



Title	群ニ於ケル Mass ト Topologie ノ関係ニツイテ (A.Weilノ定理ノ証明) I
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 175, p. 69-102
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74702
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

772. 群 = 於ケル *Maß* ト *Topologie* ノ 関係 ニツイテ (A. Weil, 定理ノ証明) I

小平 邦彦 (東京)

数年前ノ C. R. = 於テ A. Weil ハ 群, *Maß* ト *Topologie* ノ 関 = 密接ナル 関係ガアルコトヲ 指摘シテキル^{*)} ———
群 G = *Topologie* ガ 與ヘラレタトキ, ソノ *Topologie* = 關シテ $y^{-1}x$ ガ 連続ナラベ, 吾々ハ G ハ *Topologische Gruppe* デアルトイフノデアリツタ. カリノ如キ *Topologie* ハ G ノ 群トシテノ 演算ト或ル 關係ヲ有スル. コノ = 於テ *Topologie* ノ代リ = *Maß* ヲ 考ヘタナラバドウトルデアラウカ? 一般ニ, *Leumann* = 従ツテ, *Maß* ヲ有スル空間ノ *Abbildung* ハ, *meßbar* ナ集合ノ *Urbild* ガ常ニ *meßbar* ナルトキ *meßbar* デアルトイフコト = スレバ, $y^{-1}x$ ノ *Stetigkeit* = 相當スルモノハ, $G \times G$ ヲ G ヘ *abbilden* スル *Abbildung* $y^{-1}x$ ノ *Meßbarkeit* デアラウ. Weil ハ $y^{-1}x$ ガ *meßbar* デアルトイフコトヲ, $f(x)$ ガ *meßbar* ナ函数ナラバ $f(y^{-1}x)$ モ *meßbar* デアル. トイフ形ニ言ヒ現ハシ, カリノ如キ性質ヲモツ G ノ *Maß* = $\wedge$ *ein-eindeutig* = $y^{-1}x$ ガ 連続ナル *Topologie* ガ 對應シ. コノ *Topologie* = 關スル G ノ „*Kompaktifizierung*” ヲ $\bar{G}$ トスレバ, $\bar{G}$ ハ *im Kleinen kompakt* ナ群デアリツテ, G = 豫ジメ 與ヘラレデアツタ

*) C. R. Tom. 272, 1147 (1936)

Map は $\overline{G}$, Idaar , Map ト一致スル, ト主張スルノ
ガアルが, コノ証明ハ未だ為表サレナイ様ガアル。

吾々ハ Separabilität ノ假定, 下ニ於テデハアルケ
レドモ, 兎モ得コノーツノ証明ヲ與ヘルコトが出来, 又コレニ關係
シタ二三ノ定理ヲ証明スル事が出来タカラ, 之ヲコニ書イテ見タイト思フ。

先ツ §1 = 於テ必要ナ概念ヲ説明シ, §2 = 於テ Idaar /
 map = 關スル主要ナ定理トソノ証明ヲ述べ, §3 = 於テ Idaar
ノ Map 以外 = モ, Idaar / $\text{Map} = \text{ヨツテ}$, $y^{-1}x$ が
 meßbar デアレヌウ + links-invariant + Map が
 induzieren サレルコトヲ述ベル。コノデ吾々ハ $y^{-1}x$ が
 meßbar + links-invariant + Map ヲ Weil,
 Map ト名付ケル。§4 = 於テ Weil, Map ガ Idaar /
 $\text{Map} = \text{ヨツテ}$ induzieren サレタ Map ナルタメノ必要
且ツ充分ナル條件ヲ述ベル。コレハ或ル意味デ Idaar / Map
1. Eindeutigkeitsatz ノ拡張デアルト考ヘラレル。
§5 = 於テハ先ガ $\text{Map} =$ 關スル Separabilität ノ定義
ヲ述べ, separabel + Weil / Map ハ, $\text{eindeutig} =$
定マル $\text{im Kleinen kompakt}$ + 群 / Idaar / $\text{Map} =$
 ヨツテ induzieren サレタ Map ナルコトヲ証明スル。コ
レハ即チ Weil, 定理ニ他ナラナイ。§6 = 於テ以上ノ結果
ヲ, シバラク Idaar / Map カラ離レテ, separabel +
 Weil / Map ト $\text{separabel links-invariant}$ + all-
 gemeine Metrik ノ間ノ關係トシテ考案スル。コノデ
 allgemeine Metrik トイフノハ, 三角不等式ハ成立スル

ケレドモ、必ずしも *Trennungsaxiom* を満足シナイ
Metrik のコトデアル。ユークリッド空間 / *Metrik* と
Lebesgue / *Maß* = 關シテハ、*Borel set* ハ *meßbar*
 デアツテ、逆 = *meßbar* + 集合 = 對シテハコレト *Maß* の
 ヲ除イテ一致スル *Borel* 集合が存在スルコトが容易ニナル。
 吾々ハ一般ニ群 / *separabel* + *Weil* / *Maß* と *separa-*
bel links-invariant + *allgemeine Metrik* /
 間 = カク、如キ關係が存在スルトキ、コノ *Metrik* ハ *Maß*
 = 屬スル *Metrik* デアルトイフコトニシ、*separabel* +
Weil / *Maß* = ハコレ = 屬スル *Metrik* が存在シテ一意
 的ニ定マルコト、逆 = *separabel* + *Weil* / *Maß* ハコ
 レニ屬スル *Metrik* が與ヘレバ *eindeutig* = 定マルコ
 トヲ証明スル。又、*separabel* + *Weil* / *Maß* トソレ
 = 屬スル *Metrik* = 關シテハ、"density" トシテ "upper
 density" ノミヲ考ヘルナラバ、所謂 "density theorem"
 及ビコレニ相當スル *Überdeckungssatz* が成立スルコト
 ヲ証明シ、逆 = , *separabel* + *Weil* / *Maß* と *separa-*
bel links-invariant + *allgemeine Metrik* = 關
 シテ "density theorem"、又ハ *Überdeckungssatz*
 が成立スルナラバ、コノ *Metrik* ハ *separabel* +
Weil / *Maß* = 屬スル *Metrik* デナレバナラナイコト
 ヲ示ス。最後ノ § 7 = 於テ、*Weil* / *Maß* ヲ擴張スル問
 題ヲ考察シ、又コレニ關スル例ヲ述ベル。

§ 1. Einleitung

1. Maß. 空間 R ノ スベテ ノ 部分集合 $A =$ 對シテ 定義
サレタ 有限又ハ 無限大ノ 値ヲ トル *nicht-negativ* ノ 集合
函数 $m^*(A)$ が 次ノ ニツノ 條件 1), 2) ヲ 満足スルトキ, $m^*(A)$
ヲ R ノ *Carathéodory* ノ *äußeres Maß* トイフ:

$$1) \quad A \subset B \text{ ナラバ } m^*(A) \leq m^*(B)$$

$$2) \quad m^*(A_1 + A_2 + A_3 + \dots) \leq m^*(A_1) + m^*(A_2) + \dots$$

コノ トキ, R ノ 部分集合 A が, スベテノ $X \subset R =$ 對シテ

$$m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X - A)$$

ナル 條件ヲ 満足スレナラバ, A . *m-meßbar* デアルトイ
ヒ, $m^*(A)$ ヲ $m(A)$ ト書イテ, $m(A)$ ヲ A ノ *Maß* トヨブ。
 R ノ 任意ノ 部分集合 $X =$ 對シテ 必ず

$$A \supset X, \quad m(A) = m^*(X)$$

ナル *m-meßbar* ノ 部分集合 A が 存在スルトキ m^* ハ
regular デアルトイハレル。

Maß ノ 定義. 吾々ハ *regular*¹⁾ デアルテ, 條件:

(a) R ハ 高々 可附属個ノ 有限ノ *Maß* ヲ 有スル *m-meßbar*
ノ 部分集合ノ 和デアル:

$$R = \sum_{j=1}^{\infty} A_j, \quad m(A_j) < +\infty;$$

1) m^* が *regular* ナイトキニハ, *m-meßbar* ノ 集合ノ
Maß ヲ 求ヘナイテ, m^* ヲ *regular* ノ *äußeres Maß* =
直スコトが出来ル。

ヲ満足スル Caratheodory / äußeres Maß m^* ヲ,
 äußeres Maß, 或ハ單 = $\mathbb{R}$ / Maß トイフコト = スル。

$\mathbb{R}$ デ定義サレタ複素数値ヲトル函数 $f(x)$ ハ, 複素平面
 上 / 任意 / 開集合 O / Urbild $f^{-1}(O)$ が常 = m -meßbar
 ナルトキ, m -meßbar デアルトイフ。 m -meßbar ナ函
 数 = 對シテハ "Lebesgue" 積分ヲ考ヘルコトが出来ル。

コレヲ

$$\int_A f(x) m(dx)$$

デ現ハス。但シ A ハ積分範囲デアル。

$$\int_A |f(x)| m(dx) < +\infty$$

ナルトキ $f(x)$ ハ A デ "summierbar" デアルトイフ。コ
 ノトキ

$$\int_A f(x) m(dx)$$

ハ "絶対収斂" デアル。

2. Borel 族。吾々ハ G / 部分集合族 $\mathcal{F}$ が次 / 條
 件 1), 2), 3) ヲ満足スルトキ, $\mathcal{F}$ ヲ Borel 族トヨブコト =
 スル:

1) $A, B \in \mathcal{F}$ ナラバ $A+B, A-B, A \cap B \in \mathcal{F}$ 。

2) $A_j (j=1, 2, \dots) \in \mathcal{F}$ ナラバ $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$ 。

3) $R = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, A_j \in \mathcal{F}$ ナラバ A_j が存在スル。

$\mathcal{C}$ が Borel 族ナルトキ $\widetilde{\mathcal{C}}$ = 属スル集合ノ高々可附番個ノ和ノ全体ハ亦 Borel 族ヲ作ル。コレヲ $\widetilde{\mathcal{C}}$ デ現ハス。記号ヲ書ケバ

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \left(X; X = \sum_{j=1}^{\infty} A_j, A_j \in \mathcal{C} \right)^{2)}$$

$\widetilde{\mathcal{C}}$ = 於テハ, 明ラカ =

$$A_j = (j=1, 2, \dots) \in \widetilde{\mathcal{C}} \text{ + ラバ } \sum_{j=1}^{\infty} A_j \in \widetilde{\mathcal{C}}$$

が成立スル。

R ノ函数 $f(x)$ ハ開集合 O ノ $f = \text{ヨル Urbild } f^{-1}(O)$ が $\widetilde{\mathcal{C}}$ = 含マレルトキ, $\mathcal{C}$ -meßbar デアルトイフ。

m^* が R ノ Maß ナルトキ, 有限ノ Maß $\mu \in \mathcal{M}$ m -meßbar ナ部分集合ノ全体ハ Borel 族ヲ作ル。コレヲ (m) デ現ハス:

$$(m) = (A; m(A) < +\infty)$$

然ルトキハ (m) -meßbar ハ m -meßbar ト一致スル。

Borel 族 $\mathcal{C}$ = 於テ有限ノ値ヲトル nicht-negativ, total additiv ナル集合函数 μ が與ヘラレタトキ,

$$X \subset R = \text{對シテ,}$$

2) 一般ニ f ナル性質ヲモツ元 x 全体ヨリ成ル集合ヲ $(x; f(x))$ ナル記号ヲ現ハスコトニスル。コレハ *Heumann* ノ記号デアル。

$$\mu^*(X) = \underline{\lim} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \quad \sum_{j=1}^{\infty} A_j \supset X, A_j \in \mathcal{F};$$

が定義せられた μ^* は明らに $\mathbb{R}^+$ Map である。 $\mu^* \neq \mu =$
 3) として μ として $\mathbb{R}^+$ Map と名付けれ。

total additive + 乗数函数 $\mu = \mu(A); A \in \mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} \subset (m), \quad m(A) = 0 \text{ ならば } \mu(A) = 0$$

上の条件を満足するものを m -absolut stetig であるとい
 う。このとき

Rikodym の定理。 $\mu = \mu(A), A \in \mathcal{F}$ が m -absolut
 stetig であるとき、 μ は $\mathcal{F}$ -measurable 函数 $\varphi(x) =$
 3) として

$$\mu(A) = \int_A \varphi(x) m(dx), \quad A \in \mathcal{F}$$

なる形に現はされる。 $\varphi(x)$ は m -Map の点を除けば μ
 = 3) として eindeutig = 定まる。
 が成立する。

3. Fubini の定理。 m^* は空間 $\mathbb{R}^+$ Map とす
 る。このとき cartesianes Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の任意の
 部分集合 Γ に対して、 $m m^*(\Gamma)$ を次の如く定義する：

$$m m^*(\Gamma) = \underline{\lim} \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) m^*(B_j),$$

$$\sum_j A_j \times B_j \supset \Gamma;$$

但し $\Gamma \neq \emptyset$ ならば、 $\sum_j A_j \times B_j \supset \Gamma$ となるような $A_j,$

3) 証明は Sakai: Theory of Integral; p. 32-36

$B_i \subset R) = \cup \{ \text{Teil } \nu \in \nu \text{ Teil } \nu \}. m m^*, \text{ 空間 } R \times R, \text{ Map である. これを Produkt-map と名付ケル. 明ラカ } = A, B \subset R \text{ が } m\text{-meßbar とル トキハ } A \times B \text{ ハ } m m\text{-meßbar である.}$

$$m m(A \times B) = m(A) m(B).$$

$R, \text{ 二変数, 函数 } f(x, y) \text{ ハ } R \times R \text{ ノ上ノ函数ト考ヘラレル. } R \times R \text{ ノ函数トシテ } f(x, y) \text{ が } m m\text{-meßbar とル トキ, 二変数, 函数 } f(x, y) \text{ ハ } m\text{-meßbar であるトイヒ, ソノ積分ヲ}$

$$\int f(x, y) m m(d(x, y))$$

又ハ二重積分:

$$\iint f(x, y) m(dx) m(dy)$$

ヲ現ハス. 然レトキハ

Fubiniノ定理. 二変数, 函数 $f(x, y)$ が $m m\text{-meßbar}$ とル トキハ, $m\text{-Map } 0, x \text{ヲ除ケバ, } f(x, y) \text{ ハ } y \text{ノ函数トシテ } m\text{-meßbar である. } f(x, y) \text{ が } A \times B \text{ である } \text{summierbar とル トキハ, } A, m\text{-Map } 0, x \text{ヲ除ケバ, } f(x, y) \text{ ハ } y = \cup \{ \text{Teil } B \text{ である } \text{summierbar である. } x \text{ノ函数}$

$$\int_B f(x, y) m(dy)$$

ハ A である summierbar , 且

$$\iint_{A \times B} f(x, y) m(dx) m(dy) = \int_A m(dx) \int_B f(x, y) m(dy)$$

が成立スル。従ツテ又

$$\int_A m(dx) \int_B f(x, y) m(dy) = \int_B m(dy) \int_A f(x, y) m(dx)$$

4. Hilbert空間. $m^* \in \mathbb{R}$, Maß トスル, コ
トキ

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 m(dx) < +\infty$$

トル m -meßbar 函数 $f(x)$, 全体ハ

$$(f, g) = (f, g)_m = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} m(dx)$$

