OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スルMarkov過程 (2)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 173, p. 31-37
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74696
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

766. 可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スル Markov 過程(2)

吉田　耕作（阪大）

才断ワ　前談話ヲ書イタ時ニハ良イ積リダッタノデスガ，後カラ述ベル $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ ノ証明ニ関スル筆者ノ方針デハ不十分ナコトガ角谷君ノ御注意デワカッタ。（本談話ノ最後ヲミラレタイ）角谷君ガ色々文献ヲシラベテ結局 additive number theory ニ於ケル A. Khintchine ノ定理ヲ使ヘバ $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ ガ云ヘルコトヲ考ヘ出シテ下サッタ。本号ノ角谷君ノ談話ヲミラレタイ。Kolmogoroff 自身相当頁ヲ費シテ証明シテルコトデスカラ相当難カシイ事ダッタ譯デシタ。(1)

§4. Lemma 3 及ビ其應用

Lemma 3　点 x_i ガ l 単位時間後ニハ点 x_j ニ来ズ且（$l+1$）単位時間後ニハ点 x_j ニ来ル確率ヲ $K_{ij}^{(l+1)}$，点 x_i ガ l 単位時間後ニモ亦（$l+1$）単位時間後ニモ点 x_j ニ来ズ且ツ（$l+2$）単位時間後ニハ点 x_j ニ来ル確率ヲ $K_{ij}^{(l+2)}$ トスル。

---

(1)　尚前談話763，P.17，第2行目 $y \to x$ ハ $y \nrightarrow x$ ノ誤リデス。同ジク6行目，ナラヌカラ，ノ次ニ従ッテ時ニ $x_t \in A_{i,t}$ ヲ補ヒマス。同ジク10行目，矛盾ノ前ニ $x_t \in A_{i,t}$ トヲ補ヒマス。斯ク補ヘバワカリヨイデスカラ。

以上同様ニシテ $K_{ij}^{(l+m)}$ ヲ定義スレバ（$l, m = 1, 2, \cdots$）[1]

(i) $$0 \leqq p_{ij}^{(l)} + K_{ij}^{(l+1)} + K_{ij}^{(l+2)} + \cdots\cdots + K_{ij}^{(l+m)} \leqq 1$$

(ii) $$p_{ij}^{(l+m)} = p_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(m)} + K_{ij}^{(l+1)} p_{jj}^{(m+1)} + K_{ij}^{(l+2)} p_{jj}^{(l+2)} + \cdots$$
$$\cdots + K_{ij}^{(l+m-1)} p_{jj}^{(1)} + K_{ij}^{(l+m)}$$

証明：　明カ。

系1　或 j ニ對シテ $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}$ ガ存在スレバ、任意ノ i ニ對シ $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ ガ存在スル。

証明：　(1), (2) ニ於テ $l=0$ ト置ケバ（$p_{ij}^{(0)} = 0$）ヨイ：*Toeplitz's summation.*

系2　$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} > 0$ ナラバ $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ ガ存在スル。

証明：　$\overline{\lim_{n\to\infty}} p_{jj}^{(n)} = \alpha > \underline{\lim_{n\to\infty}} p_{jj}^{(n)} = \beta > 0$ トシテ矛盾ヲ出ス。

任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ $p_{jj}^{(\lambda)} \leqq \alpha + \varepsilon$ for $\lambda \geqq \lambda_0$。ナル如

---

(1) Kolmogoroff: loc. cit. ノ冒頭ニ(ii)式ノ $l=1$ ナル場合ガ出テヲル。筆者ヘ之カラ以下ノ所論ヲ思ヒツイタ譯デスガ，Kolmogoroff ノ露語ノ論文（精シク証明シタ奴）ヲ調ベテミルト，ハッキリワカリマセンガドウヤラ (i), (ii) ヲ使ッテル様デス。併シ Kolmogoroff ハ之ヲ出発点トシテ色々結果ヲ出シタ上デ mean sojourn ノ存在ヲ出シタリシテル様ナノデ行キ方ハ全然チガフワケデス。

ヤ λ_0 ガトレル。m_0 ヲ λ_0 ヨリ大キイモノデ $p_{jj}^{(m_0)} \leqq \beta+\varepsilon$ ナル如キモノトスル。然ラバ (ii) ヨリ

$$p_{jj}^{(l+m_0)} \leqq p_{jj}^{(l)}(\beta+\varepsilon) + \Big\{ K_{jj}^{(l+1)} p_{jj}^{(m_0-1)} + K_{jj}^{(l+2)} p_{jj}^{(m_0-2)} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + K_{jj}^{(l+m_0-\lambda_0)} p_{jj}^{(\lambda_0)} \Big\}$$

$$+ \Big\{ K_{ji}^{(l+m_0-\lambda_0-1)} p_{ij}^{(\lambda_0-1)} + K_{jj}^{(l+m_0-\lambda_0-2)} p_{jj}^{(\lambda_0-2)} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + K_{jj}^{(l+m_0-1)} p_{jj}^{(1)} + K_{jj}^{(l+m_0)} \Big\}$$

