



Title	大數ノ法則, VI
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 174, p. 61-68
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74701
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

771. 大数ノ法則, VI

北川 敏男 (阪大)

§ 6. I—Vノ総括: 本誌第167号ヨリ第171号マデ、述べ來テ所ヲ茲ニ總括シテ整理シテ置カウ。

相互 = 独立 + 確率変数ノ級数ヲ独立級数、必ズシモ然ラザル即チ一般ノ確率変数ノ級数ヲ連鎖級数ト吾々ハ略称シタ。従ツテ独立級数ハ連鎖級数ノ特別ノ場合デアール。

相互 = 独立 + 確率変数ノ級数ニ関シテハ、近年著シイ研究ノ進展ヲ見タ。吾々ハ連鎖級数ニ関スル反復對數ノ法則ヲ目標トシテ進ンテ來タノデアアルガ、ソノ方法トシテハ、相互 = 独立 + 確率変数ノ級数ノ諸定理ヲ樹テルタメニ用ヒタ方法ヲ拡張シ、コレヲ諸定理ニ於ケル確率変数ノ相互 = 独立トイフコトヲ、モット級イ條件ヲ置キ換ヘルコトニヨリ、連鎖級数ニ関スル諸定理ヲツクツテ行クトイフ方針ヲ進ンテ來タ。

独立級数ニ関スル研究手段トシテハ、五ツノ方法ガアル。

- (1) 標準偏差ノ和ニ著目スル方法
- (2) 散縮度増加ノ原理ヲ利用スル方法
- (3) Kolmogoroffノ不等式ヲ利用スル方法
- (4) 特性函数ノ乗積ノ問題ニ変換スル方法
- (5)' 独立函数ノ方法

ヲ導ケルコトガ出來ル。吾々ハ(1)—(4)ニツイテハ、コレ

等ヲ、如何ニシテ聯鎖級數へ拡張スベキカヲ述べタ。(I—II)
 茲ダ注意シテ置キタイコトハ、〔1〕ト〔3〕トハ同ジ項ニ入レ
 タ方が或ハ宜カ ッタカモ知レヌト云フコト、〔2〕ニ関シテ
 ハ最近 Lévy = ヨリ、更ニ研究が続ケラレテ居ルコトトダ
 アル。〔5〕'ニ関シテハ、コノデハ述べナカッタが將來性ハ期
 待セラレル。

サテ、吾々が、ソレヲ聯鎖級數ニ関スル定理へマデ拡
 張セントシテ研究ノ對象ニ取リ上げタ独立級數ノ定理ハ、今
 マデノトコロ次ノ三ツデアッタ。

定理 A. (Liapounoff) (III, 第 169 号, p. 674)

定理 B. (Kolmogoroff) (V, 第 171 号, p. 742)

定理 C. (Lévy) (V, 第 171 号, p. 747)

以下、上述ノ方針ノモトデ得ラレタ諸結果ヲ、定理 A, B, C
 ト共ニ再記シヨウ。再記トイッテモ、総括對照ノ便宜上、記
 述ノ形式ヲ必要ニ應ジテ変更スルコトモアロウ。但シ I—V
 マデト同ジ番号ヲ記述スルモノハ大々、同一内容デアルカ或
 ハ、証明中ニソレト同一内容ノコトが得ラレテ居ルコトヲ意
 味スル。尚証明ノ道筋ヲモ所々、回顧スル事ニシヨウ。

先必記號上ノ規約:

(α) $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ が知ラレタモノトシテ計
 算セラレタ X_n ノ平均値ヲ $E_{n-1}\{X_n\}$ デ示ス。

$$(\beta) \quad \Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\text{gauss / 分布})$$

$$(\gamma) \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

吾々ハ次ノ定理A。ノ擴張トシテ先ヰ定理3ヲ得タ。

系属 定理	定理A。(独立級数)	定理3 (聯鎖級数)
假 設	(1°) $E\{X_\nu\}=0$ ($\nu=1, 2, \dots, n$)	(C) $E_{\nu-1}\{X_\nu\}=0$ ($\nu=1, 2, \dots, n$)
	(2°) $E\{X_\nu^2\}=\sigma_\nu^2<\infty$ ($\nu=1, 2, \dots, n$)	(C ₁) $\sigma_\nu^2=E_{\nu-1}\{X_\nu^2\}=E\{X_\nu^2\}$ $<\infty$ ($\nu=1, 2, \dots, n$)
	(3°) $ X_\nu <\varepsilon b_n$ ($\nu=1, 2, \dots, n$) 但 $b_n^2\equiv\sigma_1^2+\sigma_2^2+\dots+\sigma_n^2$	(C') $ X_\nu <\varepsilon b_n$ ($\nu=1, 2, \dots, n$) 但 $b_n^2\equiv\sigma_1^2+\sigma_2^2+\dots+\sigma_n^2$
結 論	$\left Pr.\left\{\frac{S_n}{b_n}<x\right\}-\Phi(x)\right <6\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ (スベテ実数 x =對シテ)	