ヲ inneres Produkt トスル vollständig +, 必ズ
シテ separabel ナハタイ „Hilbert 空間“ ヲ作ル。コ
レヲ l_2 , 或ハ $l_2^{(m)}$ ナ現ハス。 $l_2^{(m)}$ 元 f , „長さ“ヲ
 $\|f\|$, 或ハ $\|f\|_m$ ト書ク:

$$\|f\| = \|f\|_m = \sqrt{(f, f)_m}$$

一般ニ $\mathbb{R}$, 部分集合 A , „charakteristische
Funktion“ ヲ $\chi_A(x)$ ナ現ハス: スナハチ

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \text{トキ} \\ 0 & \text{然ラザルトキ} \end{cases}$$

然ルトキハ, $A, B \in (m)$ ナラバ 明ラカニ

$$\|e_A - e_B\| = m(A-B) + m(B-A)$$

コレヲ $m =$ ヨツテ定メテ レル A ト B ノ 距離 ト名付ケ $d_m(A, B)$
ヲ現ハス:

$$\begin{aligned} d_m(A, B) &= m(A-B) + m(B-A) \\ &= \|e_A - e_B\|_m. \end{aligned}$$

然レ トキハ

定理 I. Hilbert 空間 $l_2^{(m)}_R$ が separabel + ル タ
メノ 必要且充分ノ 条件ハ, Borel 族 (m) が 距離 $d_m =$
閉シテ separabel + ル コトデアル。

証明 ⁴⁾ ハ 殆ンド明白デアアル。

4) 充分ナルコトノ 証明ハ, 例ヘバ Neumann: Allgemeine
Eigenwert theorie Hermitescher Operatoren
(Math. Ann. 102) 参照。

必要ナルコトハ 例ヘバ 次ノ 如ク スレバナル: $f_j(x)$ ($j=1, 2,$
 $3, \dots$) ヲ $l_2^{(m)}_R$ 中ニ überall dicht + 可閉番集合トシ,
 $|f_j(x)| \rightarrow 1 \leq \frac{1}{2}$ + ル x ノ 集合ヲ A_j トスル。 $A \in (m)$ 及び
 $\varepsilon > 0$ が任意ニ 與ヘラレタトキ

$$\|e_A - f_j\|^2 < \varepsilon$$

+ ル f_j がアル。 然ルニ

$$\|e_A - f_j\|^2 = \int_A |1 - f_j(x)|^2 m(dx) + \int_{G-A} |f_j(x)|^2 m(dx)$$

デアツテ

$$x \in A - A_j \quad + \quad \text{バ} \quad |1 - f_j(x)| \geq \frac{1}{2}.$$

$$x \in A_j - A \quad + \quad \text{バ} \quad |f_j(x)| \geq \frac{1}{2}$$

(次頁ヘツツテ)

5. Beschränkte Operatoren. $\mathcal{H}$ separabel + Hilbert空間, $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ $\mathcal{H}$ / beschränkte Operatoren 全体 / 作る Ring トスル。 $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ / 元 P_0 = 対シテ,

$$\mathcal{U}(P_0; f_1, \dots, f_k, \varepsilon) \\ = \{P; \|(P - P_0)f_j\| < \varepsilon, 1 \leq j \leq k\}$$

ヲ, $f_1, \dots, f_k$ = ヨツテ定メラレル P_0 / ε -Umgebung ト名付ケル。コノ $\mathcal{U}(P; f_1, \dots, f_k, \varepsilon)$ / 全体ヲ Umgebungssystem トシテ定メラレル $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ / Topologie ヲ stark + Topologie トヨブ。 $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ ハコノ Topologie = 関シテ vollständig + topologischer linearer Raum ナル。⁵⁾

$\mathcal{H}$ / unitär + Operator ヲ $U, V, \text{etc.}$ ナ環ハシ, unitäre Operatoren 全体 / 作る群ヲ $\mathcal{U}_{\mathcal{H}}$ ナ環ハス。明カ = $\mathcal{U}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ ナアル。

定理2. $\mathcal{U}_{\mathcal{H}}$ ハ stark + Topologie = 関シテ abzählbare Basis ヲ有スル vollständig + topologische
(脚註4ノツビキ)

ナアルカラ

$$\frac{1}{4}m(A - A_j) + \frac{1}{4}m(A_j - A) < \varepsilon$$

ス + ハチ

$$d_m(A, A_j) < 4\varepsilon$$

故 = $A_j (j=1, 2, 3, \dots) \wedge (m) \neq d_m$ -überall dicht ナアル。

5) Heumann: Topologically complete linear space
(Trans. Vol. 37) 参照。

Gruppe $\mathcal{A}$ である。 $\psi_j (j=1, 2, \dots) \in \mathcal{H}_\mathcal{A}$ である。

$$[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots] = \mathcal{H}_\mathcal{A}^{(6)} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|\psi_j\| < +\infty$$

それより更に

$$\rho_\psi(u, v) = \sum_{j=1}^{\infty} \|(u-v)\psi_j\|, \quad u, v \in \mathcal{U}_\mathcal{H}$$

によって定義された ρ_ψ は $\mathcal{U}_\mathcal{H}$ 上の links-invariant かつ
Metrik である。 ψ_j の選定方法に関係なく $\mathcal{U}_\mathcal{H}$ 上の stark
かつ Topologie である。 従って $\mathcal{U}_\mathcal{H}$ 上の Metrik ρ_ψ =
開かつ vollständig である。⁷⁾

証明 I. u, v は連続である。 何となく

6) $[\psi_1, \psi_2, \dots]$ は $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ を含む 最小の abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit である。

7) 一般に topologische Gruppe G に対して

$$\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} a_j^{-1} a_k = 1$$

かつ Folge $a_j (j=1, 2, \dots)$ が Fundamentalfolge となる。 Fundamentalfolge が必ず収束する
とき、 G は vollständig である。

G 上の Topologie が links-invariant かつ Metrik $\rho(a, b)$ = によって与えられるとき、

$$\rho(a_j^{-1} a_k, 1) = \rho(a_k, a_j)$$

であるから、 G 上の Vollständigkeit と Metrik ρ
= 開かつ Vollständigkeit と一致する。

$$U \in \mathcal{U}(U_0; V_0 f_1, \dots, V_0 f_k, \varepsilon),$$

$$V \in \mathcal{U}(V_0; f_1, \dots, f_k, \varepsilon)$$

トスレバ

$$\|(U V - U_0 V_0) f_j\|$$

$$\leq \|U(V - V_0) f_j\| + \|(U - U_0) V_0 f_j\| < 2\varepsilon$$

デアールカラ

$$U \cdot V \in \mathcal{U}(U_0 V_0; f_1, \dots, f_k, \varepsilon)$$

証明 II U^{-1} は U = ツイテ連続デアール。何トナレバ

$$U \in \mathcal{U}(U_0; U_0^{-1} f_1, \dots, U_0^{-1} f_k, \varepsilon)$$

トスレバ

$$\|(U - U_0) U_0^{-1} f_j\| < \varepsilon$$

故 = U^{-1} が unitär デアールカラ

$$\|(U^{-1} - U_0^{-1}) f_j\| < \varepsilon$$

故 =

$$U^{-1} \in \mathcal{U}(U_0^{-1}; f_1, \dots, f_k, \varepsilon)$$

証明 III. ρ_ψ が links-invariant デ $\mathbb{U}_{\mathcal{H}}$, stark + Topologie 7 興ヘルコトハ明白デアール。従ッテ $\mathbb{U}_{\mathcal{H}}$ は separabel デアールカラ, abzählbare Basis 7 有スルコトガ合ル。⁸⁾

