



Title	群ニ於ケル Mass ト Topologie トノ関係ニツイテ (A.Weilノ定理ノ証明) II
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 176, p. 110-160
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74704
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

774. 群 = 於ケル Maß ト Topologie ト /
 関係 = ツイテ (A. Weil / 定理 /
 証明) II

小平 邦彦 (東京)

§4. 擴張サレタ Eindeutigkeitssatz.

1. 擴張サレタ Eindeutigkeitssatz.) $\mathcal{A}$ or /
 Maß = 關スル Eindeutigkeitssatz ハ $\mathcal{A}$ or / Maß =
 ヲツテ induzieren サレタ Maß = 擴張サレル. 次 = コレ
 ヲ述ベヨリ. 先ヅ補助定理カラ始メル:

補助定理 $\mathcal{R}$ $\mathcal{F}$ abzählbare Basis $\mathcal{F}$ 有スル im
 Kleinen kompakt + 空間, $(\mathcal{L})$ $\mathcal{F}$ $\mathcal{R}$ / kompakt +
 Borel set 全体ヨリ成ル Borel 族トスル. コノトキ, μ
 $\mathcal{F}$ $(\mathcal{L})$ $\mathcal{F}$ 定義サレタ有限ノ値ヲトル nicht-negativ,
 total additiv + 集合函数トシ, μ^* $\mathcal{F}$ μ = ヲツテ定
 メラレタ $\mathcal{R}$ / Maß²³⁾ トスレバ, 任意ノ μ -meßbar + 部
 分集合 $\mathcal{O}$ = 對シテ

$$\mu(\mathcal{O}) = \lim_{\mathcal{U} \supset \mathcal{O}} \mu(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} \text{ へ offen}$$

及ビ

$$\mu(\mathcal{O}) = \overline{\lim_{\mathcal{F} \subset \mathcal{O}} \mu(\mathcal{F})}, \quad \mathcal{F} \text{ へ abgeschlossen}$$

23) ス + ハチ

$$\mu^*(\mathcal{O}) = \lim_{\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}_j} \mu(\mathcal{L}_j), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}_j \supset \mathcal{O}, \quad \mathcal{L}_j \in (\mathcal{L})$$

ヲアル. §1 Nr 2 参照。

が成立スル。

証明. $\mathcal{R}$, 任意, 部分集合 $\mathcal{O}$ = 對シテ

$$\bar{\mu}^*(\mathcal{O}) = \varliminf_{\mathcal{U} \supset \mathcal{O}} \mu(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} \text{ は open}$$

トオフ. 然レトキハ $\bar{\mu}^* \in \mathcal{R}$, Maß デア ヱテ,

$$\bar{\mu}^*(\mathcal{O}) \geq \mu^*(\mathcal{O});$$

特ニ $\mathcal{R}$, 開集合 $\mathcal{U}$ へ, 直チニ μ 如ク, $\bar{\mu}$ -meßbar デ
ア ヱテ

$$\bar{\mu}(\mathcal{U}) = \mu(\mathcal{U})$$

デアール. 從ッテ, $\mathcal{R}$, Borel set $\mathcal{L}$ へ $\bar{\mu}$ -meßbar
デア ヱテ, $\mathcal{U} \supset \mathcal{L}$ ナル開集合 $\mathcal{U}$ ヲ トッテ 考ヘレバ,

$$\bar{\mu}(\mathcal{L}) + \bar{\mu}(\mathcal{U} - \mathcal{L}) = \mu(\mathcal{L}) + \mu(\mathcal{U} - \mathcal{L});$$

從ッテコレヲ上ノ不等式ト比ベレバ

$$\bar{\mu}(\mathcal{L}) = \mu(\mathcal{L})$$

デナケレバナラナイ事カ分ル.

$\mathcal{O}$ ヲ $\mathcal{R}$ ノ 任意, 部分集合トスレバ

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{O}, \quad \mu(\mathcal{L}) = \mu^*(\mathcal{O})$$

ナル Borel set $\mathcal{L}$ が存在スル. コノトヲ

$$\mu^*(\mathcal{O}) \leq \bar{\mu}^*(\mathcal{O}) \leq \bar{\mu}(\mathcal{L}) = \mu(\mathcal{L})$$

デアールカラ

$$\bar{\mu}^*(\mathcal{O}) = \mu^*(\mathcal{O})$$

從ッテ

$$\mu^*(\mathcal{O}) = \varliminf_{\mathcal{U} \supset \mathcal{O}} \mu(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} \text{ は open}$$

故=、 $\mathcal{O}$ が μ -meßbar 1 トキハ、

$$\mu(\mathcal{O}) = \overline{\lim_{\mathcal{F} \subset \mathcal{O}} \mu(\mathcal{F})}, \quad \mathcal{F} \text{ は abgeschlossen}$$

デアル。(証明終)

定理 13 (Eindeutigkeitssatz) $\mathcal{O}_f$ は abzählbare Basis を有スル im Kleinen kompakt + 群トシ

$$G/N \subset \mathcal{O}_f$$

トスル。コノトキ G 1 Weil, Maß m^* が $\mathcal{O}_f$ 1 Haar, Maß = ヲ ヲ τ induzieren サレタ Maß + ル ス $\times$ 1 必要且ツ 充分 + 條件ハ 次ノ 1), 2), 3) が成立スルコトデアル。

1) G/N ハ $\mathcal{O}_f$ τ überall dicht デアル。

2) $L \subset \mathcal{O}_f$ が kompakt + Borel set + ル トキ $\tau^{-1}(L)$ ハ m -meßbar デアツテ

$$m(\tau^{-1}(L)) < +\infty$$

3) $A \subset G$ が m -meßbar + ル トキ

$$d_m(A, \tau^{-1}(L)) = 0$$

+ ル $\mathcal{O}_f$ 1 Borel set L が存在スル。²⁴⁾

24) $d_m(A, \tau^{-1}(L)) = m(A - \tau^{-1}(L)) + m(\tau^{-1}(L) - A)$ デアツタ。 §1 Nr. 4 参照。——

コノ定理 = 於テ m^* が Weil 1 Maß + ルコトが重要デア
ル。實際 = ソレヲ省ケバ也ノ 念デハ コノ定理ヨリモ更ニ強
イ 條件:

1) $G/N = \mathcal{O}_f$

(次頁 = 続ケ)

証明: 必要ナコトハ明白デアアル。充分ナ事ヲ示スナメ
=:

I) $\mathcal{O}_f$ / *kompakt* + *Borel set* 全体 / 作ル *Borel* 族 $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$) が現ハスコトトシ, $\mu(\mathcal{L})$, $\mathcal{L} \in (\mathcal{L})$ ヲ

$$\mu(\mathcal{L}) = m(r^{-1}(\mathcal{L}))$$

= ヲ ヲテ 定義スレバ, μ ハ 明ヲカ = ($\mathcal{L}$) が *total additiv* + 集合函数デアアル。コノトキ $\mu =$ ヲテ 定メラレタ $\mathcal{O}_f$ / Map μ^* ハ Haar / Map デアルコトヲ 証明シヨウ。コノタメニハ μ^* が *links-invariant* ナルコトヲ 示セバ

(脚註 24 / 続キ)

2') $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_f$ が *Borel set* ナラバ, $\mathcal{L}$ ハ *m-meßbar* デ

$$m(r^{-1}(\mathcal{L})) = \mu(\mathcal{L})$$

3') $A \subset G$ が *m-meßbar* ナラバ, *Borel set* $\mathcal{L}$ が 存在シテ

$$d_m(A, r^{-1}(\mathcal{L})) = 0$$

ヲ 満足スル *links-invariant* + Map m^* デ, m_μ^* ト 異レ
モ, が 存在スル。〔例〕 G ヲ 非可附番個ノ元ヨリ 成ル 群トシ,
 $N = G$, $\mathcal{O}_f = G/G$ ハ 単位元 / ノミヨリ 成ル *kompakt* + 群ト
スル。コノトキ 明ヲカニ

$$m_\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & A = 0 \\ 1 & A \neq 0 \end{cases} \quad (A \subset G)$$

今 m^* ヲ

$$m^*(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ が 可附番集合ノトキ} \\ 1 & \text{然ラザルトキ} \end{cases}$$

ト 定義スレバ, m^* が 1'), 2'), 3') ヲ 満足スルコトハ 容易ニ 合ル。ソ

レテ 明ヲカニ $m^* \neq m_\mu^*$ 。

25) $\exists \eta$. $\eta \in G/N$ トレバ

$$\eta = r(y), \quad y \in G$$

ナル y が存在スル。従ッテ任意 / $L \in (L) =$ 對シテ

$$\begin{aligned} \mu(\eta L) &= m(r^{-1}(\eta L)) = m(y(r^{-1}(L))) \\ &= m(r^{-1}(L)) = \mu(L). \end{aligned}$$

然レニ, 定理 / 假定 1) = $\exists \eta \in G/N$ ハ η *überall*

dicht ナアルカラ, 任意 / $\xi \in \eta$ = 對シテ

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \eta_j = \xi, \quad \eta_j \in G/N$$