所ガ (i) ヨリ l_0 ヲ充分大キクトレバ $\sum_{k=l_0+m_0-\lambda_0-1}^{\infty} K_{jj}^{(k)} < \varepsilon$. 従ッテ $l \geqq l_0$ トヲ, (i) ヨリ

$$p_{jj}^{(l+m_0)} \leqq p_{jj}^{(l)}(\beta+\varepsilon) + (1-p_{jj}^{(l)})(\alpha+\varepsilon) + \varepsilon$$

$$= p_{jj}^{(l)}(\beta-\alpha) + \alpha + 2\varepsilon.$$ コノトキ尚 l ヲ充分大キクトレバ ($l \geqq l_1 \geqq l_0$) $p_{jj}^{(l)} \geqq \beta-\varepsilon$. 従ッテ

$$\alpha = \overline{\lim_{l\to\infty}} p_{jj}^{(l+m_0)} \leqq (\beta-\varepsilon)(\beta-\alpha) + \alpha + 2\varepsilon.$$

ε 任意ダッタカラ之レヨリ $0 \leqq \beta(\beta-\alpha)$ ヲ得テ $0 < \beta < \alpha$ ト矛盾スル。以上。

§5. final set ノ中ノ運動

§3 迄ニ述ベタコトニヨッテ final set ハ高々可附

有個ノ点 $y_1, y_2, \cdots\cdots$ ヨリ成リ且ツ遷移確率 p_{ij} (点 y_i ヨリ単位時間後ニ点 y_j ニ移ル) ハ次ノ條件ヲ満足スル。

(iii) 任意ノ i, j ニ對シ適當ナ m ヲトレバ $p_{ij}^{(m)} > 0$

(iv) 任意ノ i, j ニ對シ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = K_j$ (i ニ無関係) ガ存在シ且ツ K_j 全テ0デ $\sum_j K_j = 1$

定理2 上ノ如キ homogeneous ナ Markov 過程ハ次ノ意味デ periodic デアル:

整数 $d \geqq 1$ ガ存在シ $R = (y_1, y_2, \cdots\cdots)$ ガ d 個ノ部分集合 $R_1, R_2, \cdots\cdots, R_d, R_{d+1} = R_1$ ニ分解シ

(v) $y_i \in R_\delta$ ナラ $\sum_{y_j \in R_{\delta+1}} p_{ij} = 1$ $\quad (\delta = 1, 2, \cdots\cdots, d, d+1 = 1)$

(vi) R_δ ハ遷移確率 $P_{ij} = p_{ij}^{(d)}$ ニ關シテ final set ニナリ且ツ任意ノ $y_i, y_j \in R_\delta$ ニ對シテ $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} = M_j$ (i ニ無関係) ガ存在シ, $M_j > 0$, $\sum_{y_j \in R_\delta} M_j = 1$

$(\delta = 1, 2, \cdots\cdots, d, d+1 = 1)$

§6. 定理2ノ証明

d ヲ決定スルコト $p_{jj}^{(n)} > 0$ ナル如キ n 全体ノ集合ヲ $\mathfrak{N}_j$ トスル。(iii) ヨリ $\mathfrak{N}_j \neq$ 空集合デアル。$n, m \in \mathfrak{N}_j$ ナラバ $p_{jj}^{(n+m)} \geqq p_{jj}^{(n)} p_{jj}^{(m)} > 0$ トナルカラ $(n+m) \in \mathfrak{N}_j$.

$\mathfrak{N}_j$ ニ属スル全テノ正整数ノ最大公約数ヲ d_j トスルト d_j

ハ j ニ無関係デアル。　以下其ノ証明。(iii) ニヨリ

$p_{ij}^{(k)}>0$, $p_{ji}^{(l)}>0$ ナル如キ k, l が存在スル。

$p_{ii}^{(k+l)} \geqq p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(l)}>0$ 及ビ $p_{jj}^{(k+l)} \geqq p_{ji}^{(l)} p_{ij}^{(k)}>0$ ヨリ

$(k+l) \in \mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_j$. 即チ $(k+l)$ ハ d_i デモ d_j デモ約

セル。又 $p_{ii}^{(k+s+l)} \geqq p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(s)} p_{ji}^{(l)}>0$ for $s \in \mathfrak{N}_j$ カラ

$(k+l)+s \in \mathfrak{N}_i$ for $s \in \mathfrak{N}_j$. 又同様ニシテ

$(k+l)+s \in \mathfrak{N}_j$ for $s \in \mathfrak{N}_i$ ヲ得ル。故ニ $d_i=d_j$ デ

ナケレバナラナイ。コノ $d_i=d$ トトル。　以上

R ノ分割　$p_{ij}^{(n)}>0$ 且ツ $p_{ij}^{(m)}>0$ ナラバ $n \equiv m \pmod d$ デアル。何者, (iii) ニヨリ $p_{ji}^{(k)}>0$ ナル如キ k ガアル。故ニ $p_{ii}^{(n+k)} \geqq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)}>0$ ヲ得テ $n+k \equiv 0 \pmod d$. 同ジク $m+k \equiv 0 \pmod d$ ヲ得ルカラ $n \equiv m \pmod d$.