証明 IV. $\mathbb{U}_{\mathcal{H}}$ は vollständig デアール。何トナレバ U_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) 7 Fundamentalfolge トスレバ, 任意 $f \in \mathcal{H}$ = 對シテ

8) 一般 = metrischer Raum が separabel + 7 7, ヴレハ abzählbare Basis 7 有スル。

$$\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \| (u_j^T u_k - 1) f \| = 0,$$

従って

$$\lim \| (u_k - u_j) f \| = 0;$$

スナハチ $stack + Topologie$ で

$$\lim (u_k - u_j) = 0$$

デアル。故に B_{H_j} が $vollständig$ で、 $U_{H_j} \cap B_{H_j}$ 内が $abgeschlossen$ デアルカラ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$$

ナル u が存在スル。(証明終)

§ 2. Haar, Maß

1. Haar, Maß. 吾々ハコゝ § = 於テ Haar, Maß, 諸性質 = ツイテ述ベル。先ヅ定義カラ始メヨウ:

Haar, Maß, 定義. abzählbare Basis 有スル im Kleinen kompakt 群 G , Maß μ^* が次ノ條件 1) — 4) を満足スルトキ, μ^* 7 G 1 Haar, Maß トイフ:

$$1) \mu^* \text{ハ links-invariant デアル: } \mu^*(aA) = \mu^*(A), \\ a \in G.$$

$$2) A \text{ が kompakt}^{9)} \text{ + } \mu^*(A) < +\infty$$

$$3) G \text{ 1 Borel set ハ } \mu\text{-meßbar デアル。}$$

$$4) G \text{ 1 任意ノ部分集合 } A = \text{對シテ}$$

$$B \supset A, \mu^*(A) = \mu(B)$$

(附加 9) 次頁へ)

+ル Borel set B が存在スル。

従って $\text{Idaar}, \text{Map} =$ 於てハ Baire 1 函数ハスベ
テ measurable デアルヲ, 注意, measurable + 函数 = 對シテ,
コレト Map のヲ除イテ一致スル Baire 1 函数が存在ス
ル。

定理3. μ^* が Idaar, Map + ルトテ,
Produkt-map $\mu\mu^*$ ¹⁰⁾ ハ Idaar, Map デ
アル。

証明. $\mu\mu^*$ が Idaar, Map / 満足スベキ条件
1) - 4) を満足スルコトヲ確メレバヨイ。コノ中 1) - 3) ハ明
白デアル。4) が成立スルコトヲ示スベキニ, Γ を $\text{Idaar} \times \text{Idaar}$ / 性
意, 部分集合トスル。然ルトテハ

$$\mu\mu^*(\Gamma) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) \mu^*(B_j),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \supset \Gamma.$$

コノ式 = 於テ μ^* ハ Idaar, Map デアルカラ, A_j, B_j ハ
 Idaar / Borel set ト考ヘテヨイ。従ツテ $A_j^{(N)}, B_j^{(N)}$ + ル Borel
set を適當ニ選ベバ

$$\mu\mu^*(\Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j^{(N)}) \mu(B_j^{(N)}),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j^{(N)} \times B_j^{(N)} \supset \Gamma$$

9) 吾々ハ "kompakt" を kompakt in Idaar / 意味ニ用ヒル。

10) $\mu\mu^*$ / 定義 = ヲイテハ §1. Nr 3 参照。

コゝ = 於テ

$$\Delta = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A_j^{(N)} \times B_j^{(N)}$$

トオケバ, 明ヲカ = Δ , Γ ヲ含ム Borel set ナリツテ,

$$\begin{aligned} \mu\mu(\Delta) &\leq \mu\mu\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j^{(N)} \times B_j^{(N)}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j^{(N)}) \mu(B_j^{(N)}) \end{aligned}$$

故 = $N \rightarrow \infty$ トスレバ, $\Delta \supset \Gamma$ ナルカラ

$$\mu\mu(\Delta) = \mu\mu^*(\Gamma). \quad (\text{証明終})$$

2. Eindeutigkeit. コゝヲ Haar, Maß, 一意性ヲ証明スル。

定理4. (Eindeutigkeitssatz) Abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt + 群 G , Haar, Maß, multiplikativ + Konstant ヲ考ヘ = 入レ + ケレバ, eindeutig = 定マル。

証明. (B) ヲ G , kompakt + Borel set 全体ヨリ成ル Borel 族トスル。 μ_1^*, μ_2^* ヲ G , ニツ, Haar, Maß トスレバ

$$\mu^*(A) = \mu_1^*(A) + \mu_2^*(A), \quad A \subset G$$

= ヨツテ 定義サレタ $\mu^* \in \mathfrak{M}$ Haar, Maß ナリツテ, (B) ナ考ヘレバ, μ_1 ハ μ -absolut-stetig + total additive Mengenfunktion ナル。従ツテ, Nikodym, 定理 = ヨツテ

$$\mu_1(B) = \int_B \varphi(x) \mu(dx) \quad B \in \mathcal{B}$$

＋ル Baire, 函数 $\varphi(x)$ が存在スル。然ル μ_1, μ 共
 $= \text{links-invariant}$ ナルカラ, 任意, $a \in \mathcal{O}_f =$ 對
シテ

$$\mu_1(B) = \int_B \varphi(a^{-1}x) \mu(dx)$$

故 $=$, $\varphi(a^{-1}x)$ と $\varphi(x)$ は μ -Maß の 7 除イテ 一致スル:
スナハチ

$$\int_{\mathcal{O}_f} |\varphi(a^{-1}x) - \varphi(x)| \mu(dx) = 0$$

故 $=$

$$\int_{\mathcal{O}_f} \mu(da) \int_{\mathcal{O}_f} |\varphi(a^{-1}x) - \varphi(x)| \mu(dx) = 0$$

然ル $=$, $\varphi(a^{-1}x)$ は $\mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$ の Baire, 函数ナルカラ,
 $\mu\mu$ -meßbar ナル。故 $=$ Fubini, 定理 $=$ ヲツテ

$$\int_{\mathcal{O}_f} \mu(dx) \int_{\mathcal{O}_f} |\varphi(a^{-1}x) - \varphi(x)| \mu(da) = 0$$

故 $=$ μ -Maß の, x -Menge X_0 を除ケバ, $x =$ ヲツ
テ成マル μ -Maß の, a -Menge $A_0(x)$ がアツテ