が存在スル。コノトキ, 一方補助定理 = ヲレバ, $L \in (L) =$

對シテ, $\varepsilon > 0$ 7 任意 = 與ヘタトキ

$$U \supset L \supset \tilde{L}, \quad \mu(U - \tilde{L}) < \varepsilon$$

及ビ

$$U_\xi \supset \xi L \supset \tilde{L}_\xi, \quad \mu(U_\xi - \tilde{L}_\xi) < \varepsilon$$

ナル開集合 U, U_ξ , 閉集合 $\tilde{L}, \tilde{L}_\xi$ が存在スル。 $\lim \eta_j = \xi$

ナルカラ, $\tilde{L}, \tilde{L}_\xi$ が *kompakt* ナルコト = 注意スレバ j が充分大ナルトキ

$$\eta_j \tilde{L} \subset U_\xi, \quad \eta_j U \supset \tilde{L}_\xi$$

トナル。従ッテ

$$\mu(\tilde{L}) = \mu(\eta_j \tilde{L}) \leq \mu(U_\xi),$$

$$\mu(U) = \mu(\eta_j U) \geq \mu(\tilde{L}_\xi);$$

故ニ

$$\mu(\xi L) - 2\varepsilon \leq \mu(L) \leq \mu(\xi L) + 2\varepsilon.$$

25) §2 Nr 1, Haar, Maß, 定義参照.

故 = ε の任意であるから

$$\mu(\xi L) = \mu(L) \quad \xi \in \mathcal{O}_f,$$

従って μ^* は *links-invariant* である。

$$\text{II)} \quad \text{コノトキ, } L \subset \mathcal{O}_f - G/N \text{ ならば } r^{-1}(L) = \emptyset$$

であるから,

$$\mu(L) = m(r^{-1}(L)) = 0$$

従って

$$\mu_*(\mathcal{O}_f - G/N) = 0$$

である。故 =

$$m_\mu^*(A) = \mu^*(r(A)), \quad A \subset G$$

= ヲ ヱ ヱ, $\mu^* = \text{ヨ ヱ ヱ induzieren}$ する Map m_μ^* が

定まる。コノトキ明か = Borel set $L =$ 對してハ

$$m_\mu(r^{-1}(L)) = m(r^{-1}(L))$$

$$\text{III)} \quad m(X) = 0 \text{ ならば } m_\mu^*(X) = 0 \text{ である。コレヲ}$$

証明スルタメ = $y^{-1}x \in X$ なる $G \times G$ 1 元 (x, y) の集合

ヲ Γ トスル: 従って, Γ は charakteristische Funktion

ヲ $e_\Gamma(x, y)$ トスルベ

$$e_\Gamma(x, y) = e_X(y^{-1}x).$$

假定 = ヲ ヱ ヱ, m^* は Weil 1 Map であるから, $e_X(y^{-1}x)$ は

m -meßbar である。故 =

$$mm(\Gamma) = \iint e_X(y^{-1}x) m(dx) m(dy)$$

$$= \int m(dy) \int e_X(y^{-1}x) m(dx) = 0.$$

従って, 任意の $\varepsilon > 0$ = 對して

$$\Gamma \subset \sum_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) m(B_j) < \varepsilon$$

ナル m -meßbar な集合 A_j, B_j が存在スル。

然ルニ、假定ニヨリテ

$$d_m(A_j, r^{-1}(\sigma_j)) = 0, \quad d_m(B_j, r^{-1}(\mathcal{L}_j)) = 0$$

ナル σ_j 、Borel set $\mathcal{L}_j$ が存在スル。コノトキ

$$A^0 = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j - r^{-1}(\sigma_j)), \quad B^0 = \sum_{j=1}^{\infty} (B_j - r^{-1}(\mathcal{L}_j))$$

トオケバ、明ラカニ

$$m(A^0) = 0, \quad m(B^0) = 0$$

デアリテ、

$$\Gamma \subset A^0 \times G + G \times B^0 + \sum_{j=1}^{\infty} r^{-1}(\sigma_j) \times r^{-1}(\mathcal{L}_j)$$

トナル。コノ関係ヲ charakteristische Funktion ン
書ケバ

$$e_{\Gamma}(x, y) = e_x(y^{-1}x)$$

デアルカラ

$$e_x(y^{-1}x) \leq e_{A^0}(x) + e_{B^0}(y) + \sum_{j=1}^{\infty} e_{r^{-1}(\sigma_j)}(x) \cdot e_{r^{-1}(\mathcal{L}_j)}(y).$$

ココニ於テ

$$y^{-1}x = z$$

トオケバ

$$x = yz$$

デアルカラ

$$e_x(x) \leq e_{A^0}(yx) + e_{B^0}(y) \\ + \sum_{j=1}^{\infty} e_{r^{-1}(\sigma_j)}(yx) \cdot e_{r^{-1}(\tau_j)}(y),$$

或ハ

$$e_x(x) \leq e_{A^0 x^{-1}}(y) + e_{B^0}(y) \\ + \sum_{j=1}^{\infty} e_{r^{-1}(\sigma_j) \cdot x^{-1}}(y) \cdot e_{r^{-1}(\tau_j)}(y).$$

然ルニ, m^* ハ Weil, Map デアルカラ, 定理7カラ直チ
= 余ル如ク, 一般ニ A ガ m -meßbar ナルトキハ, $Aa \in$
 m -meßbar デアルヲ, 特ニ $m(A)=0$ ノトキハ $m(Aa)=0$
デアル。²⁶⁾ 従ッテ上ノ不等式ヲ y = ツイテ積分スレバ

$$e_x(x) m(G) \leq \int_G \sum_{j=1}^{\infty} e_{r^{-1}(\sigma_j) \cdot x^{-1}}(y) e_{r^{-1}(\tau_j)}(y) m(dy) \quad 27)$$

ヲ得ル。今簡單ノ x

$$\sum_{j=1}^{\infty} e_{r^{-1}(\sigma_j) \cdot x^{-1}}(y) e_{r^{-1}(\tau_j)}(y) = c(y, x)$$

26) 何トナレバ, A ガ m -meßbar ナラバ A^{-1} , 従ッテ $a^{-1}A^{-1}$ ガ
 m -meßbar. 従ッテ $Aa = (a^{-1}A^{-1})^{-1}$ ガ m -meßbar
デアル。特ニ $m(A)=0$ トスレバ, $m(A^{-1}) = m(a^{-1}A^{-1})$
 $= 0$, 従ッテ $Aa = (a^{-1}A^{-1})^{-1}$ デアルカラ,
 $m(Aa)=0$.

27) 一般ニ $m(G) = +\infty$ デアルガ, コノトキ $e_x(x)=0$ ナラバ
 $e_x(x) m(G) = 0$ ト約束スル。一般ニ, Map, 計算ニ於テ
ハ $0 \cdot \infty = 0$ ト考ヘル, が便利デアル。Saks: Theory of
Integral 参照。

トオケバ、明ラカニ

$$\int_G c(y, z) m(dy) = \sum_{j=1}^{\infty} m(r^{-1}(\sigma_j \cdot r(z^{-1}) \cap L_j))$$

デアツテ、 σ_j, L_j は Borel set デアルカラ、II)ノ結果
ニヨレバ

$$m(r^{-1}(\sigma_j \cdot r(z^{-1}) \cap L_j)) = m_{\mu}(r^{-1}(\sigma_j \cdot r(z^{-1}) \cap L_j));$$

従ツテ

$$\int_G c(y, z) m(dy) = \int_G c(y, z) m_{\mu}(dy).$$

故ニ

$$e_x(z) m(G) \leq \int_G c(y, z) m_{\mu}(dy)$$

デアル。

然レバ

$$c(y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} e_{r^{-1}(\sigma_j)}(yz) e_{r^{-1}(L_j)}(y)$$

デアルカラ、定理 12ニヨツテ、 $c(y, z)$ ハ y, z ノ m_{μ} -measurable
ノ函数デアル。従ツテ、Fubiniノ定理ヲ利用ス
レバ

$$\begin{aligned} & \iint_{G \times G} c(y, z) m_{\mu}(dy) m_{\mu}(dz) \\ &= \int_G m_{\mu}(dy) \int_G \sum_{j=1}^{\infty} e_{r^{-1}(\sigma_j)}(yz) e_{r^{-1}(L_j)}(y) m_{\mu}(dz) \\ &= \int_G \sum_{j=1}^{\infty} m_{\mu}(r^{-1}(\sigma_j)) e_{r^{-1}(L_j)}(y) m_{\mu}(dy) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} m_{\mu}(r^{-1}(\sigma_j)) m_{\mu}(r^{-1}(\mathcal{L}_j)).$$

∴ 於て, $\sigma_j, \mathcal{L}_j$ は

$$d_m(A_j, r^{-1}(\sigma_j)) = 0, \quad d_m(B_j, r^{-1}(\mathcal{L}_j)) = 0$$

ナル様 = 選ンダ Borel set ナルカラ

$$m_{\mu}(r^{-1}(\sigma_j)) = m(A_j), \quad m_{\mu}(r^{-1}(\mathcal{L}_j)) = m(B_j);$$