故ニ i_0 ニ対シテ $p_{i_0 j}^{(n)}>0$ ナラバ $n \equiv 1, 2, \cdots\cdots, d \pmod d$ ノ何レカ唯一ツガ成立ツ。i_0 ニ対シ $p_{i_0 j}^{(n)}>0$, $n \equiv \beta(j) \pmod d$ [1] ノ成立ツ様ナ y_j ノ集合ヲ R'_β トスルト $R=\sum_{\beta=1}^{d} R'_\beta$ ニ分解スル。$y_i \in R'_\beta$, $y_j \in R'_\gamma$ トスルト

$p_{ij}^{(m)}>0$, $p_{i_0 i}^{(n)}>0$ トスレバ $p_{i_0 j}^{(n+m)} \geqq p_{i_0 i}^{(n)} p_{ij}^{(m)}>0$.

$n \equiv \beta \pmod d$ ト $n+m \equiv \gamma \pmod d$ ガ成立ツカラ

---

(1)　$\beta(j)=1, 2, \cdots\cdots, d$

$m \equiv \gamma - \beta \pmod{d}$.

即チ $y_i \in R'_\beta$ ナラバ $m \equiv \gamma - \beta \pmod{d}$ 又ハ $m \not\equiv \gamma - \beta \pmod{d}$ ニ従ッテ

$$\sum_{y_j \in R'_\gamma} p_{ij}^{(m)} = 1 \quad 又ハ \quad \sum_{y_j \in R_\gamma} p_{ij}^{(m)} = 0$$

一方 (iii) ニヨリ $\sum_j p_{ij}^{(m)} \equiv 1$ (i, m ニ對シテ) ダカラ適當ニ番号ヲ附ケテ ($R_\Delta = R'_{\beta_\Delta}$) (∇) ガ得ラレル。

R_Δ ノ性質 R_Δ ハ $P_{ij} = p_{ij}^{(d)}$ ニ關シテ final set ニナッテヰル。R_Δ ノ作リ方カラ $n \not\equiv 0 \pmod{d}$ ナラバ

$$p_{ij}^{(md+n)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots;\ y_i, y_j \in R_\Delta).$$

故ニ $$K_j = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{h=1}^{k} p_{ij}^{(h)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{dk} \sum_{h=1}^{k} p_{ij}^{(hd)} > 0.$$

殘ル所ハ (VI) ノ証明デアルガ，之ハ Lemma 3 ノ系 1，系 2 ニヨリ，$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} > 0$ for $y_j \in R_\Delta$, ト云ヘルトヨイ。斯リシテ我ノ証明スベキコトハ結局次ノ問題ニ reduce サレタ。

Markov 過程 P_{ij} ニ於テ

(α) 任意ノ i, j ニ對シ適當ニ $m = m(i, j)$ ヲトルトキ $P_{ij}^{(m)} > 0$.

(β) 任意ノ i, j ニ對シ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P_{ij}^{(m)}$ ガ存在シ

i ニ無関係.

且ツ之ヲ M_j トヲクト $M_j > 0$, $\sum_j M_j = 1$.

(γ) 任意ノ j ニ對シ $P_{jj}^{(n)} > 0$ ナル如キ n 全体ノ最大公約数 $= 1$

が満足サレテヲルトキ任意ノ j ニ對シ $\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} > 0$ トナル?

(γ) カラ, j ヲ與ヘタトキ充分大キナル合テニ對シテ $p_{jj}^{(n)} > 0$ ガ得テレル。又 $i = j$ ナルトキノ (β) カラ $p_{jj}^{(n)} \geqq \frac{M_j}{2}$ ナル如キ n ノ集合ノ density ガ positive ナコトガ出テクル。之ニヨリカラタヤスク $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} > 0$ ガ出ル積リダッタノデスガ, additive number theory ヲ必要トスルコトヲ再公君ガ注意セラレタノデアッタ。classical ナ確率論ガ順列組合セヲ武器トシタ如ク現代的ナ確率論ニ高次ノ順列組合論トモ云フベキ(?) additive number theory ヲ使フノハ何ノ不思議モナイ訳デアル。併シ折角最後ノ瞬間迄初等的ニ議論デキタノダカラ若シ Khintchine ノ定理ヲ使ハズニ済メバ之ニ越シタコトハナイ譯デスガ。