$$a \notin A_0(x) \quad \text{トキ} \quad \varphi(a^{-1}x) = \varphi(x)$$

トナル。今 x, y を X_0 上の任意, 二元トスレバ

$$\mu(x^{-1}A_0(x)) = 0, \quad \mu(y^{-1}A_0(y)) = 0$$

ナルカラ $x^{-1}A_0(x)$ と $y^{-1}A_0(y)$ は 共通元ヲ有

スル¹¹⁾。コノ共通元 h ヲ C トスレバ

$$C = x^{-1}a = y^{-1}b, \quad a \notin A_0(x), \quad b \notin A_0(y).$$

故ニ

$$a^{-1}x = b^{-1}y,$$

従ッテ

$$\varphi(x) = \varphi(y).$$

スナハチ μ -Maß ϕ X_0 上 除ケバ $\varphi(x)$ ハ *constant* デアル。コノ *constant* γ_1 トオケバ、

$$\mu_1(B) = \gamma_1 \mu(B) \quad B \in \mathcal{B}.$$

然ルニ μ は σ -Maß μ $\mathcal{B}$ 上 集合 B 毎ニ 對スル値 γ 與ヘレバ *eindeutig* = 定マル。¹²⁾ 故ニ

$$\mu_1^*(A) = \gamma_1 \mu^*(A), \quad A \subset \mathcal{O}_f$$

全ク同様ニ

$$\mu_2^*(A) = \gamma_2 \mu^*(A).$$

故ニ

$$\mu_1^*(A) : \mu_2^*(A) = \gamma_1 : \gamma_2 \quad (\text{証明終})$$

コノ *Eindeutigkeitssatz* = ヨツテ次ノ定理5ガ簡單ニ証明サレル。

定理5.¹³⁾ μ^* ガ $\mathcal{O}_f$ 上 σ -Maß ナルトキ、任意

11) 勿論 $\mu(\mathcal{O}_f) = 0$ ナル場合ハ除外スル。

12) 一般ニ separabel + metrischer Raum ハ abzählbare Basis 有スル。

13) コノ定理ハ *Eindeutigkeitssatz* = ヨツテ直接ニ証明サレル。§4 補助定理参照。

1. $AC \mathcal{O}_f = \text{對シテ } \mu^*(A) \text{ の } A \text{ を含む開集合 } \Theta, \text{ Maß } \mu, \text{ 下
限アイル。}$

$$\mu^*(A) = \inf_{\Theta \supset A} \mu(\Theta).$$

証明, $AC \mathcal{O}_f = \text{對シテ}$

$$\bar{\mu}^*(A) = \inf_{\Theta \supset A} \mu(\Theta)$$

トオケバ $\bar{\mu}^*$ 亦 Haar, Maßデアッテ, 開集合 $\Theta = \text{對
シテハ } \bar{\mu}(\Theta) \text{ ト } \mu(\Theta) \text{ ハ一致スル。故ニ Eindentigkeits-
satz = ヨツテ}$

$$\bar{\mu}^*(A) = \mu^*(A). \quad (\text{証明終})$$

3. Hilbert 空間 $l_2^{(\mu)}$. $\mathcal{O}_f$ 7 abzählbare Basis
ヲ有スル im Kleinen kompakt + 群, μ^* 7 1/
Haar, Maß トシ, $l_2 \mathcal{O}_f = l_2^{(\mu)}$ 7 μ -quadrat
summierbar + 函数全体, 作ル Hilbert 空間, $\mathbb{U}_{\mathcal{O}_f} =$
 $\mathbb{U} l_2 \mathcal{O}_f$ 7 $l_2 \mathcal{O}_f$, unitär + Operator 全体, 作ル群ト
スル. 定理5ヨリ直チニカル如ク¹⁴⁾, $l_2 \mathcal{O}_f$ ハ separabel
デアルカラ, 定理2ニヨレバ, $\mathbb{U}_{\mathcal{O}_f}$ ハ stark + Topolo-
gie = 関シテ abzählbare Basis 7 有スル
vollständig + topologische Gruppeデア

14) 何トナレバ: $\mathcal{O}_f$, abzählbare Basis 7 $(\Theta_j; j=1, 2, \dots)$ トシ, Θ_j , 有限個ノ和ノ全体ヨリ成ル集合族
ヲ (Θ) トスレバ, 明カニ (Θ) ハ (μ) 7 überall dicht
+ 可附着集合デアル. 故ニ 定理1ニヨツテ $l_2 \mathcal{O}_f$ ハ separabel
デアイル。

ル。コノトキ

定理6. $\mathcal{O}_f$ 1元 $a = \text{数}$ シテ, $U_a \neq$

$$U_a f(x) = f(a^{-1}x), \quad f(x) \in \mathcal{H}_f \mathcal{O}_f$$

= ヲツテ 定義サレタ unitärer Operator トスル。然
ルトキハ

$$a \rightarrow U_a$$

ナル Abbildung = ヲツテ, $\mathcal{O}_f$ ハ $\mathbb{C}$ 内 = topologisch
isomorph = einbetten サレヌ。

証明. I) $a \rightarrow U_a$ ハ 明テ $\neq$ Isomorphismus ナ
アル。¹⁵⁾

II) $a \rightarrow U_a$ ハ 連続ナル。又 $a \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} a_N = a_0$ ナ
ルトキハ, stark + Topologie $\neq \lim_{N \rightarrow \infty} U_{a_N} = U_{a_0}$ ナ
アル。何トナレバ, i) $\Theta \neq \mu(\Theta) < +\infty$ ナル 関数集合ト
スレバ

15) 何トナレバ、明テカニ

$$U_a U_b = U_{ab}$$

デアルカラ, $a \neq b$ ナルトキ $U_a \neq U_b$ ナルコトヲ示セバヨイ。コノ
タメニ, $\Theta \neq 1$, 充分小 π 近傍トスレバ

$$a\Theta \wedge b\Theta = 0$$

デアル。從ツテ Θ , charakteristische Funktionヲ
取ヲ トスレバ,

$$\|U_a e_\Theta - U_b e_\Theta\| = \|e_{a\Theta + b\Theta}\| = 2\mu(\Theta) > 0$$

故ニ $U_a \neq U_b$ ナル。

$$F_j \subset F_{j+1}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} F_j = \Theta$$

ナル *kompakt* + 閉集合 F_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) が存在スル。
 $\lim a_N = a_0$ ナルカラ, $j =$ 對シテ $N(j)$ ナ充分大
 キツトレバ,

$$N \geq N(j) \text{ ノトキ } a_N F_j \subset a_0 \Theta, \quad a_0 F_j \subset a_N \Theta$$

トナル; 従ツテ

$$d_\mu(a_N \Theta, a_0 \Theta) \leq 2\mu(\Theta - F_j).$$

故ニ

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(\Theta - F_j) = 0$$

ナルカラ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_\mu(a_N \Theta, a_0 \Theta) = 0$$

従ツテ, Θ , *charakteristische Funktion* ナ e_Θ ト
 スレバ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(\mathcal{U}_{a_N} - \mathcal{U}_{a_0}) e_\Theta\| = 0.$$

ii) A ナ μ -Maß 有限 + 任意, μ -meßbar + 集合
 トスルトキ, 定理 5 ニヨレバ, 任意, $\varepsilon > 0$ = 對シテ

$$\Theta \supset A, \quad \mu(\Theta - A) < \varepsilon$$

ナル閉集合 Θ が存在スル。従ツテ

$$\|e_A - e_\Theta\| < \varepsilon.$$

故ニ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(\mathcal{U}_{a_N} - \mathcal{U}_{a_0}) e_A\| = 0$$

デナケレバナラナイ。

iii) 然ルニ任意、 $f \in \mathcal{H}_Y$ ハ $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_{A_j}$ ナ形ノ函数
ノ limit トシテ現ハサレル。故ニ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \| (U_{a_N} - U_{a_0}) f \| = 0,$$

スナハチ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_{a_N} = U_{a_0}$$

デアラ。

$$\text{III) } \lim_{N \rightarrow \infty} U_{a_N} = U_{a_0} \text{ ナラバ } \lim_{N \rightarrow \infty} a_N = a_0 \text{ デアラ。}$$

何トナラバ $\theta \neq 1$ 、任意ノ近傍トシタトキ、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \| U_{a_N} e_\theta - U_{a_0} e_\theta \| = 0$$

スナハチ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_\mu(a_N \theta, a_0 \theta) = 0$$