故に, 假定 = ヲツテ

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{\mu}(r^{-1}(\sigma_j)) m_{\mu}(r^{-1}(\mathcal{L}_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) m(B_j) < \varepsilon,$$

従ツテ

$$\iint_{G \times G} c(y, z) m_{\mu}(dy) m_{\mu}(dz) < \varepsilon,$$

故に, Fubini の定理 = ヲツテ

$$\int_G m_{\mu}(dz) \int_G c(y, z) m_{\mu}(dy) < \varepsilon$$

ナアル、故に

$$m(G) \leq \int_G c(y, z) m_{\mu}(dy)$$

ナル等ノ集合ヲ Z_{ε} トスレバ, Z_{ε} は m_{μ} -measurable ナ
ツテ

$$m(G) m_{\mu}(Z_{\varepsilon}) < \varepsilon,$$

従ツテ, ε は任意ナルカラ $m_{\mu}(Z_{\varepsilon})$ が如何程ナ小サク
スルコトガ出來ル。²⁰⁾ (脚註ハ次頁ニ)

然ルニ、既ニ証明シタ結果ニヨレバ

$$e_X(x)m(G) \leq \int_G c(y, x) m_\mu(dy)$$

デアルカラ

$$X \subset Z$$

デナケレバナラナイ。故ニ

$$m_\mu(X) = 0$$

IV) $m^* = m_\mu^*$ デアル。コレヲ証明スルタメニ: $A \cap G$

ノ任意ノ部分集合トスレバ、

$$r^{-1}(L) \supset A, \quad m_\mu^*(A) = m_\mu(r^{-1}(L))$$

ナル Borel set L が存在スルカラ、

$$m^*(A) \leq m(r^{-1}(L)) = m_\mu(r^{-1}(L)) = m_\mu^*(A)$$

又、逆ニ、 $A = \emptyset$ シテ

$$A \subset B, \quad m^*(A) = m(B)$$

ナル m -measurable 部分集合 B が存在スル。 $B = \emptyset$ シテ

$$d_m(B, r^{-1}(L)) = 0$$

ナル Borel set L ヲトレバ

$$m(B - r^{-1}(L)) = 0$$

デアルカラ、III) = ヲツテ

$$m_\mu(B - r^{-1}(L)) = 0$$

従ツテ

$$B \subset r^{-1}(L) + (B - r^{-1}(L))$$

28) $m(G) = +\infty$ ノキハ、 $m_\mu(Z_\varepsilon) = 0$ デアル。脚註27参照

アアルカラ.

$$m_{\mu}^*(B) \leq m_{\mu}(r^{-1}(B)) = m(r^{-1}(B)) = m(B).$$

故=, $A \subset B$ アアツタカラ

$$m_{\mu}^*(A) \leq m^*(A).$$

故=

$$m_{\mu}^*(A) = m^*(A). \quad (\text{証明終})$$

2. 充分条件. 後ヲ應用スルタメ=, コノ定理13ノ充分条件ヲ次ノ形ニ拡張シテ オク:²⁹⁾

定理14. (充分条件) G ノ links-invariant + Metrik ヲ有スル separabel, vollständig + topologische Gruppe, $G \ni G/N \subset G$ ナル群トシ, m^* ノ G ノ Weil ノ Maß トスル. コノトキ次ノ条件

29) G が abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群ナルトキ, μ ノ Haar ノ Maß トスレバ, 定理6 = ヲレバ, G ノ $\mathcal{L}_{G,G}^{(\mu)}$, unitärer Operator ノ作ル群 $\mathcal{U}_{G,G}^{(\mu)} = \text{topologisch isomorph} = \text{einbetten}$ セラレル. 然ル= 定理2 = ヲレバ, $\mathcal{U}_{G,G}^{(\mu)}$ ノ links-invariant + Metrik ヲ有スル. 従ツテ

定理. abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群ハ links-invariant + Metrik ヲ有スル separabel, vollständig ナ群デア
ル.

—— コノ定理=コツチ, 定理14ガ定理13ノ充分条件ノ拡張ナルコトガ分ル.

1) — 4) が成立スルヲバ, G/N は im Kleinen kompakt
デアツテ, m^* は G/N 上 Haar 測度 $= m$ を誘起
サレタメ m は G/N 上 m^* 誘起:

1) G/N は G/N 上で überall dicht,

2) U が G/N の 開集合 かつ $r^{-1}(U)$ は m -meßbar
デアール;

3) 充分小の 開集合 U に対して $m(r^{-1}(U)) < +\infty$,

4) $A \in (m)$ かつ $\epsilon > 0$ 任意, $\epsilon > 0$ に対して

$$d_m(A, r^{-1}(U)) < \epsilon$$

かつ G/N の 開集合 U が存在スル。

証明: G/N は links-invariant かつ Metrik ρ
を持つ, $\rho =$ 関数 $1/\epsilon$ -Umgebung U_ϵ が現ハス。
スナハチ

$$U_\epsilon = \{x; \rho(x, 1) < \epsilon\}.$$

1) コノトキ, G/N は separabel, G/N が G/N 上で über-
all dicht デアールカラ G から 可数個の 元 x_j ($j=1, 2, 3$
-----) を選ンデ

$$\sum_{j=1}^{\infty} r(x_j) U_\epsilon = G/N$$

ナラシメルコトが出来ル。従ツテ, コノトキ

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot r^{-1}(U_\epsilon) = G;$$

故ニ, m^* は links-invariant, $m(G) > 0$ デア
ルカラ

$$m(r^{-1}(U_\varepsilon)) > 0$$

デナレバナリ。

II) 假定 = ヲツテ, ε_0 ヲ充分小サクトレバ

$$m(r^{-1}(U_{\varepsilon_0})) < +\infty$$

トナル。コノトキ, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ トスレバ U_{ε_1} ハ *kompat*
 デアル: 何トトレバ, 若シ U_{ε_1} が *kompat* デナイトス
 レバ, $\varepsilon > 0$ ヲ充分小サクトレバ, U_{ε_1} ハ有限ノ ε -*Netz*
 ヲ有シタイ。従ツテ, G/N が of $\mathbb{R}$ *überall dicht* ナ
 ルカラ, G カヲ無限個ノ x_j ($j = 1, 2, \dots$) ヲ選ンデ

$$r(x_j) \in U_{\varepsilon_1}, \quad \rho(r(x_j), r(x_k)) > \varepsilon$$

$$(j \neq k),$$

ナラシメルコトガ出来る。

$$\delta < \text{Min.} \left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon_0 - \varepsilon_1 \right)$$

ナル正数トスレバ, 従ツテ

$$r(x_j) U_\delta \subset U_{\varepsilon_0},$$

$$r(x_j) U_\delta \cap r(x_k) U_\delta = \emptyset \quad (j \neq k),$$

従ツテ

$$x_j \cdot r^{-1}(U_\delta) \subset r^{-1}(U_{\varepsilon_0}),$$

$$x_j \cdot r^{-1}(U_\delta) \cap x_k \cdot r^{-1}(U_\delta) = \emptyset \quad (j \neq k).$$

故 =

$$m(r^{-1}(U_{\varepsilon_0})) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(x_j \cdot r^{-1}(U_\delta))$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} m(r^{-1}(U_\delta)),$$

従って

$$m(r^{-1}(\mathcal{U}_\varepsilon)) = 0$$

だからレバナリ。コレハ I) , 結果=反スル。—— 故= $\mathcal{U}_\varepsilon$ ハ *kompakt* , 従って $\mathcal{O}_f$ ハ *im Kleinen kompakt* ナル。

III) m^* が *Maß* , $\text{Map} = \text{ヨツテ induzieren}$ ナル Map ナルコトヲ示スナメハ , 定理 13 , 条件 2) 及び 3) が成立スルコトヲ証明スレバヨイ。一般= $\mathcal{O}_f$ ノ 開集合ヲ $\mathcal{U}$, *Borel* 集合ヲ $\mathcal{L}$ ナルコトニスレバ

i) $r^{-1}(\mathcal{U})$ が *m-meßbar* ナルカラ $r^{-1}(\mathcal{L}) \in \mathcal{M}$ *m-meßbar* ナル。

ii) $\mathcal{L}$ が *kompakt* ナルトキハ , $\mathcal{U}_\varepsilon$ ノ 単位元ノ 任意ノ 近傍トシタトキ , 有限個ノ $x_j \in G$ ($j=1, 2, \dots, J$) ノ 適当=選ンデ

$$\mathcal{L} \subset \sum_{j=1}^J r(x_j) \mathcal{U}_\varepsilon,$$

従って

$$r^{-1}(\mathcal{L}) \subset \sum_{j=1}^J x_j \cdot r^{-1}(\mathcal{U}_\varepsilon)$$

