



Title	Bessel 微分方程式ニ導カレル微分方程式
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 174, p. 52-56
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74699
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

769. Bessel 微分方程式 = 導カレル 微分方程式

福 原 満 洲 雄 (九大)

Bessel 微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) z = 0$$

= 於テ $y = xz'$ ト置ケバ

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x^2 + n^2}{x^2 - n^2} \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0$$

ヲ得ルガ、逆ニ或ル方程式、例ヘバ (2) が與ヘラレタトキ、コレガ Bessel 微分方程式 (1) ヲ解クコトニ帰着サレルカ否カヲ判断スル一般的方法ガアルカトイフコトガ伊藤誠氏ノ御質問ノ主意デハナイカト思フ、コノ小論ガ多少デモ御参考ニナレバ幸デアル。

1° Bessel 微分方程式ノ特性。ソノ特異点ハ $x=0$, ∞ ガケデアリ、前者ハ確定特異点、後者ハ不確定特異点デアル、 $x=0$ ニ於ケル決定方程式ノ根ハ $\pm n$ デアル、 $x=\infty$ ニ於テハ漸近的ニ

$$y \sim e^{\pm ix} x^{-\frac{1}{2}} [1 + \dots]$$

ト展開サレル解ガ存在スル。逆ニコレガケノ性質ヲ持ツ二階線型微分方程式ハ Bessel 微分方程式デアル。

2° 微分方程式 (2)ノ特異点。 $x=0$, $\pm n$, ∞ ガケデアツテ、 0 , $\pm n$ ハ確定特異点、 ∞ ハ不確定特異点デアル。

$x=0$ = 於ケル決定方程式ノ根ハ Bessel 微分方程式ト同
ジヲ $\pm n$ デアル、 $x=n$ = 於ケル決定方程式ノ根ハ $0, 2$ デ
アル。 0 = 對應スル解ヲ求メテ見ルト

$$y = 1 + \frac{2}{3n}(x-n)^3 + \dots$$

テ對數項ハ現ハレナイ、 n ヲ $-n$ ニ置換ヘテモ方程式ノ形ハ
変ヲナイカラ $x=-n$ = 於ケル決定方程式ノ根ハ $0, 2$ デ 0
= 對應スル解ハ

$$y = 1 - \frac{2}{3n}(x+n)^3 + \dots$$

デアアル、 $x=\infty$ = 於テハ漸近的 =

$$y \sim e^{\pm ix} x^{\frac{1}{2}} [1 + \dots]$$

ト展開サレル解が存在スル。

3° 微分方程式 (2) が Bessel 微分方程式 (1) = 導カ
レル理由、 $x=n$ = 於テ (2) ハ二ツノ解

$$y = (x-n)^2 + \dots, \quad y = 1 + \frac{2}{3n}(x-n)^3 + \dots$$

ヲ持チ、ソレニ對シテ

$$y' = 2(x-n) + \dots, \quad y' = \frac{2}{n}(x-n)^2 + \dots$$

トナル、依ツテ $\varphi_1(x)$ が $x=n$ 正則デ 0 トナラナイ函数
ナラバ

$$z = \frac{\varphi_1(x)}{x-n} y'$$

が満足スル微分方程式ハ二階線型デ、 $x=n$ ヲ確定特異点ト

シテ持テ、ソコニ於ケル決定方程式ノ根ハ 0, 1 デアル。而
モ 0 = 對應スル解ノ展開式中ニ無数項ハ現ハレナイ。

從ツテ $x=n$ ハ最早ニ特異点デハナイ、 $x=-n$ = 於
テモ同様デアルカラ、 $\varphi(x)$ が $x=\pm n$ = 於テ正則デ 0 トナ
ラナイ函数ナラバ