デアルカラ、 N ガ充分大ナラバ

$$a_N \theta \sim a_0 \theta \neq 0,$$

従ッテ、

$$a_N \in a_0 \theta \theta^{-1}$$

デアラ。故ニ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = a_0$$

—— I), II), III) = ヨッテ $a \rightarrow U_a$ ガ *topologisch isomorph* ナ *Einbettung* ナルコトガワカル。¹⁶⁾

16) $a \rightarrow U_a$ ノ連続性カラ、此ノ定理ガ得ヲレル：定理 $\mu(A) > 0$

ナラバ $A \cdot A^+$ ハ単位元ノ近傍ヲ含ム。(水頁ヘツヅク)

§ 3. Weil / Maß

1. Weil / Maß. 定義. 吾々ハ, 群 G , Maß m^* が次の二つの条件 1), 2) を満足スルトキ, $m^* \neq 0$, Weil / Maß トイフコトニスル:

1) m^* は links-invariant ナスル:

$$m^*(aA) = m^*(A), \quad a \in G.$$

2) $f(x)$ が G 上 m -meßbar ナ函数ナルトキ, 二変数 x, y 上函数 $f(y^{-1}x)$ も m -meßbar ナナスル。¹⁷⁾

Weil / Maß ハ種々ノ著シイ性質ヲ有スル。例ヘバ

定理 7. $m^* \neq 0$ 上 G 上 Weil / Maß トニスル。コノトキ, G 上部分集合 A が m -meßbar ナラバ $A^{-1} \in m$ -meßbar ナアツテ, $m(A) = 0$ ナルトキハ $m(A^{-1}) = 0$ デアル。

証明. A 上 charakteristische Funktion $e_A(x)$ トスレバ, $e_A(y^{-1}x)$ が m -meßbar ナナスル。然ルニ

(脚註 16. v. d. N.) 証明: $a \rightarrow U_a$ が stetig ナスルナラ $\lim a = 1$ ナキ

$$\lim \|U_a e_A - e_A\| = 0$$

従フテ

$$aA \cap A \neq \emptyset$$

故ニ a が十分 1 に近イトキ $a \in A \cdot A^{-1}$ ナスル。——

17) $f(y^{-1}x)$ が m -meßbar トイフハ $m \otimes m$ -meßbar, 意味ナスル。§ 1. Nr. 3 参照。

$$e_A(y^{-1}x) = e_{xA^{-1}}(y)$$

デアルカラ, Fubini / 定理 = ヨツテ, xA^{-1} ハ Maß 0
ノ外ヲ除ケバ m -meßbar デアル. 従ツテ, m が links-
invariant デアルカラ, A^{-1} ハ m -meßbar デナレバ
ナラナシ. 特ニ $m(A) = 0$ ナレバ

$$\int_G m(dx) \int_G e_A(y^{-1}x) m(dy) = \int_G m(dy) \int_G e_A(y^{-1}x) m(dx) = 0$$

デアルカラ

$$m(A^{-1}) = \int_G e_A(y^{-1}x) m(dy) = 0$$

—— 1) 故ニ, Maß ハ Weil / Maß デアルガ,
其ノ他 = 2) 1) 故ニ, Maß ヨリ „induzieren“ サレ
ル Weil / Maß が存在スル. 以下之ヲ述ベル.

2. 1) 故ニ, Maß = ヨツテ induzieren サレ
タ Maß. G ノ abzählbare Basis ヲ有スル im
kleinen kompakt + 群, μ^* ノ 1) 故ニ, Maß
トシ, G ノ 1) normalteiler $N =$ 3) Restklassen
gruppe G/N が G 内ニ 4) 含マレル 群トスル: $G/N \subset G$.
 G ノ 元ヲ, 一般ニ $a, b, x, y, \text{etc.}$, 部分集合ヲ $A, B,$
 etc. 7) 現シ. G ノ 元ヲ $\xi, \eta, \text{etc.}$, 部分集合ヲ $\alpha, \beta, \text{etc.}$
現ハスモノトシ. $a \in G$ 1) mod, N Restklasse ヲ

$$r(a) = r_N(a) = r_{\text{mod } N}(a) \quad \text{etc.}$$

書ク. ¹⁸⁾ $a \rightarrow r(a)$ ハ 8) + 8) homomorph +

却註 18) ハ次頁ニ)

Abbildung $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma$. τ^{-1} „Umkehrung“ τ^{-1}
 が現はス。コトヲ

定理 8. $A \subset G = \text{對シテ}$

$$m^*(A) = \mu^*(\tau(A))$$

トオケベ, $m^* = m^*(A)$ は G 上 links-invariant +
 $\text{Map}^{(9)}$ τ τ τ . $\sigma \subset G$ が μ -meßbar + ルトキハ,
 $\tau^{-1}(\sigma)$ は m -meßbar τ τ .

証明. i) m^* は links-invariant + Carathéodory, äußeres Maß + ルコトハ明白 τ τ .

ii) σ τ μ -meßbar トスレバ, 任意 $A \subset G = \text{對シテ}$

$$\begin{aligned} m^*(A) &= \mu^*(\tau(A)) = \mu^*(\tau(A) \cap \sigma) + \mu^*(\tau(A) - \sigma) \\ &= m^*(A \cap \tau^{-1}(\sigma)) + m^*(A - \tau^{-1}(\sigma)) \end{aligned}$$

τ τ τ , $\tau^{-1}(\sigma) \in m$ -meßbar τ τ . iii) 横
 τ τ $G \in m$ -Map が有限 + 集合, 可数個, 和トシテ現ハ
 サレル. iv) 任意 $A = \text{對シテ}$

$$\sigma \supset \tau(A), \quad \mu(\sigma) = \mu^*(\tau(A))$$

+ ル μ -meßbar + 集合 σ が存在スル. コトヲ明ヲ
 カ =

$$\tau^{-1}(\sigma) \supset A$$

τ τ τ ,

$$\mu^*(A) \leq m(\tau^{-1}(\sigma)) = \mu^*(\sigma \cap G/N) \leq \mu(\sigma) = \mu^*(\tau(A)) = \mu^*(A)$$

18) コノ記号 = $\exists$ レバ, $\tau(G) = G/N$.

$$\tau \tau^{-1}(\sigma) = \sigma \cap \tau(G) = \sigma \cap (G/N).$$

19) § 1, Nr. 1 Map, 定義参照.

故一

$$m^*(A) = m(r^{-1}(A)),$$

故 m^* は regular ナル。 (証明終)

定義. $\mathcal{O}_f = G/N$, μ -inneres Maß が 0:

$$\mu_*(\mathcal{O}_f - G/N) = 0$$

ナルトキ

$$m^*(A) = \mu^*(r(A)), \quad A \subset G$$

= $\exists$ μ 定義ナレタ G 1 Maß m^* 7 1 Maß μ^*

= $\exists$ ヲテ induzieren ナレタ Maß ト名付ケ, m_μ^* ナ

現ハス; スナハチ

$$m_\mu^*(A) = \mu^*(r(A)), \quad A \subset G.$$

コノトキ, $G = G/N = \mathcal{O}_f$ ナラバ, 明ラカ m_μ^* ト μ^* ハ一
致ナル。²⁰⁾

20) 一致 m^* が空間 R 1 Maß ナルトキ, R 1 部分集合 $X = \mathcal{O}_f$ ナラバ, $X = \mathcal{O}_f$

ナレル m -meßbar ナ部分集合 A 1 Maß 1 上限 γX 1 m -inneres

Maß ト名付ケ $m_*(X)$ ナ現ハス。記号ヲ書ケバ

$$m_*(X) = \overline{\lim}_{A \subset X} m(A), \quad A \text{ } m\text{-meßbar}$$