ナラシメルコトが出来ル 故= , $m(r^{-1}(\mathcal{U}_\varepsilon))$ が有限ナル 様= $\mathcal{U}_\varepsilon$ ノ 定メテオケバ。

$$m(r^{-1}(\mathcal{L})) < +\infty$$

だからレバナリコトがナル。

IV) $A \in (\mathcal{M})$ トスレバ , 假定=ヨツテ

$$d_m(A, r^{-1}(\mathcal{U}_k)) < \frac{1}{2^k}$$

＋此 $\mathcal{O}_f$ の開集合 $\mathcal{U}_k$ が存在スル、コノトキ

$$\mathcal{L} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \mathcal{U}_k$$

トオケバ、明ラカニ $\mathcal{L}$ は Borel set ナリ

$$d_m(A, r^{-1}(\mathcal{L})) = 0. \quad (30) \quad (\text{証明終})$$

§5. Weil の定理

1. Isomorphiesatz と Separabilitätseigenschaft. $\mathcal{O}_f$ は abzählbare Basis を有スル im Kleinen kompakt 十群, μ^* は ν による Maß ト ν , $G \supset G/N \subset \mathcal{O}_f$ 十群, m_μ^* は $\mu^* = \exists \psi$ による induzieren 十 ν 上 G の Maß トスル. ³¹⁾ コノトキ

定理 15. $f(\xi) \in \mathcal{O}_f$ の μ -meßbar 十 函数 トス

30) 何トオケバ

$$m(r^{-1}(\mathcal{L}) - A) = m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} (r^{-1}(\mathcal{U}_k) - A)\right)$$

$$\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0$$

$$m(A - r^{-1}(\mathcal{L})) = m\left(\sum_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} (A - r^{-1}(\mathcal{U}_k))\right) = 0.$$

31) 従ッテ $\mu_*(\mathcal{O}_f - G/N) = 0$ ナリ. §3 Nr 2; m_μ^* の定義参照

レバ, $x \in G$, 函数 $f(r(x))$ ³²⁾ は m_μ -meßbar である
 である

$$\int_{O_f} f(\xi) \mu(d\xi) = \int_G f(r(x)) m_\mu(dx).$$

証明. 定理 8 = ヲレバ, 一般 = $\alpha \subset O_f$ が μ -meßbar
 であるとき $r^{-1}(\alpha)$ は m_μ -meßbar である

$$\mu(\alpha) = m_\mu(r^{-1}(\alpha));$$

従って, α , charakteristische Funktion $\chi_\alpha(\xi)$
 である

$$\int_{O_f} \chi_\alpha(\xi) \mu(d\xi) = \int_G \chi_\alpha(r(x)) m_\mu(dx).$$

然るに, μ -meßbar + $f(\xi)$ は, μ -meßbar + charak-
 teristische Funktion, 一般に, limit である
 から, 従って, $f(r(x))$ は m_μ -meßbar である,

$$\int_{O_f} f(\xi) \mu(d\xi) = \int_G f(r(x)) m_\mu(dx). \quad (\text{q. e. d.})$$

定理 16. (Isomorphiesatz) $\xi \in O_f$, 函数 $f(\xi) =$
 $x \in G$, 函数 $f(r(x))$ に対応する μ に対応: $f(\xi) \rightarrow f(r(x))$
 である, $l_{O_f}^{(\mu)}$ と $l_G^{(m_\mu)}$ が isomorph である.³³⁾

(32) $r(x)$ は x , mod N , Restklasse である. § 3. Nr
 2 参照.

(33) 一般に m^* の空間 R , Map であるとき, $l_R^{(m)}$ は R の m -
 quadrat summierbar である函数全体, 作る Hilbert
 空間である. $l_R^{(m)}$ = 作る inneres Produkt である

証明. $f = f(x) = \text{對シテ } f(r(x)) \neq f \cdot r$, 従ッテ
 (Abbildung $f \rightarrow f \cdot r = \exists \text{ル } h_g^{(\mu)}$, Bild $\neq h_g^{(\mu)} \cdot r$
 現ハスコト = スレバ: $f, g \in h_g^{(\mu)}$ ナルトキ, 定理15 =
 ヲツテ

$$(f, g)_\mu = (f \cdot r, g \cdot r)_{m_\mu};$$

従ッテ, $f \rightarrow f \cdot r = \exists \text{ ヲツテ } h_g^{(\mu)} \wedge h_g^{(m_\mu)} \text{ 内} = \text{isomorph}$
 $= \text{einbetten セラレル.}$

逆 =, 今 $g = g(x) \neq h_g^{(m_\mu)}$, 任意ノ元トスレバ,

$g(x) \wedge m_\mu$ -meßbar ナル G , 部分集合 $A_j^{(N)} = \exists \text{ ヲツ}$
 テ

$$g(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_j \alpha_j \in A_j^{(N)}(x) \quad (\alpha_j \wedge \text{複素数})$$

ナル形 = 現ハサレル. 然ル = 定理9 = ヲレバ, 各 $A_j^{(N)} = \text{對}$
 シテ

$$A_j^{(N)} \subset r^{-1}(L_j^{(N)}), \quad m_\mu(r^{-1}(L_j^{(N)}) - A_j^{(N)}) = 0$$

ナル Borel set $L_j^{(N)} \subset G$ ガ存在スル; 従ッテ charakteristische Funktion = ヲイテ言ヘバ

$$\|e_{A_j^{(N)}} - e_{L_j^{(N)}} \cdot r\|_{m_\mu} = 0$$

故 =

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|g - \sum_j \alpha_j e_{L_j^{(N)}} \cdot r\|_{m_\mu} = 0,$$

従ッテ $h_g^{(\mu)} \cdot r \wedge h_g^{(m_\mu)}$ $\neq$ überall dicht ナル. 故

形 終キ

$(f, g)_m$, 長カ $\|f\|_m$ ト書ク. §1 Nr 4 参照.

$=$, $l_{y_g}^{(\mu)}$ は vollständig デアルカラ $l_{y_g}^{(\mu)} \cdot \gamma = l_{y_g}^{(m, \mu)}$ デ
 + ケレバ + ラナイ。 (証明終)

—— 一般 $= m^*$ が空間 R / Map + ルトキ, Hilbert
 空間 $l_{y_R}^{(m)}$ が separabel + ラバ, 吾々ハ Map m^* ハ
 separabel デアルトイフコト = スル。定理 1 = ヨツテ之
 レヲ言ヒ直セバ:

定義. (m) が距離 $d_m =$ 関シテ separabel + ルトキ,
 Map m^* ハ separabel デアルトイフ。

既ニ述ベタ如ク, ³⁴⁾ $l_{y_g}^{(\mu)}$ ハ separabel デアル。従ツ
 テ Isomorphiesatz = ヨツテ

定理 17. Haar / Map = ヨツテ induzieren + レタ
 Map ハ separabel デアル。

2. Weil / 定理. 定理 11 及ビ 17 = ヨツテ, Haar
 / Map = ヨツテ induzieren + レタ Map ハ separa-
 bel + Weil / Map + ルコトガ知ラレイル。逆 =:
 Weil / 定理. separabel + Weil / Map ハ Haar /
 Map = ヨツテ induzieren + レタ Map デアル。ス+ハチ
 m^* 群 G / separabel + ル Weil / Map トスレバ, G
 / Normalteiler N 及ビ G/N 中含ム abzählbare
 Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt + 群 O_f が
 存在シテ, m^* ハ O_f / Haar / Map = ヨツテ induzie-
 ren + レタ Map ト一致スル。

証明. 假定 = ヨツテ Hilbert 空間 $l_{y_G} = l_{y_G}^{(m)}$ ハ

34) §2 Nr 3 参照。

separabel であるから、定理2 = ヲツテ、 $\mathcal{H}_G$ unitärer Operator, 作ル群 $\mathbb{U}_{\mathcal{H}_G}$ は links-invariant + Metrik を有スル separabel, vollständig + 群である。

$a \in G =$ 対シテ U_a 7

$$U_a \cdot f(x) = f(a^{-1}x), \quad f(x) \in \mathcal{H}_G$$

= ヲツテ 定義サレタ unitärer Operator トスレバ、
明ラカ =

$$U_a U_b = U_{ab};$$

従ツテ N 7 $U_a = 1$ + ル a 全体ヨリ 成ル Normalteiler トスレバ、 $a \rightarrow U_a =$ ヲツテ G/N 7 $\mathbb{U}_{\mathcal{H}_G}$ 内 = isomorph = einbetten + レル。コノ = 於テ、 $a \in G, \text{ mod } N$, Restklasse $r(a)$ ト U_a 7 identifizieren シテ G/N 7 $\mathbb{U}_{\mathcal{H}_G}$ / 部分群 ト考ヘル。

$$r(a) = U_a, \quad G/N \subset \mathbb{U}_{\mathcal{H}_G};$$

然ル後 G/N / $\mathbb{U}_{\mathcal{H}_G}$ 内, abgeschlossene Hülle 7 $\mathcal{O}_f$ トスレバ、明ラカ = $\mathcal{O}_f$ 7 links-invariant + Metrik を有スル separabel, vollständig + 群であるヲツテ、 G/N 7 $\mathcal{O}_f$ 内 7 überall dicht である。

