テ $0 < \beta < \alpha$
 - 矛盾スル。以上。

§5. final set, 中ノ運動

§3 迄 = 述べタコト = ヨッテ final set ハ高々可附

番個ノ点 $y_1, y_2, \dots$ ヨリ成リ且ツ遷移確率 p_{ij} (点 y_i ヨリ單位時間後ニ点 y_j ニ移ル) ハ次ノ條件ヲ満足スル。

(iii) 任意ノ $i, j =$ 對シ適當ニ m ヲトレバ $p_{ij}^{(m)} > 0$

(iv) $\left\{ \begin{array}{l} \text{任意ノ } i, j = \text{對シ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p_{ij}^{(m)} = K_j \text{ (} i = \text{無} \\ \text{關係) が存在シ且ツ } K_j \text{ 全テ } 0 \text{ デ } \sum_j K_j = 1 \end{array} \right.$

定理 2 上ノ如キ homogeneous + Markov 過程
ハ次ノ意味ガ periodic デアル:

整数 $d \geq 1$ ガ存在シ $R = (y_1, y_2, \dots)$ ガ d 個ノ部
分集合 $R_1, R_2, \dots, R_d, R_{d+1} = R_1 =$ 分解シ

(v) $y_i \in R_\lambda + \sum_{y_j \in R_{\lambda+1}} p_{ij} = 1 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, d, d+1 = 1)$

(vi) R_λ ハ遷移確率 $P_{ij} = p_{ij}^{(d)}$ = 閉シテ final set
ニナリ且ツ任意ノ $y_i, y_j \in R_\lambda =$ 對シテ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd)} = M_j$

($i =$ 無關係) が存在シ, $M_j > 0, \sum_{y_j \in R_\lambda} M_j = 1$

($\lambda = 1, 2, \dots, d, d+1 = 1$)

§6. 定理 2 ノ証明

d ヲ決定スルコト $p_{ij}^{(n)} > 0$ ナル如キ n 全体ノ集合
ヲ $\mathcal{N}_j$ トスル。 (iii) ヨリ $\mathcal{N}_j$ キ空集合デアル。 $n, m \in \mathcal{N}_j$ +

ラバ $p_{ij}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{ij}^{(m)} > 0$ トナルカラ $(n+m) \in \mathcal{N}_j$ 。

$\mathcal{N}_j =$ 属スル全テノ正整数ノ最大公約數ヲ d_j トスルト d_j

$\wedge j'$ = 無関係デアル。以下其ノ証明。(iii) = ヨリ

$p_{ij}^{(k)} > 0, p_{ji}^{(l)} > 0$ ナル如キ k, l が存在スル。

$p_{ii}^{(k+l)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(l)} > 0$ 及 $p_{jj}^{(k+l)} \geq p_{ji}^{(l)} p_{ij}^{(k)} > 0$ ヨリ

$(k+l) \in \mathcal{R}_i, \mathcal{R}_j$. 即チ $(k+l) \wedge d_i \neq d_j \neq$ 約

セル。又 $p_{ii}^{(k+l+\delta)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(\delta)} p_{ji}^{(l)} > 0$ for $\delta \in \mathcal{R}_j$ ナラ

$(k+l) + \delta \in \mathcal{R}_i$ for $\delta \in \mathcal{R}_j$. 又同様ニシテ

$(k+l) + \delta \in \mathcal{R}_j$ for $\delta \in \mathcal{R}_i$ ナ得ル。故ニ $d_i = d_j \neq$

ナレバナラナ。コノ $d_i = d$ トスル。

以上

[Rノ分割] $p_{ij}^{(n)} > 0$ 且 $p_{ij}^{(m)} > 0$ ナラバ $n \equiv m \pmod{d}$ デアル。何者、(iii) = ヨリ $p_{ji}^{(k)} > 0$ ナル如キ k がアル。故ニ $p_{ii}^{(n+k)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)} > 0$ ナ得テ $n+k \equiv 0 \pmod{d}$. 同ジク $m+k \equiv 0 \pmod{d}$ ナ得ルカラ $n \equiv m \pmod{d}$.