コノトキ, $\exists$ ナラレナキルナリ。 A が m -meßbar ナラバ

$$m(A) = m^*(A \cap X) + m_*(A - X)$$

が成立スル。

$\mu_*(\mathcal{O}_f - G/N) = 0$ トキ, G/N が μ -meßbar ナラバ $G/N = \mathcal{O}_f$

ナナレバ ナラハス; 従ッテ $G/N \neq \mathcal{O}_f$ ナラバ G/N ハ μ -meßbar

ナハス。吾々ハ後ヲカク, 如キ G/N 1 例ヲ超限帰納法ヲ用ヒテ

構成スル。

定理9. $G/N \subset \mathcal{O}_f$ かつ $G, \text{ Map } m^*$ が $\mathcal{O}_f$ の Haar, Map μ を誘起する μ かつ Map μ かつ μ の必要且充分条件は、次の 1) 及び 2) が成立するコトである:

1) $\mathcal{L}$ が $\mathcal{O}_f$ の Borel set かつ $r^{-1}(\mathcal{L})$ は m -measurable かつ

$$m(r^{-1}(\mathcal{L})) = \mu(\mathcal{L}).$$

2) 任意 $A \subset G$ に対して

$$r^{-1}(\mathcal{L}) \supset A, \quad m^*(A) = m(r^{-1}(\mathcal{L}))$$

かつ Borel set $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_f$ が存在する。

証明. 2) 必要かつコトを示す $\mu = m^* = m_\mu^*$ と

する。1) $\mathcal{L}$ が Borel set かつ μ は

$$\mu_*(\mathcal{L} - G/N) \leq \mu_*(\mathcal{O}_f - G/N) = 0$$

であるから

$$\mu(\mathcal{L}) = \mu^*(\mathcal{L} \cap G/N).$$

故に

$$m(r^{-1}(\mathcal{L})) = \mu^*(\mathcal{L} \cap G/N) = \mu(\mathcal{L}).$$

2) 任意 $A \subset G$ に対して

$$\mathcal{L} \supset r(A), \quad \mu^*(r(A)) = \mu(\mathcal{L})$$

かつ Borel set $\mathcal{L}$ が存在する。コトは、明らか =

$$r^{-1}(\mathcal{L}) \supset A$$

であるから、1) の結果を利用すれば、

$$m^*(A) = \mu^*(r(A)) = \mu(\mathcal{L}) = m(r^{-1}(\mathcal{L})).$$

b) 充分なるコトの証明. 1) m^* が 1) 及び 2) を満

足スルモノトスル。コノトキ, $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_f - G/N$ + ル Borel set $\mathcal{L} =$ 對シテハ $r^{-1}(\mathcal{L}) = 0$ ナアルカヲ, 1) ニヨツテ

$$\mu(\mathcal{L}) = m(r^{-1}(\mathcal{L})) = 0$$

トナル。従ツテ

$$\mu_*(\mathcal{O}_f - G/N) = 0.$$

II) 任意 $A \subset G =$ 對シテ 2) ヲ満足スル $\mathcal{L}$ ヲトレ

ル

$$m^*(A) = m(r^{-1}(\mathcal{L})) = \mu(\mathcal{L}) = m_\mu(r^{-1}(\mathcal{L})) \geq m_\mu^*(A).$$

m_μ ニホ 1) 2) ヲ満足スルカヲ, 同様ニシテ,

$$m_\mu^*(A) \geq m^*(A)$$

ナルコトが分ル。故ニ

$$m^* = m_\mu^*. \quad (\text{証明終})$$

3. Cartetisches Produkt. $G/N \subset \mathcal{O}_f$ + ル

トキハ

$$G \times G/N \times N = G/N \times G/N \subset \mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$$

ト考ヘラレル。²¹⁾ コノトキ

定理 10. m^* が $\mathcal{O}_f$ 1) daer, Maß $\mu^* =$ ヲツテ

2) $K \times R$ ハ $x, y \in R$ + ル Paar (x, y) / 全体ヨリ成ル空間ナ

アル。§1. Nr. 3 参照。 $G \times G/N \times N \subset \mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$ + ル

Einbettung ハ

$$\gamma_{N \times N}(x, y) = (\gamma_N(x), \gamma_N(y))$$

ナリト考ヘラレル。吾々ハ簡單ニシテ, $\gamma_N, \gamma_{N \times N}$ ナ共ニ同ジ

文字ヲ用ヒス。

induzieren +レ $\times G$ / Map +レ トキハ, cartetisches
Produkt $G \times G$ / Map $m m^*$ ハ, $\mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$ / Haar
/ Map $\mu \mu^* = \exists$ ヲテ induzieren +レ $\times$ Map $\neq$ ア
ル。記号ヲ書ケバ

$$m_\mu \cdot m_\mu^* = m_{\mu\mu}^*.$$

証明. $m m^*$ が定理 9 / 条件 1) 及 2) ヲ満足スルコト
ヲ示セバヨイ。

1) $\textcircled{H}$ ヲ $\mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$ / 開集合トスレバ, $\textcircled{H}$ ハ $\mathcal{O}_f$ / Borel
set σ_j , $\mathcal{L}_j = \exists$ ヲテ 互ニ 共通点ヲ有シ + イ “矩形”
 $\sigma_j \times \mathcal{L}_j$ / 高々可附番個 / 和トシテ表ハサレル:

$$\textcircled{H} = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \times \mathcal{L}_j$$

従ツテ

$$r^{-1}(\textcircled{H}) = \sum_{j=1}^{\infty} r^{-1}(\sigma_j) \times r^{-1}(\mathcal{L}_j).$$

然ルニ, $r^{-1}(\sigma_j)$, $r^{-1}(\mathcal{L}_j)$ ハ m -meßbar ナリテ

$$m(r^{-1}(\sigma_j)) = \mu(\sigma_j), \quad m(r^{-1}(\mathcal{L}_j)) = \mu(\mathcal{L}_j)$$

ナアルカラ, $r^{-1}(\textcircled{H}) \in mm$ -meßbar ナ

$$mm(r^{-1}(\textcircled{H})) = \mu\mu(\textcircled{H})$$

ナアル。

従ツテ, 一般ニ $\mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$ / Borel.set ハ mm -meßbar
ナアル。 Δ ヲ $\mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$ / Borel set トシ, 一般ニ $\textcircled{H}$ ナ開集
合ヲ表ハスコト = スレバ,

$$\begin{aligned}\mu\mu(\Delta) &= \underline{\lim}_{\mathbb{H} \supset \Delta} \mu\mu(\mathbb{H}) \\ &= \underline{\lim}_{\mathbb{H} \supset \Delta} m.m(r^{-1}(\mathbb{H})) \geq m.m(r^{-1}(\Delta)).\end{aligned}$$

然ルニ、 $\mathbb{H} \supset \Delta$ トスレバ、 $m.m(r^{-1}(\mathbb{H})) = \mu\mu(\mathbb{H}) \neq \mu\mu(\Delta)$ カラ

$$m.m(r^{-1}(\Delta)) + m.m(r^{-1}(\mathbb{H} - \Delta)) = \mu\mu(\Delta) + \mu\mu(\mathbb{H} - \Delta)$$

故ニ、上ノ不等式ハ等式デナケレバナラナイ：

$$m.m(r^{-1}(\Delta)) = \mu\mu(\Delta).$$

2) $\Gamma \ni G \times G$ ノ任意ノ部分集合トスル。然ルトキハ

$$m.m^*(\Gamma) = \underline{\lim} \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) m^*(B_j), \quad \sum_j A_j \times B_j \supset \Gamma.$$

