



Title	確率法則ノ分解問題, IX
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 173, p. 45-51
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74698
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1768. 確率法則ノ分解問題, IX

北 川 敏 月 (阪大)

§ 10. I[F] = 於ケル分解問題

L'arithmétique des produits de lois de Poisson ノ重要ト定理トシテ

定理 10. (Raikoff) *Poisson* ノ分布ノ特性函数 $e^{e^{it}-1}$ ヲバ, ニツノ特性函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ ノ積ニ分解出来タトスル。然レ時ニハ, $f_1(t)$, $f_2(t)$ ハ必ズ次ノ形ニナル:

$$(1) \begin{cases} f_1(t) = e^{c_1(e^{it}-1) + imt} \\ f_2(t) = e^{c_2(e^{it}-1) - imt} \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

而シテ茲ニ、実数 c_1, c_2, m ニ關シテハ次ノ關係が充サレテ居ルコトニナル:

$$(2) \quad c_1 + c_2 = 1, \quad c_1, c_2 \geq 0.$$

茲デモコノ定理ヲモ亦, 或ル特殊領域ニ於ケル分解問題トシテ眺メテ見ヨウ。

以下ニ於テハ暫ラ $f(t) \neq 0$ ($-\infty < t < \infty$) ナル如キ特性函数 $f(t)$ ノミヲ考ヘル。カナルモ 1 ニ對シテハ $\log f(0) = 1$ ナル條件ニ依リ *unique* ニキマツタ分枝ニヨツテ $\log f(t)$ ノ價ヲ一意的ニキメテ, $f(t) = \exp\{\log f(t)\}$ ト書ケル。

然レトキ

$$(3) \exp\{\alpha \log f(t)\} \quad (\equiv f_\alpha(t) \text{ ト } \in \text{略記スル})$$

ハ、或レ正ノ実数 α = 對シテハ特性函数ヲ表ハシ、或レ正ノ実数 α = 對シテハ特性函数ヲバ表ハサナイ。前番ノ如キ α スベテノ集合ヲ假リ $= \Xi_f$ デ表ハサウ：即チ、 $\mathcal{K}$ = 依ッテ凡ベテノ特性函数ノ集合ヲ示スナラバ

$$(4) \Xi_f = \left[\alpha; \exp\{\alpha \log f(t)\} \in \mathcal{K} \right]$$

Ξ_f = 関シテ次ノコトハ容易ニ見ラレル。

$$(5) \begin{cases} (i) \Xi_f \cap (0, \infty) = \emptyset \text{ ノ閉集合デアレ。} \\ (ii) \Xi_f \text{ が正ノ実数全体ノ集合ト一致スレバ、} f(t) \text{ ハ無限ニ分解可能ナ確率法則デアル；逆又真。} \\ (iii) \alpha, \beta \in \Xi_f \text{ ナラバ、} \alpha + \beta \in \Xi_f. \end{cases}$$

次ニ $\mathcal{J}\{f\}$ = 依ッテ

$$(6) f_\alpha(t) e^{imt} \quad (\alpha \in \Xi_f, -\infty < m < \infty)$$

ナル如キ特性函数スベテノ集合ヲ表ハシ、 $\mathcal{J}\{f\}$ = 属スル特性函数ニ對應スル分布函数全部ノ集合ヲバ $I[F]$ デ表ハスノデアル。

以上ヲ準備トシテ、吾々ノ問題ハ、次ノ如ク formulate 出来ルノデアル：

$F(x)$ ノ分布函数トスル確率法則ヲ $\mathcal{L}$ トスル。 $\mathcal{L}$ が、分解カレテ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ トナルトキニハ、—— $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ ノ分布函数ヲ $F_1(x), F_2(x)$ トシテ——必ズ、 $F_1 \in I[F]$ 、且ツ $F_2 \in I[F]$ デアル様ナ F ハ如何ナルモノカ。

標記的ニ書ケバ上ノ問題ハ：

$$(17) \quad F = F_1 * F_2 \longrightarrow F_1 \in I[F], F_2 \in I[F]$$

ナル如キ F ヲ求メヨトイフコトデアル。(勿論, F, F_1, F_2 ハ分布函数)

以上ノ如キ見方カラスレバ, 定理 10 ハコレヲ次ノ如ク書ケル:

定理 10': $F(x)$ ガ *Poisson* ノ分布 (即チ e^{it} ノ特性函数ニ對應スル分布函数) トスレバ, (17) ナル關係が成立スル。

カク觀察シ来ルトキ、*Leikoff* ノ定理ノ位地ガ次ノ關係ニアルヲ見ル:

$K[F]$ = 於ケル分解問題	$I[F]$ = 於ケル分解問題
<i>Gauss</i> ノ分布 = 關スル <i>Cramér</i> ノ定理 (定理 9, IV)	<i>Poisson</i> ノ分布 = 關スル <i>Leikoff</i> ノ定理 (定理 10)

$K[F]$ ト $I[F]$ トノ對應ヲ更ニ追求スルトキ, $I[F]$ = 關シテ幾多ノ問題ガ派生スルヲ見ルデアロウ。シカシ, ソウイツタ方面ニ於テ、未ダ研究ハ進ンデ居ラナイト思フ。茲ニ將來ノ発展ガ期待シレル。

定理 10 = 對スル *Khintchine* ノ証明:

先ヅ証明 = 用キラレル補助定理ヲ擧ゲテ置カウ。

補助定理 A: 確率変數 U, V ハ相互ニ独立デ、

$U + V = X$ ナリトスル。 U, V, X ノ分布函数ヲ夫々,

$F(x), G(x), H(x)$ デ表ハス。然ルトキニハ, 若シ $F(x)$ ガ $-\infty < x < \infty$ ニテ到ル所連続デアルナラバ, $H(x)$ モ

亦然リ。

〔証〕 次ノ不等式カラ明ラカデアル：任意ノ実数 x ，任意ノ正数 $\varepsilon = \delta$ ニテ

$$\begin{aligned} H(x+\varepsilon) - H(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x+\varepsilon-y) - F(x-y)\} dG(y) \\ &\leq l.u.b. |F(x+\varepsilon-y) - F(x-y)| \\ &\quad -\infty < y < \infty \end{aligned}$$

補助定理 B： 確率変数 U, V ハ相互ニ独立デ，
 $U+V = X$ ナリトスル。 X ノ分布函数 $H(x)$ ハ， 0 及ビ自然数ニ於テノミ飛躍ヲモツ階段函数ナリトスル。 然ルトキニハ， 実数 m カ存在シテ、 $U+m, V+m$ ノ分布函数ガ共ニ 0 及ビ自然数ニ於テノミ， 飛躍ヲモク得ル階段函数トナル。

〔証〕 U, V ノ分布函数ヲ夫々 $F(x), G(x)$ トスル。
 $F(x)$ ノ連続部分 $C_F(x)$ ， 不連続部分 $S_F(x)$ ニ分ツ： 即チ $F(x) = S_F(x) + C_F(x)$ 。 同様ニシテ、 $G(x) = S_G(x) + C_G(x)$ 。 然ルトキニハ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y) dG(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_F(x-y) dS_G(y) + \int_{-\infty}^{\infty} C_F(x-y) dS_G(y) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} S_F(x-y) dC_G(y) + \int_{-\infty}^{\infty} C_F(x-y) dC_G(y) \end{aligned}$$

茲ニ、右辺ノ第二項，第四項ハ補助定理 Aニヨリ各 x ノ連続函数デアル。 (S, C ハ必ズシモ分布函数トハナラヌカモ知レナイガ、有界且ツ單調増加デアルコトハ明ラカデアル，補助定理 Aノ証明が必要ナノハソノ事ノミデアツタ)， 第三

項ハ $S_F * C_G$ デアルカ、コレハ $C_G * S_F$ (即チ $\int_{-\infty}^{\infty} C_G(x-y) dS_F(y)$ ト書ク) = 等シイノデアルカラ、コレ又 α ノ連続函数デア
ル。コレヲ三項ハ又 α ノ單調増加函数デアルコトモ明ラカデ
アル。依ツテ結局

$$\begin{cases} C_H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C_F(x-y) dS_G(y) + \int_{-\infty}^{\infty} S_F(x-y) dC_G(y) \\ \quad + \int_{-\infty}^{\infty} C_F(x-y) dC_G(y) \\ S_H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(x-y) dS_G(y) \end{cases}$$

トナラネバナラヌ事ガミラレル。然ルニ假定ニヨリ、
 $C_H(x) \equiv 0$ デアル。依ツテ $C_F(x) = C_G(x) \equiv 0$ トナラネ
バナラヌ。

即チ、 U, V ノ分布函数ハ共ニ階段函数デアアルコトヲ
知ツタ。次ニ、 U ノ飛躍点ノ集合、 V ノ飛躍点ノ集合ハ、共
ニ下ニ有界デアアル。何者、 $U+V=X$ ノ飛躍点ノ集合ガソ
ウデアアルカラ (0ガ最小値) 依ツテ、 U, V ノ飛躍点ヲ次ノ
如ク書キナラベ得ル:

$$U: a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$$

$$V: b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots$$

$U+V=X$ ニ依リ、 $a_0 + b_0 = 0$ トナラネバナラヌ。依ツ
テ $a_0 = -b_0 = -m$ トオク。 $a_i = m + c_i$, $b_i = m + d_i$
トオクト、 c_i, d_i ハ自然数又ハ 0 ナケレバナラヌ。案数
 $a_i + b_0 = -m + c_i + m = c_i$ ナトル確率ハタシカニ正デ
アル。依ツテ c_i ハ 0 又ハ自然数デナケレバナラヌ。

