



Title	可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スルMarkoff過程ニ就 イテ, I
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 175, p. 102-109
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74703
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

773. 可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スル

Markoff過程ニ就イテ I

角 谷 静 夫 (阪大)

可附番無限個ノ可能ナ状態 $x_1, x_2, \dots$ ヲ持ツ homogeneous simple + Markoff process ヲ考ヘル。

$x_i = i$ ヲツキ点ガ單位時間後 $= x_j = j$ 移ル probability $\Rightarrow p_{ij}$ 表ハセバ

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

アナル。 $x_i = i$ ヲツキ点ガ n 單位時間後 $= x_j = j$ 移ル probability $p_{ij}^{(n)}$ ハ

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)}, \quad n=2, 3, \dots, \quad p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

= ヲ ヲ テ 異ヘ ラ レ ル。吉田氏ハ 172号及ビ 173号 = 於テ、コノ様 + Markoff process ヲ 論ジラレタ。吉田氏ハ 先ツ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p_{ij}^{(m)} = P_{ij}$$

ノ 存在ヲ 証明シ、コノ 極限 P_{ij} ヲ 使ツテ 全体ノ 状態 $R = (x_1, x_2, \dots)$ ヲ dissipative + 部分 Θ ト ergodic + 部分 E_α ト = 分割サレタ。更ニ 又 各 α ノ ergodic + 部分 = 於テハ $p_{ij}^{(n)}$ ノ $n \rightarrow \infty$ + ル トキノ 状態ガ 詳シク 調べラレ、 $p_{ij}^{(n)}$ ガ $n \rightarrow \infty$ + ル トキ 収斂スルヲ、又ハ 周期的 = 振動スルコトガ ワカッテキル。コノ $p_{ij}^{(n)}$ ノ 状態ヲ 調べル = 當ツテ 中心トナツタノ、ハ次ノ 定理ヲ アッタ。

定理
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p_{ii}^{(m)} = P_{ii} > 0 \quad \text{ニシテ} \quad p_{ii}^{(n)} > 0$$

+ ル positive integer n 全体ノ 集合 n ノ 最大公約數ガ 1 + ラベ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = P_{ii}$ ガ 存在スル。

コノ 定理ノ 証明 = 當ツテハ 先ツ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} > 0$ + ルコト

ヲ 証明スルコトガ 必要デ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} > 0$ ト + ルコトハ

additive number theory, Khintchine, 定理ヲ 使ツテハ シメテ 証明サレタノ デアッタ。(173号ノ 談話767 参照)。本談話 = 於テハ 先ツ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p_{ii}^{(m)} = P_{ii}$$
 ノ 存在ヲ 吉田氏ト 異ツタ 方法ヲ 証

明シ、次ニコノ証明ニ於テ副産物トシテ得ラレル結果ヲ使ツ
テ $P_{ii} > 0$ トルコト $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} > 0$ トルコトヲ Khint-
chineノ定理ヲ用ヒズニ証明スル。

先ヨ $k_{ij}^{(n)}$ ヲ定義スル。最初ニ x_i = アツタ点カ $1, 2,$
-----, $n-1$ 単位時間後ニハ x_j = ハ行カズニ、 n 単位時間
後ニ始メテ x_j = 移ル probability ヲ $k_{ij}^{(n)}$ = ヲツテ表
ハス、明カニ

$$0 \leq k_{ij}^{(n)} \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} k_{ij}^{(n)} \leq 1$$

デアル。又

$$p_{ij}^{(n)} = k_{ij}^{(n)} + k_{ij}^{(n-1)} p_{jj}^{(1)} + k_{ij}^{(n-2)} p_{jj}^{(2)} + \dots + k_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)}$$

ガ成立スルコトモ明カデアル。次ニ特ニ $i=j$ トルコトヲ考
ヘレバ $k_{ii}^{(n)}$ ハ最初ニ x_i = アツタ点カ n 単位時間後ニ始メ
テ x_i = 戻ツテ来ル probability デアツテ

$$(1) \quad 0 \leq k_{ii}^{(n)} \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} k_{ii}^{(n)} \leq 1$$

$$(2) \quad p_{ii}^{(n)} = k_{ii}^{(n)} + k_{ii}^{(n-1)} p_{ii}^{(1)} + k_{ii}^{(n-2)} p_{ii}^{(2)} + \dots + k_{ii}^{(1)} p_{ii}^{(n-1)}$$