$$z = \frac{\varphi(x)}{x^2 - n^2} y'$$

ガ満足スル微分方程式ハ二階線型デ、 $x=\pm n$ ハ最早ニ特
異点デハナイ。

$x=0$ = 於テ (2) ハニツノ解

$$y = x^n [1 + \dots], \quad y = x^{-n} [1 + \dots]$$

ヲ持ツ、コレニ對シテ

$$y' = nx^{n-1} [1 + \dots], \quad y' = -nx^{-n-1} [1 + \dots]$$

トナルカラ、 $\psi_1(x)$ が $x=0$ デ 0 トナラナイ正則ニ函数
ナラバ

$$z = x \psi_1(x) y'$$

ガ満足スル微分方程式ハ $x=0$ ヲ確定特異点トシテ持テ、ソ
コニ於ケル決定方程式ノ根ハ $\pm n$ デアル。

$x=\infty$ = 於テ漸近的ニ

$$y \sim e^{ix} x^{\frac{1}{2}} [1 + \dots], \quad y \sim e^{-ix} x^{\frac{1}{2}} [1 + \dots]$$

ト展開サレル解ニ對シテハ漸近的ニ

$$y' \sim e^{ix} x^{\frac{1}{2}} [i + \dots], \quad y' \sim e^{-ix} x^{\frac{1}{2}} [-i + \dots]$$

トナル。依ツテ $\psi_2(x)$ が $x=\infty$ = 於テ正則デ 0 トナラナ

イ 函数 + テバ

$$z = x^{-1} \psi_2(x) y'$$

ハ $x = \infty$ = 於テ 漸近的 =

$$z \sim e^{ix} x^{-\frac{1}{2}} [1 + \dots], \quad z \sim e^{-ix} x^{-\frac{1}{2}} [1 + \dots]$$

ト 展開サレル 解ヲ 持ツ。依ッテ

$$(3) \quad z = \frac{x}{x^2 - n^2} y'$$

が満足スルニ階線型微分方程式ハ $0, \pm n, \infty$ = 於イテ

Bessel 微分方程式ノ特性ヲ満足シテキル、ソレが確カニ

Bessel 微分方程式デアレタメニハ $0, \pm n, \infty$ 以外ニ特

異点ヲ持タヌコトヲ確メオバナラナシ、 $x_0 \neq 0, \pm n, \infty$ トス

レバ $x = x_0$ = 於テ (2) ハ

$$y = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{x_0^2} \right) (x - x_0)^2 + \dots,$$

$$y = (x - x_0) + \dots$$

ト 展開サレル 解ヲ 持ツ、前者ノ $(x - x_0)^2$ ノ係數ハ 0 デナ

イカラ 変換 (3) = 依ッテ得ラレル微分方程式ハ $x = x_0$ = 於

テ

$$z = 1 + \dots, \quad z = (x - x_0) + \dots$$

ト 展開サレル 解ヲ 持ツ。依ッテ x_0 ハ 特異点デハナシ。

以上ヲ 変換 (3) ヲ 行ヘバ Bessel 微分方程式トナルコ

トが証明サレタ。コノ 変換ハ 伊藤氏ガ示サレタ 変換ト形ハ異

ツテキルが本質的ニハ異ツタメニデハナシ、實際ニ (3) ヲ用

デ微分シ、(2) ヲ使ヘバ容易ニ $xz' = -y$ ヲ得ル。

要スルニ限定サレタ範圍内ノ函数ヲ使ツテーツノ線型微分方程式カラ他ノ線型微分方程式ニ移リ得ルカ否カ、移リ得ルナラバソノ変換ヲ如何ニシテ求メルカトイフ問題ト確定特異点、不確定特異点ノ理論トノ關係ハ頗ル密接ナル。微分方程式論ノ書物ハカウ言ツタ問題相互ノ關係ニハ言及シテ居ナイガ、我々ハ各種ノ問題相互ノ關係ニモット注意ヲ拂フベキデアラウ。ソレヲ怠ル結果ハ理論ト應用ノ分離的傾向ヲ助長シ、學問全体トシテノ健全ナ發展ヲ阻害スル、デハナイカト思フ。