従ツテ m^* が Haar / Maß = ヲツテ induzieren + レタ Maß + ルコトヲ証明スルタメ = ハ、定理14 / 条件2), 3) 及び 4) が成立スルコトヲ示セバヨイ。——

I) $\mathcal{O}_f$ / 元 U_0 , 近傍 $\mathcal{U}$ 7

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(U_0; f_1, \dots, f_n, \varepsilon)$$

$$= \{ U; \| (U - U_0) f_j \| < \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq n \}$$

³⁵⁾ 此形ヲモツ。従ツテ $r(a) = \mathcal{U}_a$ デアルカラ, $\mathcal{U}_0 f_j = g_j$
 トオケバ

$$r^{-1}(\mathcal{U}) = \left(a; \int_G |f_j(a^{-1}x) - g_j(x)|^2 m(dx) < \varepsilon^2, 1 \leq j \leq k \right).$$

然ルニ, m^* ハ Weil / Map デアルカラ $f_j(a^{-1}x) - g_j(x)$ ハ
 a, x = 変数 / m -meßbar ナル函数, 従ツテ Fubini /
 定理ニヨツテ $r^{-1}(\mathcal{U})$ が m -meßbar ナルコトガ分ル。
 故ニ一般ニ $\mathcal{U}$ が閉集合ノトキモ $r^{-1}(\mathcal{U})$ ハ m -meßbar
 デアル。

II) 充分小ノイ 閉集合 $\mathcal{U}$ トレバ $m(r^{-1}(\mathcal{U})) < +\infty$ デアル。
 コレヲ証明スルタメニ A ヲ

$$0 < m(A) < +\infty, \quad 0 < m(A^{-1}) < +\infty$$

ナル m -meßbar ナ 部分集合トシ, ³⁶⁾ $\mathcal{U}$ ヲ

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(1; e_A, \varepsilon)$$

トオケバ, 明ラカニ

$$r^{-1}(\mathcal{U}) = \left(a; \int_G |e_A(a^{-1}x) - e_A(x)| m(dx) < \varepsilon^2 \right)$$

然ルニ

$$\begin{aligned} \int_G |e_A(a^{-1}x) - e_A(x)| m(dx) \\ = 2m(A) - 2 \int_G e_A(a^{-1}x) e_A(x) m(dx) \end{aligned}$$

デアルカラ

35) §1 Nr 5 参照。

36) カク, 如キ A が存在スルコトハ定理 7 ヲリ証明サレル。

$$r^{-1}(U) = \left\{ a; \int_G e_A(a^{-1}x) e_A(x) m(dx) > m(A) - \frac{\varepsilon^2}{2} \right\};$$

従って

$$\int_G m(da) \int_G e_A(a^{-1}x) e_A(x) m(dx) > \left(m(A) - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) m(r^{-1}(U)).$$

故 = Fubini の定理 = ヲツテ

$$\begin{aligned} \left(m(A) - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) m(r^{-1}(U)) &< \int_G m(dx) \int_G e_{x^{-1}A}(a) e_A(x) m(da) \\ &= m(A^{-1}) m(A) < +\infty. \end{aligned}$$

故 = , 豫メ ε ヲ 充分小サクトツテオケバ

$$m(r^{-1}(U)) < +\infty$$

III) U 及び U_1 ヲ

$$U_1 \subset \overline{U_1} \subset U, \quad m(r^{-1}(U)) < +\infty$$

トル U ノ 開集合トシ, A ヲ

$$\overline{r(A)} \subset U_1, \quad m(A^{-1}) < +\infty$$

トル m -measurable ト G ノ 部分集合トスル. 但シコノ = 於

テ $\overline{U_1}$ 及び $\overline{r(A)}$ ハ 夫々 U_1 及び $r(A)$, abgeschlossene

Menge ト現ハスモノトスル. コノトキ, H_q , 完全正交直

交系ヲ

$$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots$$

トスルバ

$$u_a \cdot e_{A^{-1}} = \sum_{j=1}^{\infty} (u_a \cdot e_{A^{-1}}, \mathcal{P}_j) \mathcal{P}_j;$$

スナハチ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_a \cdot e_{A^{-1}} - \sum_{j=1}^n (u_a \cdot e_{A^{-1}}, g_j) g_j\| = 0.$$

今簡単, $\times \times$

$$\sum_{j=1}^n (u_a \cdot e_{A^{-1}}, g_j) g_j(x) = S_n(u_a, x)$$

トオケバ, $\forall$ ノ形カラ容易ニ示スル如ク, $S_n(u_a, x)$ ハ u_a
 = ツイテハ連続, a, x = 変数 = ツイテハ m -measurable ナ
 ル函数ガアツテ,

$$\int_G |e_{A^{-1}}(a^{-1}x) - S_n(u_a, x)|^2 m(dx) \leq \|e_{A^{-1}}\|^2$$

従ツテ, 上ニ述ベタ如ク

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G |e_{A^{-1}}(a^{-1}x) - S_n(u_a, x)|^2 m(dx) = 0$$

デアルカラ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n^{-1}(U)} m(da) \int_G |e_{A^{-1}}(a^{-1}x) - S_n(u_a, x)|^2 m(dx) = 0;$$

故ニ, $e_{A^{-1}}(a^{-1}x) = e_{x_A}(a)$ デアルカラ, Fubini ノ理
 用ニヨツテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G m(dx) \int_{n^{-1}(U)} |e_{x_A}(a) - S_n(u_a, x)|^2 m(da) = 0.$$

従ツテ ³⁷⁾

37) Fatou, Lemma = ヱル. Sakai: Theory of Integral
 P. 29. 参照.

$$\int_G m(dx) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{r^{-1}(U)} |e_{x_A}(a) - S_n(u_a, x)|^2 m(da) = 0;$$

故 = , m -Maß 0 ノ x -Menge X_0 7 除ケバ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{r^{-1}(U)} |e_{x_A}(a) - S_n(u_a, x)|^2 m(da) = 0.$$

然ル = , 任意ノ 開集合 U ノ $r^{-1}(U)$ ノ m -Measure > 0

$$m(r^{-1}(U)) > 0$$

デアルカラ, ³⁸⁾ $x_1 \notin X_0$ 7, $r(x_1) = u_{x_1}$ が充分 1 = 近イ
様 = 選ンデ

$$r(x, A) = r(x_1) \cap r(A) \subset U,$$

ナラシメルコトが出来ル。 - ノトキ, $t(u)$ ($u \in \mathcal{O}_f$) 7

$$0 \leq t(u) \leq 1, \quad t(u) = \begin{cases} 1 & u \in \overline{U}, \text{ ノトキ} \\ 0 & u \notin \overline{U} \text{ ノトキ} \end{cases}$$

ナル 連続函数 トスレバ, 明ラカ =

$$\begin{aligned} & |e_{x_1, A}(a) - S_n(u_a, x_1) + (u_a)| \\ &= |e_{x_1, A}(a) - S_n(u_a, x_1)| + (u_a) \end{aligned}$$

デアルツテ

$$t(u_a) \leq e_{r^{-1}(U)}(a)$$

デアルカラ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G |e_{x_1, A}(a) - S_n(u_a, x_1) + (u_a)|^2 m(da) = 0.$$

38) 何トナレバ, $\mathcal{O}_f$ が separabel デアルカラ,

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot r^{-1}(U) = G$$

ナル $x_j \in G$ が存在スル。従ツテ $m(r^{-1}(U)) > 0$ デナレバナラナイ。

従って、今

$$\mathcal{U}^{(n)} = \{u; |1 - S_n(u, x) + (u)| < \frac{1}{2}\}$$

トオケバ 明ヲカ = $\mathcal{U}^{(n)}$ の σ_f の 開集合デアッテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_m(x, A, r^{-1}(\mathcal{U}^{(n)})) = 0 \quad 39)$$

故 =

$$r(x_i^{-1}) \cdot \mathcal{U}^{(n)} = \mathcal{U}_i^{(n)}$$

トオケバ、 m^* が *links-invariant* デアルカラ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_m(A, r^{-1}(\mathcal{U}_i^{(n)})) = 0$$