茲ニ云フマデモナク、(C₁)ハ、 $E_{\nu-1}\{X_\nu^2\}=E\{X_\nu^2\}$ トイフ假定ト、 $E_{\nu-1}\{X_\nu^2\}<\infty$ トイフ假定ト、ニツカラナッテ居ル。(≡ハ定義式ノ意)

定理3ノ証明ハ、III (第169号、p. 675—680) ナ述ベタ。ソノ骨子ハ分布函数ノ Faltungrelation ヲ立チ入ッテ調ベタモノデアッテ方法〔I〕ニ属スル。サテ、吾々ハ條件(C₁)ヲ除去スルコトニ、次ノ拡張ノ方向ヲトツタ。即チ $\sigma_\nu\equiv E_{\nu-1}\{X_\nu^2\}$ ナルモノハ、 $E\{X_\nu^2\}$ ニ等シイトイフ假定ヲ捨テル、ソノタメニ、ソレハ常数ニラズシテ一般ニ、確率函数トシテ取扱フ必要ヲ生ジタ。 $b_n^2\equiv\sigma_1^2+\sigma_2^2+\dots+\sigma_n^2$ ハ、コノトキ確率函数デアルカラ、(C')ナル式ハ、コノ場合意味ガナイ。

ソコヲ、Lévyニ従ヒ、聯鎖級数ノ和 $X_1+X_2+\dots$

-----+ $\sum_n$ の代り =、各正ノ実数 $t =$ 對シテ 定義セラレル
所ノ $t =$ 於ケル 切断 + レ概念 $S(t)$ ヲ導入シタ、(IV, 第170,
p. 125)、コレニ由レバ

定理4. 聯鎖級数 = 關スル 定理3 = 於テ 條件
(C₁) 及ビ (C') ヲバ 次ノ 條件ヲ 与ヘテモ 定理3ノ 結論
ハ 成立ツ:

(C₂) $S(t)$ ノ 各項ガ 絶對値ニ 於テ $\varepsilon\sqrt{t}$ ヲ
超ヘナイ。

以上ヲ 整理スルト: 三定理ノ 相互關係並ビニ、拡張ノ
要點ハ、次ノ 表ヲ 標記的ニ 示サレヌ。

定理 A. $\subset$ 定理3 $\subset$ 定理4	
独立性ノ 除去	(C ₁), (C')ノ 除去

次ニ、吾々ハ 更ニ 進ンテ 定理5, 6ヲ 述べタ。コレハ、
更スルニ、定理4ハ 未ダ 補助定理ヲ アツテ、有限個ノ 確率
変数 = 關スル 結果デアルカラ、上述ノ n ヲ $\infty =$ 、或ハ $S(t)$
ニテ t ヲ $\infty =$ マデナシタ場合ノ 結果ヲ 形成シタケレバナラ
ヌ、ソレヲ 実行シタノガ 定理5, 6デアアル。

独立級数 = 關スル 定理A. カラハ、直チニ、

定理A. 独立系列 $\{X_\nu\} =$ 於テ
(1°) $E\{X_\nu\} = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots$)
(2°) $E\{X_\nu^2\} \equiv \sigma_\nu^2 < \infty$

(3^o) $|\bar{X}_\nu| < k$ ($\nu = 1, 2, \dots$) 有界

(3^o) $b_n^2 \equiv \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) トキハ、

$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Pr.} \left\{ \frac{S_n}{b_n} < x \right\} = \Phi(x)$ ガスベテノ實數

x ニ對シテ成立ツ。

ナル結果ヲ得ラレルノニ對シ、定理4ノ無限個ノ確率変數列
ヘノ拡張ニ當ツテハ若干ノ困難が存在スル。ソレハ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu^2$
ハ確率變數列デアールカラデアアル。コノ間ノ事情ニ關シテハ、
定理5ノ敘述ニ於テ假定(ii)ノ存在、假定(iii)ノ敘述ノ複雑
ガ、コノカラ生ズルコトヲ附言シタイノデアアル。定理5ニ
定理6デアアル。定理Aノ拡張トシテ得タ最良ノ結果ハ定理6
デアアル。

定理6 聯鎖系列 $\{\bar{X}_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$)ニ於テ

(1^o) $E_{\nu-1}\{\bar{X}_\nu\} = 0$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$)

(2^o) $\sigma_\nu^2 \equiv E_{\nu-1}\{\bar{X}_\nu^2\}$ トオクトキ、聯鎖確率變
數列 $\{\sigma_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$)ニ於テ、 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_{\nu,0}^2 = \infty$ ト