然ルニ、 $m^* = m_{\mu}^*$ デアルカラ、

$$r^{-1}(\alpha_j) \supset A_j, \quad m^*(A_j) = \mu(\alpha_j);$$

$$r^{-1}(\beta_j) \supset B_j, \quad m^*(B_j) = \mu(\beta_j).$$

ナラバ、Borel set α_j, β_j ガ存在スル。従ツテ、Borel set $\alpha_j^{(N)}, \beta_j^{(N)}$ ノ適當ニ選ンテ

$$m.m^*(\Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\alpha_j^{(N)}) \mu(\beta_j^{(N)}).$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(N)} \times \beta_j^{(N)} \supset \Gamma$$

ナラシメルコトガ出來ル。コナテ

$$\Delta = \prod_{N=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(N)} \times \beta_j^{(N)}$$

トオケバ、明カニ $\Delta \ni \alpha_j \times \alpha_j$ 、Borel set デアツテ、

$$r^{-1}(\Delta) \supset \Gamma$$

且 y

$$m m(r^{-1}(\Delta)) = \mu \mu(\Delta) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\sigma_j^{(N)}) \mu(\mathcal{L}_j^{(N)});$$

従て, $N \rightarrow \infty$ とすれば

$$m m(r^{-1}(\Delta)) = m m^*(\Gamma).$$

故て, 定理 9 = $\exists \forall \tau$

$$m m^* = m_{\mu \mu}^* \quad (\text{証明終})$$

4. 定理 11. Idaar , $\text{Ma\ss} = \exists \forall \tau$ induzieren
 + $\text{Le} \times \text{Ma\ss}$ $\wedge$ Weil, $\text{Ma\ss}$ $\nabla \tau \text{ル}$. $\text{ス} + \text{ハ}$ τ , $G/N \subset \mathcal{O}_f$,
 $m^* \nabla \mathcal{O}_f$, Idaar , $\text{Ma\ss} = \exists \forall \tau$ induzieren + Le
 $\times G$, $\text{Ma\ss}$ とすれば, m^* $\wedge$ links-invariant ∇
 $\tau \forall \tau$, $x \in G$, 函数 $f(x)$ $\wedge$ m -me\ss bar + レ τ $\times$, = 変
 数 x, y , 函数 $f(y^{-1}x)$ $\in m$ -me\ss bar $\nabla \tau \text{ル}$.

証明: m^* $\wedge$ links-invariant + ル コト $\wedge$ 既 =
 定理 8 ∇ 証明 シタ . 次 =, $\mathcal{L}_\varepsilon \nabla \mathcal{O}_f$, Borel set とすれば
 $\forall$, charakteristische Funktion $e_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\xi)$ $\wedge$
 $\xi (\in \mathcal{O}_f)$, Baire, 函数 $\nabla \tau \text{ル}$ カラ , $e_{\mathcal{L}_\varepsilon}(\eta^{-1}\xi)$ $\wedge$
 $\mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$, Baire, 函数 $\nabla \tau \text{ル}$. 然ル = 定理 10 = 依
 り

$$m m^* = m_{\mu \mu}^*$$

$\nabla \tau \text{ル}$ カラ , 定理 9 = $\exists \forall \tau$ ²²⁾

$$e_{\mathcal{L}_\varepsilon}(r(y^{-1}x))$$

$\wedge G \times G$, $m m$ -me\ss bar + 函数 $\nabla \tau \text{ル}$. 従て

(脚註 22) $\wedge$ 次頁へ

$$e_{L_0}(r(x)) = e_{r^{-1}(L_0)}(x)$$

デアルカラ

$$e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x)$$

ハ、二変数 $x, y \in G$ 、 m -measurable + 函数デアル。

今、 $A_0 \subset G$ 、 m -Measure 0 + 部分集合トスレバ、

$$m^* = m_\mu^* \text{ デアルカラ、}$$

$$r^{-1}(L_0) \supset A_0, \quad m(r^{-1}(L_0)) = 0$$

+ ル Of, Borel set L_0 が存在スル。characteristische Funktion = ツイテ考へレバ、

$$e_{r^{-1}(L_0)}(x) \geq e_{A_0}(x),$$

従ツテ

$$e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x) \geq e_{A_0}(y^{-1}x).$$

然ル $e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x)$ ハ m -measurable デアルツテ、

$$\int_G e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x) m(dx) = m(r^{-1}(L_0)) = 0$$

デアルカラ、Fubini's theorem = ヲツテ

$$\begin{aligned} \iint_{G \times G} e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x) m(dx) m(dy) \\ = \int_G m(dy) \int_G e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x) m(dx) = 0; \end{aligned}$$

22) 一般 $m = m_\mu$ + ルトキ、 $f(\xi)$ が Baire 1 函数 + ラバ $F(x) = f(r(x))$

ハ x 、 m -measurable + 函数デアル。何レナレバ、0 附近、閉集合

トスレバ、 $f^{-1}(0)$ ハ Borel 集合デアルカラ、定理 9 = ヲツテ $F^{-1}(0) =$

$r^{-1}f^{-1}(0)$ ハ m -measurable デアル。

故 $\Rightarrow$, $e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x)$, 従 $\forall$ テ $e_{A_0}(y^{-1}x)$ ハ, $G \times G =$
於 τ m - meßbar 0 ノ 値ヲ 除 $\searrow$ 0 ナ r ル。故 $\Rightarrow$

$$e_{A_0}(y^{-1}x)$$

ハ x, y m - meßbar + 函数ナ r ル。

然 r $\Rightarrow$, $A \subset G$ $\forall$ 任意 m - meßbar + 部分集合ト
ス r ベ,

$$r^{-1}(L) \supset A, \quad m(r^{-1}(L) - A) = 0$$

ナ r ル 0 $\forall$ $Borel$ set L が存在ス r ル。コノトキ

$$e_{r^{-1}(L)}(y^{-1}x) \text{ハ } m\text{-meßbar, 又 } m(r^{-1}(L) - A) = 0$$

ナ r ルカラ, $e_{r^{-1}(L) - A}(y^{-1}x) \text{モ } m\text{-meßbar}$ ナ r

ル。従 $\forall$ テ

$$e_A(y^{-1}x) = e_{r^{-1}(L)}(y^{-1}x) - e_{r^{-1}(L) - A}(y^{-1}x)$$

$\text{モ } m\text{-meßbar}$ ナ r ナ r レ r ナ r イ。

一般 $\Rightarrow G$ m - meßbar + 函数 $f(x)$ ハ, 有限個,
 m - meßbar + charakteristische Funktion,
一次結合ノ limit トシ r 表ハサ r ル:

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{J_N} \alpha_j^{(N)} e_{A_j^{(N)}}(x), \quad (\alpha_j^{(N)} \text{ハ 複素数})$$

従 $\forall$ テ

$$f(y^{-1}x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_j \alpha_j^{(N)} e_{A_j^{(N)}}(y^{-1}x).$$

故 $\Rightarrow$, 各 $e_{A_j^{(N)}}(y^{-1}x)$ m - meßbar ナ r ルカラ

$$f(y^{-1}x)$$

m - meßbar ナ r ル。 (証明終)

コノ定理11ノ証明ニ於テ、 $y^{-1}x$ ヲ yx ニ置換ヘレバ、
次ノ定理12ガ得ラレル:

定理12. $m^* = m_\mu^*$ ガ I daar, $\text{Maß} = \exists$ ヲツテ
induzieren セルタ Maß トルトキ、 x ノ函数 $f(x)$ ガ
 m -meßbar トナバ、二変数 x, y ノ函数 $f(yx)$ モ
 m -meßbar デアル。

—— (續 ク) ——