ガ成立スル。コノ重要ナルコトハ $\{k_{ii}^{(n)}\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$
-----; i ハ固定) ヲ任意ニ (1) ヲ満足スルヤウニ與ヘレバ, (2)
ニヨツテ $\{p_{ii}^{(n)}\}$ ($n=1, 2, \dots$) ガ一意的ニ決定サレテシ
マフコトデアル。

シカモ、一ツノ i ガケテ考ヘレバ此ノ如クシテ定マツタ

$\{p_{i_0 i_0}^{(n)}\}$ が實際, $\{p_{i_0 i_0}^{(n)}\} = \varepsilon$ ヲ又又 Markoff process $\{p_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, \dots$) が存在スルコトナル。即チ、任意 $= \{k_{11}^{(n)}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) ヲ

$$0 \leq k_{11}^{(n)} \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} k_{11}^{(n)} \leq 1 \text{ 十 如ク 定メテ、コレヨリ}$$

$p_{11}^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) ヲ 順次

$$p_{11}^{(1)} = k_{11}^{(1)}, \quad p_{11}^{(n)} = k_{11}^{(n)} + k_{11}^{(n-1)} p_{11}^{(1)} + k_{11}^{(n-2)} p_{11}^{(2)} + \dots \\ \dots + k_{11}^{(1)} p_{11}^{(n-1)}$$

= ヲ又又 定義スレバ、コノ $\{p_{11}^{(n)}\}$ ヲ 實際, $\{p_{11}^{(n)}\} =$ 持ツ又又 Markoff process $\{p_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, \dots$) ヲ 作レコトが出来ル。

コノ タメニハ Matrix $\{p_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, \dots$) ヲ 次ノ如ク 作レバヨイ:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} k_{11}^{(n)} = 1 \text{ 十 トキ、}$$

$x_1, x_2, x_3, \dots$ ヲ suffix ヲ又又カヘテ $x_1, x_2, x_3, x_{3_2}, x_{4_1}, x_{4_2}, x_{4_3}, \dots, x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{n-1}}, \dots$ トオキ

$$p_{11} = k_{11}^{(1)}, \quad p_{12} = k_{12}^{(1)}, \quad p_{13} = k_{13}^{(1)}, \quad p_{13_2} = 0,$$

$$p_{14_1} = k_{11}^{(4)}, \quad p_{14_2} = p_{14_3} = 0, \dots, \quad p_{1n_1} = k_{11}^{(n)}, \quad p_{1n_2} = p_{1n_3} = \dots = p_{1n_{n-1}} = 0, \dots;$$