—— 一般 = $A \in (m)$ とルトデハ、

$$\overline{r(A_j)} \subset \mathcal{U}_{j'} \subset \overline{\mathcal{U}_{j'}} \subset \mathcal{U}_{j'}, \quad m(r^{-1}(\mathcal{U}_{j'})) < +\infty,$$

$$m(A_{j'}^{-1}) < +\infty$$

とル m -meßbar + 部分集合 $A_j \subset G$ フ適當 = 選ンデ

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} A_j$$

ト現ハスコトが出來ル。故 = 上 = 証明シタ結果 = ヨツテ、任

意、 $\varepsilon > 0$ = 對シテ

$$d_m(A, r^{-1}(\mathcal{U})) < \varepsilon$$

とル σ_f の 開集合 $\mathcal{U}$ が 存在スル。

—— 故 = 定理 14 = ヨツテ σ_f は *im Kleinen kompakt*

デアッテ m^* の σ_f の Haar, Maß $\mu^* = \text{ヨツテ induzie}$

39) 何トナレバ

$$d_m(x, A, r^{-1}(\mathcal{U}^{(n)})) < \frac{1}{4} \int_G |e_{x, A}(a) - S_n(\mathcal{U}_a, x)|^2 t(\mathcal{U}_a) \mu(da).$$

sein + Le * Maß 7777:

$$m^* = m_\mu^* \quad (\text{証明終})$$

吾々ハ次ノ Nr 3 77 m^* が與ヘラレタトキ $m^* = m_\mu^*$ ナル μ^* ハ eindeutig = 定マルコトヲ証明スル。

3. Eindeutigkeitssatz. G 77 群, m^* 77 G separabel + Weil, Maß トスル. コノトキ次ノ條件 1) 2) 77 満タスル abzählbare Basis 77 有スル im Kleinen kompakt + 群 O_f ハ eindeutig = 定マル:

$$1) \quad G/N \subset O_f.$$

$$2) \quad m^* \wedge O_f \text{ Haar, Maß } \mu^* = \exists \text{ ヲツテ induzieren + Le * Maß 7777.}$$

$$m^* = m_\mu^*.$$

証明. Isomorphiesatz = $\exists \nu$ ニ, $f(\xi) \rightarrow f \nu(x)$ + Le 對應 = $\exists$ ヲツテ $h_{y_{O_f}}^{(\mu)}$ ト $h_{y_G}^{(m_\mu)}$ ハ isomorph = ナル. ヲコヲ吾々ハ f ト $f \nu$ 77 „identifizieren“ シテ

$$f = f \cdot \nu, \quad h_y = h_{y_{O_f}}^{(\mu)} = h_{y_G}^{(m_\mu)}$$

ト考ヘ, h_y unitärer Operator, 作ル群 77 $\{U_{h_y}\}$ トナ7. Nr 2 = 於ケルト同様 =

$$U_x f(y) = f(x^{-1}y), \quad U_\xi f(\eta) = f(\xi^{-1}\eta) \\ = \exists \text{ ヲツテ } U_x, U_\xi \text{ 77 定義スルニ, } f = f \cdot \nu \text{ ナル Identifizierung} = \exists \text{ ヲツテ}$$

$$U_x = U_{\nu(x)}$$

トナル。

然ルニ定理6ニヨレバ

$$\xi = U_{\xi}$$

ナル Identifizierung = $\exists$ ヲテ O_f ハ $\mathbb{U}_{\mathbb{H}}$ 内 = topologisch isomorph = einbetten セラレル。コノトキ $G/N \subset O_f$, $\pi: r(x)$, Einbettung ,

$$r(x) = U_{r(x)} = Ux$$

ヲ與ヘラレ, $x \in G$ ト m^* , Σ ニヨツテ定マリ, O_f = 関係シタイ。 G/N ハ O_f 中 überall dicht, 従ツテ O_f ハ vollständig テアラルカラ, $\mathbb{U}_{\mathbb{H}}$ 内テ作ツテ G/N , abgeschlossene Hülle テアナル:

$$O_f = \overline{G/N} \quad \text{in} \quad \mathbb{U}_{\mathbb{H}}$$

スナハチ O_f ハ eindeutig = 定マル。 (証明終)

コノ証明ニヨレバ;

Zusatz zum Eindeutigkeitssatz. O_f 中 abzählbare Basis 有スル im Kleinen kompakt 群, G 中 $G/N \subset O_f$ ナル群トシ, $m^* \rightarrow G$ = 於ケル O_f , Haar , Maß = $\exists$ ヲテ induzieren ナル $\neq$ Maß トスル。コノトキ U_a ヲ

$$U_a f(x) = f(a^{-1}x), \quad f(x) \in \mathcal{H}_G^{(m)}$$

ヲ定義ナレタ $\mathcal{H}_G^{(m)}$, unitärer Operator トスレバ

$$N = (a; U_a = 1)$$

ヲアツテ, mod N / Restklasse $r(a)$ ト U_a ヲ identifizieren シテ

$$r(a) = U_a, \quad G/N \subset \coprod_{g \in G} {}^{(m)}_{fg}$$

ト考へルナラバ

$$\mathcal{O}_f = \overline{G/N} \quad \text{in} \quad \coprod_{fg \in G} {}^{(m)}_{fg}$$

—— 逆 =, Weil の定理 = ヨレバ, $G =$ 於テ separabel + 且 Weil, Map m^* が與へラレタトナ

$$\mathcal{O}_f = \overline{G/N} \quad \text{in} \quad \coprod_{fg \in G} {}^{(m)}_{fg}$$

トオケバ, $\mathcal{O}_f$ は links-invariant + Metrik を有ス
 且 separabel, im kleinen kompakt + 群 $\mathcal{O}_f$ ナ
 テ, m^* へ $\mathcal{O}_f$ / Haar, Maß = ヨツテ induzieren +
 レタ Maß ナル。

§6. 群 / Map ト Metrik, 関係

1. 對應定理. m^* ナ群 G / separabel + 且
 Weil, Maß トスレバ, Weil の定理 = ヨツテ, Normal-
 teiler N 及ビ $G/N \subset \mathcal{O}_f$ + 且 abzählbare Basis
 ナ有ス 且 im kleinen kompakt + 群 $\mathcal{O}_f$ が存在シテ,
 m^* へ $\mathcal{O}_f$ / Haar, Maß = ヨツテ induzieren + レタ
 Maß ト一致スル. $\mathcal{O}_f$ は links-invariant + Metrik
 ナ有スル. コレヲ $\rho_{\mathcal{O}_f}$ トシ,

$$\rho(x, y) = \rho_{\mathcal{O}_f}(\gamma_N(x), \gamma_N(y)), \quad x, y \in G \quad (40)$$

= ヨツテ $\rho(x, y)$ ナ定義スレバ, ρ へ G / links-invariant
 + "allgemeine" Metrik ト考へラレル. 吾々ハ コナナ,

40) $\gamma_N(x)$ ハ $x, \bmod N$, Restklasse ナル。

§3 Nr 2 参照。

カクノ如キ *Metrik* ト *Weil*, *Map*, 関係 = ヲイテ考ヘ
テ見ルコト = シヨウ。

—— 先ヅ定義カラ始メル:

定義. 群 G , *nicht-negativ* + 二変数ノ實函数
 $\rho(x, y)$ が次ノ條件 1) — 4) を満足スルトキ, 吾々ハ ρ を
 G ノ t -*Metrik* トイフコト = スル:

- 1) $\rho(x, x) = 0$
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- 3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$
- 4) ρ ハ *links-invariant* ナル:

$$\rho(xz, zy) = \rho(x, y)$$

- 5) $x_0, y_0 (\in G)$ 及び $\varepsilon > 0$ が任意ニ與ヘラレタトキ,
 $\delta > 0$ を充分小ナクトレバ,

$$\rho(x, x_0) < \delta, \rho(y, y_0) < \delta \text{ ノトナ}$$

$$\rho(y^{-1}x, y_0^{-1}x_0) < \varepsilon.$$

t -*Metrik* ρ = 於テハ一般ニ所謂 *Trennungsaxiom*:

$$(T) \quad \rho(x, y) = 0 \text{ ナラバ } x = y$$

ハ成立シナイケレドモ, 形式的ニハ全ク同様ニ, ρ = 基ヅイ
テ „*offen*“, „*abgeschlossen*“, „*stetig*“ etc. を
考ヘルコトが出来ル。 ρ を明示スル必要カアル場合ニハコレ
ヲ ρ -*offen*, ρ -*abgeschlossen*, ρ -*stetig*, etc.
トイフコト = シヨウ。 t -*Metrik* ノ定義ノ條件 5) ハス
ナハチ, x, y ノ *Funktion* $y^{-1}x$ が ρ -*stetig* ナルト
イフコト = 地ナラナ⁴⁾イ。 (脚註次頁ニ)

ρ が G の t -Metrik とルとき,

$$N_\rho = (x; \rho(x, 1) = 0)$$

トオクコト = スレバ, N_ρ は G の Normalteiler デアツテ,
 $\rho(x, y)$ は mod N_ρ の Restklasse $\gamma_{N_\rho}(x), \gamma_{N_\rho}(y)$
ノミ = ヨツテ定マル. コレヲ $\gamma_{N_\rho}(x)$ ト $\gamma_{N_\rho}(y)$ ノ距離ト考
ヘ, 簡單ノタメ同シ文字 ρ テ現ハスコト = スル:

$$\rho(\gamma_{N_\rho}(x), \gamma_{N_\rho}(y)) = \rho(x, y)$$

然ルトキハ G/N_ρ ハ ρ 7 links-invariant + Metrik
トスル topologische Gruppe デアツテ, G ノ閉集合,
閉集合 etc. ハスナハチ夫々 G/N_ρ ノ閉集合, 閉集合 etc.
ノ γ_{N_ρ} -Urbild ト一致スル ———.