(以上)

補助定理C: ニツノ特性函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ ノ積 $f(t)$ が整函数ナルナラバ, $f_1(t)$, $f_2(t)$ モ亦整函数ナル。又特ニ $f(t)$ が 0 = ナラヌ整函数ナラバ, $f_1(t)$, $f_2(t)$ モ亦然リ。
(前出, ∇ , §8, 補助定理8及此系1)

以上ヲ準備トシテ、目的ノ定理10ヲ証明シヤウ。

定理10ノ証明: $e^{it} - 1$ ノ特性函数トスル確率変数 X トシ, X ガニツノ相互ニ独立ナ確率変数 U, V ノ和ニ分解サレタトスル。即チ $X = U + V$ 。茲ニ, U, V ハ共ニ, 或ル常数ニ等シクハナイトスル。 U, V ノ特性函数ヲ夫々 $f_1(t)$, $f_2(t)$ トスル。即チ $e^{it} - 1 = f_1(t) f_2(t)$

$e^{it} - 1$ ハ, 0 = ナラヌ整函数ナルが故ニ, 補助定理Cニヨリ, $f_1(t)$, $f_2(t)$ 亦ソウデナケレバナラヌ。

$e^{it} - 1$ ノ特性函数ニモツ X ノ分布函数ハ, 0 及ビ自然数ヲ飛躍点トスル階段函数ナル。依ツテ, 補助定理Bニヨリ適當ナ実数 m ヲトルトキ $U + m$, $V - m$ ノ分布函数モ亦階段函数トナル。 $\therefore$ ノ可能ナ飛躍点ハ 0 及ビ自然数ナル。

ソコデ $U + m$, $V - m$ ノ代リニ, 以下デハ單ニ夫々 U , V トカク。即チ一般性ヲ失フコトナシニ $m = 0$ ト假定スル。

$$(8) \quad \text{Pr.} \{U = p\} = \alpha_p, \quad \text{Pr.} \{V = p\} = \beta_p$$

トオフト

$$(9) \quad f_1(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p e^{ipx}, \quad f_2(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_p e^{ipx}$$

依ッテ

$$(10) \quad \text{Pr. } \{X = p\} = \alpha_0 \beta_p + \alpha_1 \beta_{p-1} + \dots + \alpha_p \beta_0 \\ \geq \alpha_p \beta_0, \alpha_0 \beta_p.$$

茲 $\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$ = 注意スル。

然ルニ, $f_1(t), f_2(t)$ ハ共ニ, $0 \leq t$ 又 整函数デア
ルカラシテ, $\beta_0 f_1(t) = \exp\{p_1(t)\}, \alpha_0 f_2(t) =$
 $\exp\{p_2(t)\}$ トナル整函数 $p_1(t), p_2(t)$ ハ存在スル。ソコ
デ今 $e^{it} = \zeta$ トオキ, 更ニ $p_i(t) = g_i(\zeta)$ トカクトキ
ニハ, 結局 (10) ナル関係カラ

$$g_i(\zeta) < \zeta - 1 \quad (i=1,2) \quad g_1(\zeta) + g_2(\zeta) = \zeta - 1$$

トナラネバナラヌ。コノ事カラシテ $g_1(\zeta) = C_1 \zeta + d_1,$
 $g_2(\zeta) = C_2 \zeta + d_2, \quad C_1 + C_2 = 1, \quad C_1, C_2 > 0, \quad d_1 + d_2 = 1$
トナラネバナラヌ。ソコデ結局, $f_1(t) = \exp\{C_1 e^{it} + h_1\},$
 $f_2(t) = \exp\{C_2 e^{it} + h_2\}$ トナリ, $f_1(0) = f_2(0) = 1$ ト
ナルコトカラ, $h_1 = -C_1, \quad h_2 = -C_2$ トナル。即チ
 $f_i(t) = \exp\{C_i (e^{it} - 1)\}, \quad C_1 + C_2 = 1, \quad C_1, C_2 > 0$ ト
ナル。向キニ $m=0$ トシタコトヲ想起スレバ, コレ証明セ
ントシタ 定理 10 / 結論ニ外ナラヌ事ヲ知ル。〔以上〕