$$p_{2i} = 1; \quad p_{2i} = 0, \quad i \neq 1;$$

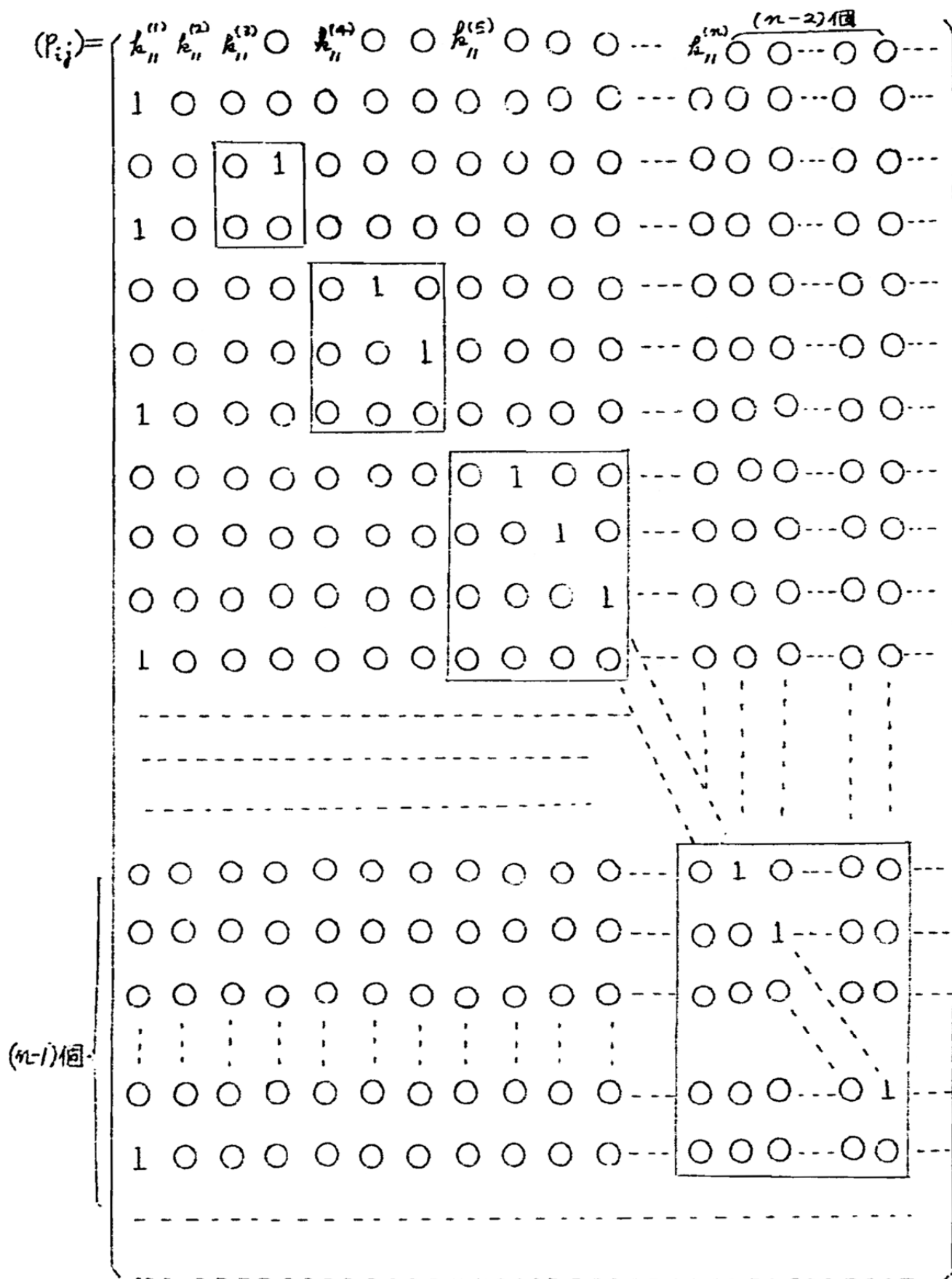
$$p_{3,3_2}=1; p_{3,i}=0, \quad i \neq 3_2;$$

$$p_{3_2,1}=1; p_{3_2,i}=0, \quad i \neq 1;$$

$$p_{n_k, n_{k+1}}=1; p_{n_k, i}=0, \quad i \neq n_{k+1}; \quad k=1, 2, \dots, n-2.$$

$$p_{n_{n-1}, 1}=1; p_{n_{n-1}, i}=0, \quad i \neq 1.$$

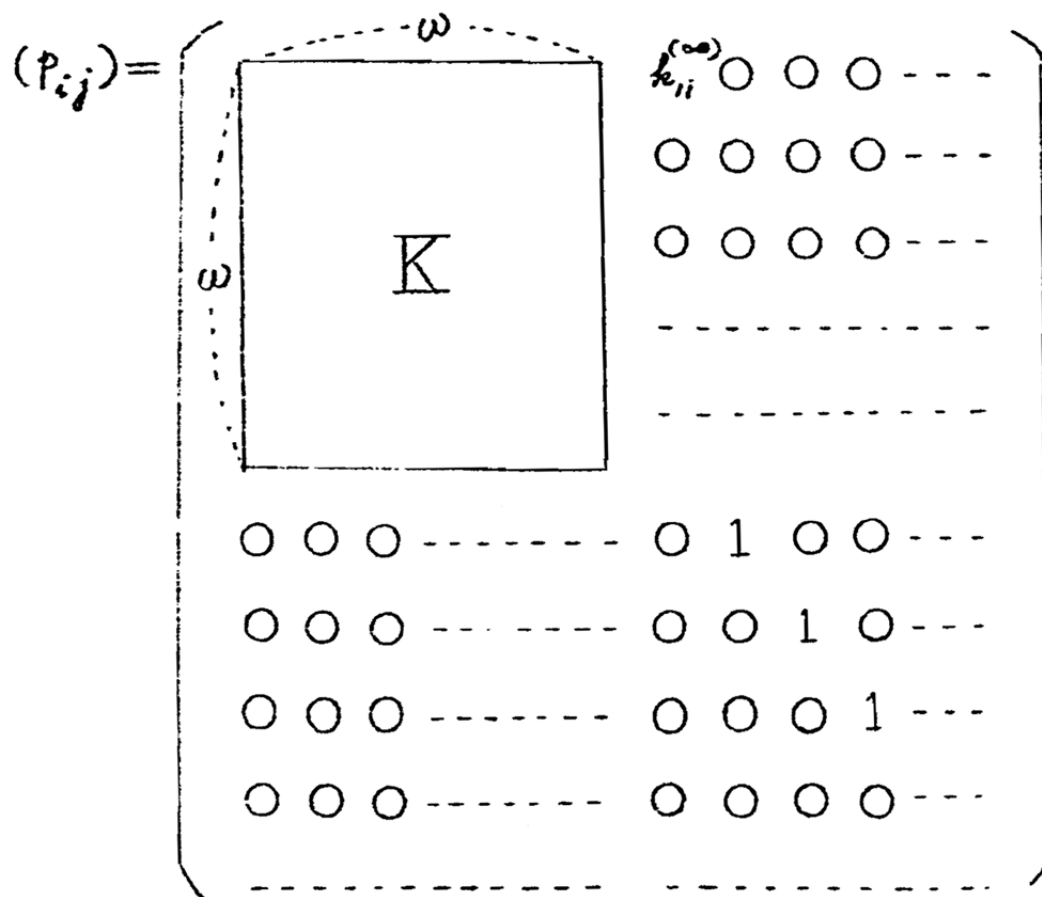
大分 suffix が面倒なアルゴリズム / 図 = ヨル方がワカリ
 リスライダロー。



