767. Additive number theory ノ Markoff chain ノ問題ヘノ應用

角谷 靜夫（阪大）

可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スル Markoff chain ヲ論ズルニ當ッテ我々ガ遭遇シタノハ次ノ問題デアッタ[1]：

> real number ノ系列 $\{p^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ
>
> (1) $0 \leqq p^{(n)} \leqq 1, \quad n=1,2,\cdots\cdots$
>
> (2) $p^{(m+n)} \geqq p^{(m)} p^{(n)}, \quad m,n=1,2,\cdots\cdots$
>
> (3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(p^{(1)}+p^{(2)}+\cdots\cdots+p^{(n)}) = \alpha > 0$
>
> (4) $p^{(n)} > 0$ トル如キ n ノ集合ヲ $\mathfrak{M}$ トスレバ
>
> $\mathfrak{M}$ ノ最大公約數 $=1$
>
> ヲ満足スルトキ、コレダケノ條件カラ $\lim_{n\to\infty} p^{(n)} > 0$ ガ結論出來ルカ？

次ニコノ結論ガ可能デアルコトヲ証明スル。

先ヅ (4) ニテ定義サレタ $\mathfrak{M}$ ガ十分大キイ integer ヲスベテ含ムコトヲ証明スル。即チ

補助定理

> positive integer ノ集合 $\mathfrak{M}$ ガ
>
> (5) $m \in \mathfrak{M}, \; n \in \mathfrak{M}$ ナラバ $m+n \in \mathfrak{M}$,

(1) 本号ノ吉田氏ノ談話參照.

(6) $\mathfrak{M}$ ノ最大公約数$=1$

ヲ満足スレバ、アル integer n_0 ガ定マッテ $n \geqq n_0$ ナルスベテノ integer n ハ $\mathfrak{M}$ ニ屬スル。

ナルコトヲ証明スル。$\mathfrak{M}$ ノ最大公約数ガ 1 ナルコトヨリ $n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k \in \mathfrak{M}$ 及ビ正又ハ負ノ integer $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_k$ ガ定マッテ

$$l_1 n_1 + l_2 n_2 + \cdots\cdots + l_k n_k = 1$$

トナル。$\max_{1 \leqq i \leqq k} |l_i| = L$ トオキ $n_0 = n_1 \cdot L \cdot (n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_k)$ トオケ。明カニ $n_0 \in \mathfrak{M}$ デアル。$n \geqq n_0$ ナル任意ノ integer ハ $n_0 + m + l n_1$, $0 \leqq m \leqq n_1 - 1$, $l =$ integer $\geqq 0$, ト云フ形ニ書クコトガ出来ルカラ, $n \geqq n_0$ ナルスベテノ integer n ガ $\mathfrak{M}$ ニ屬スルコトヲ示スニハ $n_0, n_0+1, n_0+2, \cdots\cdots, n_0 + (n_1 - 1)$ ガ何レモ $\mathfrak{M}$ ニ屬スルコトヲ示セバ十分デアル。

シカルニコレハ

$$n_0 + m = n_1 \cdot L\,(n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_k) + m(l_1 n_1 + l_2 n_2 + \cdots\cdots + l_k n_k)$$
$$= (n_1 L + m l_1) n_1 + (n_1 L + m l_2) n_2 + \cdots\cdots + (n_1 L + m l_k) n_k$$

トナリ $0 \leqq m \leqq n_1 - 1$ ニ對シテ $n_1 L + m l_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, k$ ガアルカラ明カデアル。

次ニ $\varliminf_{n \to \infty} p^{(n)} > 0$ ナルコトノ証明ニウツルノデアルガ

ソノ前ニ二三ノ準備ヲスル。

一般ノ positive integer ノ集合 $\mathfrak{a}$ ヲ考ヘル。n ヲ超ヘナイ positive integer デ $\mathfrak{a}$ ニ属スルモノノ数(カズ)ヲ $A(n)$ ニヨッテ表ハス。$0 \leqq A(n) \leqq n$ デアル。

$n = 1, 2, \cdots\cdots$ ニ對スル $\dfrac{A(n)}{n}$ ノ下限 $\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{A(n)}{n} \text{ ニ非ズ}\right)$ ヲ $D^*(\mathfrak{a})$ ニヨッテ表ハス。

又 $\underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{A(n)}{n}$ ヲ $\underline{D}(\mathfrak{a})$ ニテ表ハス。(2)