定義. G 7 群, m^* 7 G ノ Weil / Maß, ρ 7 G ノ
 t -Metrik トスル. コノトキ, m^* ト ρ ノ間 = 次ノ関係ノ
及ビ 2) が存在スルナラバ, ρ ハ m^* = 属スル t -Metrik
デアルトイフ:

1) G ノ ρ -offene Menge ハ m -meßbar デ
アル.

2) $A \in (m)$ とルとき, 任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シテ

$$d_m(A, U) < \varepsilon$$

トスル ρ -offene Menge U が存在スル.

然ルトキハ

定理 18. G 7 群, m^* 7 $\vee$, Weil / Maß, ρ 7

4) コノトキ, $f(x)$ が ρ -stetig トスレバ, $\rho(x, y) = 0$ ナラバ
 $f(x) = f(y)$ デアル.

m^* = 属スル separabel + t -Metrik トスル⁴²⁾ コノトキ
 G/N_p / p -Komplettierung γ of トスル⁴³⁾ γ $\wedge$ ab-
 zählbare Basis γ 有スル im Kleinen kompakt
 + 群 γ γ ヲテ, m^* $\wedge$ γ / Haar, Maß = $\exists \gamma$ γ induzie-
 ren + レタ Maß ト一致スル. $\mathbb{U}_G \ni h_{\gamma_G}^{(m)}$, unitärer
 Operator 全体 / 作ル群, $U_a \gamma$

$$U_a f(x) = f(a^{-1}x), \quad f(x) \in h_{\gamma_G}^{(m)}$$

= $\exists \gamma$ γ 定義 + レタ unitärer Operator トスル⁴³⁾.

$$N_p = (a; U_a = 1)$$

γ γ ヲテ

$$\gamma_{N_p}(a) \longrightarrow U_a$$

トル Abbildung = $\exists \gamma$ γ , p γ Metrik トスル群 G/N_p
 $\wedge$ $\mathbb{U}_G$ 内 = topologisch isomorph = einbetten
 γ レル。

42) G γ p -separabel + ルトキ, 吾々 $\wedge$ p $\wedge$ separabel γ
 γ γ トイ γ コト = スル。

43) 一般 = metrischer Raum R γ 映 γ γ レタトキ, $R = \gamma$
 / Fundamentalfolge, limit γ 附加 γ γ , vollständig
 + metrischer Raum $\bar{R}$ = 拡張スルコトが出来ル。吾
 々 $\wedge$ von Dantzig = 従 γ γ , $\bar{R} \ni R$ / Komplettierung
 トイ γ コト = スル。 von Dantzig: Zur topologischen
 Algebra I; Math. Ann. 107 参照。 — 一般 =,
 G γ p γ links-invariant + Metrik トスル topolo-
 gische Gruppe + ルトキ $\wedge$, G / p -Komplettierung
 (次頁)

証明. $O_f \wedge P$ links-invariant + Metrik ρ による separabel vollständig + topologische Gruppe である. $G/N_P \wedge O_f$ überall dicht, G P -offene Menge U , O_f offene Menge V , r_{N_P} - Urbild $r_{N_P}^{-1}(V)$ 一致する. 従って, $\rho \wedge m^* =$ 属する t -Metrik であるから, G, N_P, m^*, O_f が定理 14 (条件 1) - 4) を満足するコトが容易に確かめられる. 故に O_f は im Kleinen kompakt, $m^* \wedge O_f$ Haar-Maß = ρ を induzieren する ρ 一致する. 従って, §5 Nr 3, Zusatz zum Eindeutigkeitssatz = である.

$$N_P = (a; U_a =:)$$

且つ

$$r_{N_P}(a) \rightarrow U_a$$

が topologisch isomorph + Einbettung であるコトがわかる. (証明終)

(附註 43) (ツヅキ) 其 1 -

$\overline{G} \in \mathcal{A}$ ρ links-invariant + Metrik ρ による topologische Gruppe である. 何とすれば: $\rho(x, y) = \rho(y^{-1}x, 1)$ であるから, $(x_j) = (x_j; j = 1, 2, 3, \dots)$ が Fundamentalfolge であるコトは $\lim x_j^{-1} x_k = 1$, 二つの Fundamentalfolge (x_j) と (y_j) が äquivalent であるコトは $\lim y_j^{-1} x_j = 1$ であるから. コトは:

補助定理 1. $\lim x_j^{-1} x_k = 1, \lim y_j = 1$ ならば

$$\lim x_j^{-1} y_j x_j = 1. \quad (\text{水戸へツツグ})$$

最初 = 述べた如く, G = separabel + Weil, Map m^* の與へられたい, $m^* = \exists \text{ ヲテ定ヌル } G/N \subset O_f + N$ separabel, im Kleinen kompakt + 群 O_f 1 links-invariant + Metrik $\rho_{O_f} = \exists \text{ ヲテ}$

$$\rho(x, y) = \rho_{O_f}(\gamma_N(x), \gamma_N(y)), \quad x, y \in G$$

+ G 1 allgemeine Metrik ρ が定義せられ. ρ 1 明カ = G 1 separabel + t -Metrik $\neq$ アツテ, m^* 1 O_f 1 Haar, Map $= \exists \text{ ヲテ induzieren せられ Map } \neq$ せられ, 定理 13 = $\exists \text{ ヲテ, } \rho \text{ 1 } m^* = \text{腐スル.}$

(附註 43) ヲツツキ 其, =

$$\text{証明. } \rho(x_j^{-1} y_j x_j, 1) = \rho(y_j x_j, x_j) \leq \rho(x_j, x_n)$$

$$+ \rho(y_j x_n, x_n) + \rho(x_n, x_j) \quad \text{故} = k \neq \text{定ヌテオ}$$

$$k \neq \lim_j \rho(x_j^{-1} y_j x_j, 1) \leq 2 \lim_j \rho(x_j, x_n). \quad k \neq \text{任意}$$

$$\neq \text{せられかつ, 従ツテ } \lim_j \rho(x_j^{-1} y_j x_j, 1) = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

コ 1 補助定理 1, G 1 van Dantzig 1 所謂 Kompletierungs axiom $\neq$ 満足スルコトヲ示ス. $\bar{G}$ 1 元 $\bar{x} = (x_j)$,

$$\bar{y} = (y_j) = \text{決ニテ } \bar{y}^{-1} \bar{x} \neq$$

$$\bar{y}^{-1} \bar{x} = (y_j^{-1} x_j)$$

ト定義スレバ, $\bar{y}^{-1} \bar{x}$ 1 $\bar{x}$, $\bar{y} = \exists \text{ ヲテ eindeutig = 定ヌツ}$

テ, $\bar{G}$ 1 群 = せられコトガ, コ 1 補助定理 = $\exists \text{ ヲテ 容易 = 確ヌ}$

せられ. $\bar{G}$ 1 Metrik ρ 1 勿論

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_j \rho(x_j, y_j)$$

$\neq$ 定義せられ. コ 1 ρ 1 links + invariant + ルコトハ明

自バツラツ.

(次頁へツツク)

(脚註43)ノヤヤキ)其ニ

$\bar{G}$ が ρ 7 Metrik とスル topologische Gruppe 7ルコ

トヲ証明スルヤスニ:

補助定理2. $\lim_N \rho(\bar{x}_N, \bar{x}) = 0$ 7ラバ $\lim_N \rho(\bar{x}_N \bar{y}, \bar{x} \bar{y}) = 0$

証明. $\lim_N \rho(\bar{x}_N \bar{y}, \bar{x} \bar{y}) \neq 0$ トスレバ, 必要カ7レバ

(N) カラ適当ナ部分列ヲ選ブコトニヨツテ, $\lim_N \rho(\bar{x}_N \bar{y}, \bar{x} \bar{y})$

$\geq c > 0$ ト考ヘテヨイ。

$\bar{x} = (x_j)$ $\bar{y} = (y_j)$ $\bar{x}_N = (x_{Nj})$ トスレバ, 從テ充分

大ナル $N =$ ツイテハ,

$$\lim_j \rho(x_{Nj} y_j, x_j y_j) \geq c' > 0;$$

從ツテ, $N =$ ヲツテ定マル j_N カ7ツテ

$$j > j_N, \text{ トキ } \rho(x_{Nj} y_j, x_j y_j) \geq c'' > 0.$$

然ルニ $\lim_N \rho(\bar{x}_N, \bar{x}) = 0$ ナ7ルコトヲ, $N =$ 対シテ $k_N > j_N$ 7

充分大ナクトレバ

$$\lim_N \rho(x_{Nk_N}, x_{k_N}) = 0$$

スナハチ

$$\lim_N x_{k_N}^{-1} x_{Nk_N} = 1$$

ナ7ル。故ニ

$$\lim_N y_{k_N}^{-1} x_{k_N}^{-1} x_{Nk_N} y_{k_N} = 1$$

コレハ

$$\rho(x_{Nk_N} y_{k_N}, x_{k_N} y_{k_N}) \geq c'' > 0$$

ニ反スル。(証明終)