ナルヤリナ $\sigma_\nu = \sigma_{\nu,0}$ ナル數列 $\{\sigma_{\nu,0}\}$ ニ對シテハ、

$n(t)$ ヲバ、 $\sigma_{1,0}^2 + \sigma_{2,0}^2 + \dots + \sigma_{n,0}^2 \geq t$ ヲ満足スル最
小ノ自然數トスルトキ、次ノヤリナ t ノ函数 $\varepsilon(t)$ ヲ

バ、 $\{\sigma_{\nu,0}\}$ ニ從屬シテ撰ガコトガ出來ル：

(i) $|\bar{X}_\nu| < \varepsilon(t) \sqrt{t}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n(t)$)

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$

然ルトキハ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr. \left\{ H_t, \frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x \right\} = \beta \Phi(x)$$

かスベテノ実数 x ニ對シテ成立ツ。但シ $\sum \sigma_v^2$ ガ発散スル確率ヲ β トシ、 H_t ハ、 t ニ對シテ $S(t)$ ガ定義サレル事象ヲ意味スル。

注意: $\beta=1$ トナバ、定理6カラ定理5ガ得ヲレル、コトキハ、

$\Pr. \{H_t\} = 1$, 因ツテ $\Pr. \left\{ H_t, \frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x \right\} = \Pr. \left\{ \frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x \right\}$ トナル。

定理Aニ關スル今マデノ結果ハ以上ノ如クデアアル。

次ニ定理B⁽¹⁾ニ移ル。コレニ對應スル結果トシテ得テ定理7ハ次ノ關係ニアル:

仮定	定理B (独立級数)		定理7 (連鎖級数)	
假設	(1) ^o $E\{X_v\} = 0 \quad (v=1, 2, \dots)$		(C) $E_{v-1}\{X_v\} = 0 \quad (v=1, 2, 3, \dots)$	
	(2) ^o $\sigma_v^2 = E\{X_v^2\} < \infty$ ($v=1, 2, 3, \dots$)		(2) ^o $ X_v < k$ (常数) ($v=1, 2, 3, \dots$)	
結論	$\sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v^2 = \infty$ トキ $\sum_{v=1}^{\infty} X_v$ ノ收斂 スル確率ハ0	$\sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v^2 < \infty$ トキ $\sum_{v=1}^{\infty} X_v$ ノ発散 スル確率ハ0	$\sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v^2$ ガ発散 シ且ツ $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ ガ收斂スル確 率ハ0	$\sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v^2$ ガ收斂 シ且ツ $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ ガ発散スル確 率ハ0

(1) 第171号, p.742 定理Bノ敘述ニ於テ、 σ_k トアルノハ、スベテ σ_k^2 ノ誤記デアリマス。

條件(2)ハ條件(2°)ヲ含マナイカラ、定理7ハ定理Bノ拡張デアルト云ヒ得ナイ。

茲デ注意スベキコトハ、独立級数ニ関スル限りニ於テハ、ソノ收斂スル確率ハ0カ1カ何レカデアツテ、ソノ他ノ0< α <1ナル α ニナルコトハナイ。

従ツテ、 $\sum X_n$ ノ收斂スル確率が0カ、発散スル確率が0カ、コノ二ツノ場合ノ必ズ何レカ一方ガガコル。シカラバ、 $\sum \sigma_n^2 < \infty$ ニヨツテ、ソレガ特徴付ケラレルトモ云ヒ得ル。然レ、 σ_n^2 ナルモノガ存在セヌトキニハ如何、コノトキニハ、コノ方法即チ〔1〕標準偏差ノ和ニ著目スル方法ハ新鋭〔2〕ヲオキカヘラレルコトハ良ク知ラレタコトデアアル。連鎖系ノ場合ニモソレニ相當シタコトヲ行ツテ、定理7(コレハ前述ノ如ク未ダ定理Bノ拡張ニスラナツテ居ナイ!)ノ拡張ヲ試ミントスルニハ、〔2〕ノ方法ヲ、連鎖級数ニツイテ飛躍サセテ置ク必要ガアロウ。

次ニ定理Cニ移ル。

定理C(第17ノ号、p. 747)ガ独立系列ニ関スル中心極限定理トシテ、独立系列ニ関スル決定的ナーツノ結果デアアルコトハ良ク知ラレタコトデアアル。ソレハ、必充條件ヲ主張スルモノデアアル。コレニ對シテ、定理Cノ條件ノ充分デアアルトイフ半面ノ結果ニ對應スルモノトシテ、定理8ヲ導ケタ。不幸ニシテ、定理8ハ問題ノ半面ノ拡張トマデハナツテ居ナイ。ソコニ改良ノ餘地ガアル。但シ、次ノコトハ云ヘルノデアル。即チ或ル事情ノモトニ於テハ、定理8ノ條件ハ又一

ツノ必要條件ヲアルト云フ事デアル。コゝカラ又筆ヲ進メテ
行クコトニシヨウ。