故ニ i_0 = 對シテ $p_{i_0 j}^{(n)} > 0$ ナラバ $n \equiv 1, 2, \dots, d \pmod{d}$ ノ何レカ唯一ツが成立ツ。 i_0 = 對シ $p_{i_0 j}^{(n)} > 0$, $n \equiv \beta(j) \pmod{d}$ ⁽¹⁾ ノ成立ツ $x_j + y_j$ ノ集合ヲ R'_β ト

スルト $R = \sum_{\beta=1}^d R'_\beta$ = 分解スル。 $y_i \in R'_\beta, y_j \in R'_\gamma$ トスル。

$p_{ij}^{(m)} > 0, p_{i_0 i}^{(n)} > 0$ トスル。 $p_{i_0 j}^{(n+m)} \geq p_{i_0 i}^{(n)} p_{ij}^{(m)} > 0$.

$n \equiv \beta \pmod{d}$ ト $n+m \equiv \gamma \pmod{d}$ が成立ツカラ

(1) $\beta(j) = 1, 2, \dots, d$

$$m \equiv \gamma - \beta \pmod{d}.$$

即ち $y_i \in R'_\beta$ ならば $m \equiv \gamma - \beta \pmod{d}$ 又ハ

$$m \not\equiv \gamma - \beta \pmod{d} = \text{従フテ}$$

$$\sum_{y_j \in R'_\gamma} p_{ij}^{(m)} = 1 \quad \text{又ハ} \quad \sum_{y_j \in R'_\gamma} p_{ij}^{(m)} = 0$$

一方 (iii) = ヨリ $\sum_j p_{ij}^{(m)} \equiv 1 \pmod{d}$ (i, m = 對シテ) 故カラ適當

ニ番号ヲ附ケテ ($R_\Delta = R'_{\beta_\Delta}$) (V) ガ得ラレル。

R_Δ の性質 R_Δ ハ $P_{ij} = p_{ij}^{(d)}$ = 関シテ final set
ニナツテヲル。 R_Δ ノ作り方カラ $n \not\equiv 0 \pmod{d}$ ならば

$$p_{ij}^{(nd+n)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots; y_i, y_j \in R_\Delta).$$

$$\text{故ニ} \quad K_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{h=1}^k p_{ij}^{(h)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{dk} \sum_{h=1}^k p_{ij}^{(hd)} > 0.$$

残ル所ハ (VI) ノ証明ナルガ、之ハ Lemma 3, 系 1,
系 2 = ヨリ, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd)} > 0$ for $y_j \in R_\Delta$, ガ云ヘルトヨ
イ。斯クシテ我々ノ証明スベキコトハ結局次ノ問題 = reduce
サレタ。

Markov 過程 P_{ij} = 於テ

(a) 任意ノ i, j = 對シ適當ニ $m = m(i, j)$ ヲトル
ト $P_{ij}^{(m)} > 0$.

(b) 任意ノ i, j = 對シ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P_{ij}^{(m)}$ が存在シ

$i = \text{無関係.}$

且ツ之ヲ M_j トヲクト $M_j > 0, \sum_j M_j = 1.$

(γ) 任意ノ $j = \text{對シ}$ $P_{j,j}^{(n)} > 0$ ナル如キ n 全体ノ最大
公約數 $= 1$

ガ満足サレテアルトキ任意ノ $j = \text{對シ}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{j,j}^{(n)} > 0$ トナル?

(γ) ガラ, j ア與ヘタトキ充分大キナ n 全テニ對シテ $P_{j,j}^{(n)} > 0$ ガ得ラレル。又 $i = j$ ナルトキ, (β) ガラ $P_{j,j}^{(n)} \geq \frac{M_j}{2}$ ナル如キ n ノ集合ノ density ガ positive ナコトガ出テケル。之ニツカラタマスリ $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{j,j}^{(n)} > 0$ ガ出ル積リガッタノデスガ, additive number theory ナ必要トスルコトヲ 毎公認ガ注意セラレタノデアツタ。classical ナ確率論ガ順列組合セヲ武器トシタ如ク現代的ナ確率論ニ高次ノ順列組合論ト云フベキ(?) additive number theory ナ使フノハ何ノ不思議ニイテアル。併シ折角最後ノ瞬間迄初等的ニ議論デキタノカカラ若シ Khintchine ノ定理ヲ使ハズニ済メバ之ニ越シタコトハナイ譯デスガ。