$0 \leqq D^*(\mathfrak{a}) \leqq \underline{D}(\mathfrak{a}) \leqq 1$ デアル。特ニ $\mathfrak{a}$ ガ 1 ヲ含マナケレバ $A(1) = 0$ トナルカラ $D^*(\mathfrak{a}) = 0$ トナル。又 $D^*(\mathfrak{a}) = 1$ トナルノハ各々ノ n ニ對シテ $A(n) = n$ トナルトキ、即チ $\mathfrak{a}$ ガ positive integer 全体ノ集合ト一致スルトキ、且ツソノ時ニ限ル。

次ニ二ツノ positive integer ノ集合 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ニ對シテ $a, b, a+b$ $(a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b})$ ナル如キ形ノ positive integer ノ集合ヲ $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ ニテ表ハス。$\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \supseteqq \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{b}$ デアルガ必ズシモ等号ハ成立シナイ。($\mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{b}$ ハ集合トシテノ和ヲ表ハス)。

更ニ一般ニ positive integer ノ集合 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_k$ ニ對シテ $e_1 a_1 + e_2 a_2 + \cdots\cdots + e_k a_k$, $e_i = 0$ or 1, $a_i \in \mathfrak{a}_i$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, k$ ナル如キ形ノ

---

(2) $\overline{D}(\mathfrak{a}) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{A(n)}{n}$, $D(\mathfrak{a}) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{A(n)}{n}$ (左辺ガ存在スルトキ) 等モ定義サレルガコレシハ必要デナイ。

integer 全体ノ集合ヲ $\mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \cdots\cdots \oplus \mathfrak{A}_k$ デ表ハス.

然ルトキハ次ノ Khintchine ノ定理ガ成立スル[(3)]:

$$\boxed{\begin{array}{l} D^*(\mathfrak{A}_i) \geqq \alpha,\quad i=1,2,\cdots\cdots,k \text{ ナラバ} \\ D^*(\mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \cdots\cdots \oplus \mathfrak{A}_k) \geqq \min(1,\, k\alpha). \end{array}}$$

特ニ $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \cdots\cdots = \mathfrak{A}_k$ ナルトキハ

$$D^*(\underbrace{\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A} \oplus \cdots\cdots \oplus \mathfrak{A}}_{k\text{個}}) \geqq \min(1,\, kD^*(\mathfrak{A}))$$

---

(3) A. Khintchine: Zur additiven Zahlentheorie, Recueil Math, 39(1932).

一般ニ

$$D^*(\mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \cdots\cdots \oplus \mathfrak{A}_k)$$
$$\geqq \min(1,\, D^*(\mathfrak{A}_1) + D^*(\mathfrak{A}_2) + \cdots\cdots + D^*(\mathfrak{A}_k))$$

ガ豫想サレテキルガ証明ハ未ダ出来テキナイ。

コノ問題ニ関シテハ Khintchine ノヨリモ精シイ結果ガ A. Besicovitch, I. Schur, A. Brauer 等ニヨッテ得ラレテキル。シカシコンデハ上記ノ Khintchine ノ結果デ十分デアル。

A. Brauer: Über die Dichte der Summe von Mengen positiver ganzer Zahlen, I: Annals of Math, 39(1938).

E. Landau: Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge Tracts, NO. 35. 1937.

ガ成立スル。証明ハ脚註(3)ノ Khintchine ノ原論文又ハ Landau ノ書物ヲ見ラレタイ。

$$\boxed{\underline{\lim}_{n\to\infty}\, p^{(n)} > 0 \text{ ナルコトノ証明}}$$

先ヅ $p^{(n)} \geqq \frac{\alpha}{2}$ ナル positive integer n ノ集合 $\mathfrak{N}$ ヲ考ヘル。但シ α ハ條件(3)ニヨッテ定マルモノデアル。條件(3)ヨリ $\underline{D}(\mathfrak{N}) \geqq \frac{\alpha}{2-\alpha} > 0$ ガ得ラレル。何トナレバ n ヲ超ヘナイ integer デ $\mathfrak{N}$ ニ属スルモノノ数(カズ)ヲ $A(n)$ トスレバ

$$\frac{p^{(1)}+p^{(2)}+\cdots\cdots+p^{(n)}}{n} \leqq \frac{A(n)+(n-A(n))\cdot\frac{\alpha}{2}}{n}$$

$$= \frac{\alpha}{2}+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{A(n)}{n}$$

ヨッテ $n\to\infty$ ナラシメレバ

$$\alpha \leqq \frac{\alpha}{2}+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\underline{D}(\mathfrak{N})$$

$$\frac{\alpha}{2-\alpha} \leqq \underline{D}(\mathfrak{N})$$

1ハ $\mathfrak{N}$ ニ属スルカドウカワカラナイ。($p^{(1)} \geqq \frac{\alpha}{2}$ トナルカドウカワカラズ)。ヨッテ $D^*(\mathfrak{N})=0$ トナルカモ知レナイ。