$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} h_{ii}^{(n)} < 1 \text{ かつ } \neq$$

$$h_{ii}^{(\infty)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} h_{ii}^{(n)} \quad \text{トオキ行列共} = \omega + \omega + \nu \text{ type } 1$$

Matrix (p_{ij}) ヲ次ノ如ク定義スレバヨイ。



但シ K ハ (i) ノ場合ニテ作ツタ Matrix (p_{ij}) デアル。

此ノ如クシテ作ツタ Matrix が所要ノモノナルコトハ容易ニ検証サレル。

此ノ如クシテ $\{h_{ii}^{(n)}\}$ ($n=1, 2, \dots$) が (i) ノ條件ダケデ、其ノ他ハ全ク自由ニ與ヘラレルコトガワカツタ。コレハ非常ニ面白イコトト思ハレル。 $\{p_{ii}^{(n)}\}$ ($n=1, 2, \dots$) ノ方デハ $0 \leq p_{ii}^{(n)} \leq 1$ ノ他ニ $p_{ii}^{(m+n)} \geq p_{ii}^{(m)} p_{ii}^{(n)}$ ノスグト條件ガ必要ナルガ、コノ條件ダケデハ $\{p_{ii}^{(n)}\}$ ヲ自由ニ定メルト云フコトハ出来ナイノナル。 (即チ $\{p_{ii}^{(n)}\}$ が満足スベキ必要且ツ十餘ノ條件ハ簡單ニ形ヲ求メルコトガ困難

デアル.)。又、可能ナ状態が有限デアルトキニハ $\{k_n^{(m)}\}$
 $(n=1, 2, \dots)$ が自由ニ與ヘラレヌコトハ勿論デアル。

ヨツテ我々ノ問題ハ、形式上 *Markoff chain* ヲ離
 レテ、次ノ如ク *formulate* スルコトが出来ル:

$0 \leq k_n \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} k_n \leq 1$ ナル實數ノ系列 $\{k_n\} (n=1, 2, \dots)$ が與ヘラレヌトキ、コレヨリ

$$(3) \quad p_1 = k_1, \quad p_n = k_n + k_{n-1} p_1 + k_{n-2} p_2 + \dots + k_1 p_{n-1}.$$

$$n=2, 3, \dots$$

ニヨツテ $\{p_n\} (n=1, 2, \dots)$ ヲ定義スル。 p_n ハ明カニ

$$0 \leq p_n \leq 1, \quad n=1, 2, \dots$$

ヲ満足スル。コレガケノ條件ノ下デ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p_m = P$

ガ存在スルコト及ビ $P > 0$ ニテシカモ $k_n > 0$ ナル

integer n ノ集合 n 最大公約數 $= 1$ ナルトキハ

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = P$ ガ存在スルコトヲ証明セヨ。