シカシ $\mathfrak{N}$ ニ1ヲ加ヘタモノヲ $\mathfrak{N}^*$ ニテ表ハセバ $D^*(\mathfrak{N}^*)>0$ トナル。何トナレバ $\mathfrak{N}$ ガ1ヲ含ム場合ハ明カ。$\mathfrak{N}$ ガ1ヲ含マナイトキハ n ヲ超ヘナイ positive integer デ $\mathfrak{N}^*$ ニ属スルモノノ数(カズ) $A^*(n)$ ハ $A^*(n)=A(n)+1$ ヲ満足スル。ヨッテ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A^*(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}\geqq\frac{\alpha}{2-\alpha}>0$$

故ニ十分 n^* ヲ大キク トレバ $n\geqq n^*$ ナルトキ

$\dfrac{A^*(n)}{n}\geqq\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\alpha}{2-\alpha}>0$． 然ルニ $n=1,2,\cdots\cdots,n^*-1$

ニ對シテハ $\dfrac{A^*(n)}{n}\geqq\dfrac{1}{n^*-1}$ ナル故

$\dfrac{A^*(n)}{n}\geqq \min\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\alpha}{2-\alpha},\ \dfrac{1}{n^*-1}\right)>0$． ヨツテ

$D^*(\mathfrak{N}^*)>0$．

従ツテ Khintchine ノ定理ノ特別ノ場合ヨリ、k_0 ヲ

十分大キク $\left(k_0>\dfrac{1}{D^*(\mathfrak{N}^*)}\right)$ トレバ

$$D^*(\underbrace{\mathfrak{N}^*\oplus\mathfrak{N}^*\oplus\cdots\cdots\oplus\mathfrak{N}^*}_{k_0\text{個}})=1$$

即チ $\underbrace{\mathfrak{N}^*\oplus\mathfrak{N}^*\oplus\cdots\cdots\oplus\mathfrak{N}^*}_{k_0\text{個}}$ ハ positive integer 全

体ノ集合ト一致スル。ヨツテ任意ノ integer n ハ

$$n=n_1^*+n_2^*+\cdots\cdots+n_p^*,\quad n_i^*\in\mathfrak{N}^*.$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,p;\ 1\leqq p\leqq k_0$$

ト云フ形ニ書ケル。$n_1^*,n_2^*,\cdots\cdots,n_p^*$ ノウチ 1 ニ等シイ

モノノ数(カズ)ヲ r トスレバ

$$n=n_1+n_2+\cdots\cdots+n_{p-r}+r,\quad n_i\in\mathfrak{N},$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,p-r.$$

$$0\leqq r\leqq p\leqq k_0$$

トナル。 $n' = n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_{p-r}$ トオケバ 條件 (2) ヨリ

$$p^{(n')} \geqq p^{(n_1)} \cdot p^{(n_2)} \cdots\cdots p^{(n_{p-r})} \geqq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p-r} \geqq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k_0}$$

ヨッテ任意ニ positive integer $n > k_0$ ヲ與ヘレバ $p^{(n)}, p^{(n-1)}, \cdots\cdots, p^{(n-(k_0-1))}$ ノウチノ少クトモ一ツハ $\geqq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k_0} > 0$ トナル。

今補助定理ニテ定マッタ integer n_0 ヲトリ

$$\min\left(p^{(n_0)}, p^{(n_0+1)}, \cdots\cdots, p^{(n_0+(k_0-1))}\right) = \lambda_0$$

トオケバ $\lambda_0 > 0$ デアル。

スベテノ $n \geqq n_0 + k_0$ ニ對シテ $p^{(n)} \geqq \beta > 0$ トナル如キ $\beta > 0$ ガアルコトヲ示サウ。

$n - n_0 > k_0$ ナル故 $p^{(n-n_0)}, p^{(n-n_0-1)}, \cdots\cdots, p^{(n-n_0-(k_0-1))}$ ノウチ少クトモ一ツハ $\geqq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k_0} > 0$. コレヲ $p^{(n-n_0-i_0)}$ トセヨ。$(0 \leqq i_0 \leqq k_0 - 1)$. 然ルトキハ條件 (2) ヨリ

$$p^{(n)} \geqq p^{(n-n_0-i_0)} \cdot p^{(n_0+i_0)} \geqq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k_0} \cdot \lambda_0 = \beta$$

トナル。 $\beta = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{k_0} \cdot \lambda_0$ ハ n ニ無関係デアルカラ

$$\varliminf_{n\to\infty} p^{(n)} \geqq \beta > 0.$$