コノ補助定理2ニヨツテ $\bar{y}^{-1} \bar{x}$ ノ連続性カ次ノ様ニ証明

サレル:

(次頁ヘツザク)

然レニ、定理 18 = ヨレバ、 m^* が與ヘラレタトキ、コレニ属スル ρ ノスベテ互ニ äquivalent デアツテ⁴⁴⁾、又逆ニ m^* ハ、ソレニ属スル ρ が與ヘラレタトキ、*multiplicativ + Konstant* を考ヘニ入レナケレバ *eindeutig* ニ定マル。何トナレバ、 m^* ハ G/N_ρ ノ ρ -Komplettierung of Idaar / Map ニヨツテ *induzieren* ナレタ Map デアツテ、 Idaar / Map ハ *multiplicativ + konstant* を考ヘニ入レナケレバ、*eindeutig* ニ定マルカラデアル。故ニ

對應定理。群 G = 於テ *separabel + Weil* / Map m^* が與ヘラレタトキ、コレニ属スル Δ *separabel + t -Metrik* ρ が存在シテ、*äquivalent + ϵ* / ρ 區別シナイコトニスレバ、*eindeutig* ニ定マル。逆ニ m^* ハ、コレニ属スル ρ が與ヘラレタトキ、*multiplicativ + Konstant* を考ヘニ入レナケレバ *eindeutig*

(附註 43) ノツツキ) 其ノ四

今、 $\lim \rho(\bar{x}_N, \bar{x}) = 0$, $\lim \rho(\bar{y}_N, \bar{y}) = 0$ トスレバ

$$\begin{aligned} \rho(\bar{y}_N^{-1} \bar{x}_N, \bar{y}^{-1} \bar{x}) &\leq \rho(\bar{y}_N^{-1} \bar{x}_N, \bar{y}_N^{-1} \bar{x}) + \rho(\bar{y}_N^{-1} \bar{x}, \bar{y}^{-1} \bar{x}) \\ &= \rho(\bar{x}_N, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, \bar{y}_N \bar{y}^{-1} \bar{x}) \end{aligned}$$

故ニ、補助定理 2 = ヨツテ

$$\lim (\bar{y}_N^{-1} \bar{x}_N, \bar{y}^{-1} \bar{x}) = 0$$

44) 一般ニ空間 R / = ヲノ *Metrik* ρ_1, ρ_2 ガ R / 同一、

Topologie を *induzieren* スルトキ、 ρ_1 ト ρ_2 ハ *äquivalent* デアルトイフ。

=定マ^ル。⁴⁵⁾

2. „density” の理論。所謂 „density” = 関スルニ三ノ定理ヲ述ベル。先ツ:

定理19. m^* ヲ G ノ separabel + Weil, Maß, ρ ヲ m^* = 属スル t -Metrik トシ, V_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) ヲ 距離 ρ = 関シテ単位元 1 = 收歟スル ⁴⁶⁾ m -meßbar + 部分集列,

$$m(V_j) > 0$$

トスル。然ルトキハ, 任意ノ m -meßbar + 部分集合 A が 與ヘラレタトキ, A ノ 殆ンドスベテノ 点 a = 於テ ⁴⁷⁾

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m(aV_j \cap A)}{m(V_j)} = 1$$

証明. $A = \sum A_N$ ノトキ各 A_N = ヱイテ定理が成立ス

45) G ノ t -Metrik ρ が任意ニ與ヘラレタトキ, 一般ニハ, ρ が 属スル Weil, Maß m^* ハ存在シナイ。例ヘハ, G ヲ有理数全体ノ作ル加法群トシ, ρ ヲ $\rho(a, b) = |a - b|$ ト定義スレバ, ρ が属スル m^* ハ存在シナイ。

46) ストハチ, ε = 与シテ j ヲ充分大ヤクトレバ

$$a \in V_j \text{ ノトキ } \rho(a, 1) < \varepsilon$$

ト假定スルノデア^ル。

47) 一般ニ, マル性質 E が集合 A ノ 高々 Maß 0 ノ 点ヲ除イテ成立スルトキ, 吾々ハ A ノ 殆ンドスベテノ 点 = 於テ E デアルトイフ。コレハ実函数論ノ慣用語デア^ル。

レバ $A = \cup I_n \in \mathcal{A}$ 成立ッ。故ニ始メカラ

$$m(A^{-1}) < +\infty$$

ト假定シテ 差支ヘナシ。——

$V_j \cap j \rightarrow \infty$ ノ トキ $I =$ 收歟スル。從ツテ、定理 18
ニヨツテ $a \rightarrow U_a$ ハ p -stetig ナアルカラ、 $\varepsilon > 0 =$ 對
シテ j ヲ 充分大キクトレバ、 $x \in V_j$ ノ トキ、

$$\|U_x e_{A^{-1}} - e_{A^{-1}}\|^2 < \varepsilon$$

トナル。ココニ $e_{A^{-1}}$ ハ A^{-1} 之 *characteristische Funktion* ナアル。スナハチ

$$\int_G |e_{A^{-1}}(x^{-1}a) - e_{A^{-1}}(a)| m(da) < \varepsilon;$$

從ツテ、 $a \in A^{-1}$ ノ トキハ $e_{A^{-1}}(a) = 1$ ナアルカラ、

$$\int_{A^{-1}} (1 - e_{A^{-1}}(x^{-1}a)) m(da) < \varepsilon.$$

故ニ、コレヲ $x \in \cup V_j$ ナ 積ムスレバ

$$\int_{V_j} m(dx) \int_{A^{-1}} (1 - e_{A^{-1}}(x^{-1}a)) m(da) < \varepsilon \cdot m(V_j)$$

從ツテ

$$\int_{A^{-1}} m(da) \int_{V_j} (1 - e_{aA}(x)) m(dx) < \varepsilon \cdot m(V_j),$$

或ハ

$$\int_{A^{-1}} (m(V_j) - m(V_j \cap aA)) m(da) < \varepsilon \cdot m(V_j).$$

コノ 兩辺ヲ $m(V_j)$ ニ 割レバ、

$$\int_{A^{-1}} \left(1 - \frac{m(V_j \cap aA)}{m(V_j)} \right) m(da) < \varepsilon,$$

故=, $\varepsilon > 0$ の任意にアツタカラ

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{A^{-1}} \left(1 - \frac{m(a^{-1}V_j \cap A)}{m(V_j)} \right) m(da) = 0$$

デアル、故=

$$\int_{A^{-1}} \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m(a^{-1}V_j \cap A)}{m(V_j)} \right) m(da) = 0,$$

然レテ A^{-1} の Maß の部分集合 A_0 を除ケバ

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m(a^{-1}V_j \cap A)}{m(V_j)} \right) = 0$$

ナラケレバナラナイ。然ル $m(A_0) = 0$ ときハ $m(A_0^{-1}) = 0$ デアツタ。

故=, A の殆んどスベテノ点 a 於テ

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{m(aV_j \cap A)}{m(V_j)} = 1 \quad (\text{証明終})$$

定理 20. (Überdeckungssatz) G は群, m^* は ν の links-invariant な Maß , V_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) は

$$0 < m(V_j) < +\infty$$

ナル m -meßbar な部分集合列トシ, 任意ノ m -meßbar ナ A に対シテハ ν の殆んどスベテノ点 a 於テ

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{m(aV_j \cap A)}{m(V_j)} = 1$$

ト假定スル。然レトキハ、任意ノ有限ナ Map フモツ
 m -meßbar ナ集合 A , 及ビ $\varepsilon > 0$ ガ與ヘラレタトキ、適
 當 $= a_N \in G$ ($N = 1, 2, \dots$) 及ビ V_{j_N} フ選ンデ

$$m\left(A - \sum_{N=1}^{\infty} a_N V_{j_N}\right) = 0, \quad \sum_{N=1}^{\infty} m(V_{j_N}) < m(A) + \varepsilon$$

ナラシメルコトガ出來ル。

証明。 $\delta > 0$ フ充分小サイ任意ノ正数トスル。一般ニ
 $m(A) > 0$ ナルトキハ假定ニヨツテ

$$\frac{m(a V_{j_i} \cap A)}{m(V_{j_i})} > 1 - \delta$$

ナル $a \in A$ 及ビ V_{j_i} ガ存在スル。カクノ如キ V_{j_i} = ツイテ
 $m(V_{j_i})$ ノ上限ヲ考ヘ、コレヲ $\sigma(A)$ ナ表ハスコトニスル：

$$\sigma(A) = \overline{\lim} m(V_{j_i}),$$

然レトキハ容易ニナル如ク $\sigma(A) > 0$ ナ

$$A \subset B \quad \text{ナラバ} \quad \sigma(A) \leq \sigma(B).$$

——與ヘラレタ A フ A_0 トシ、 $N = 1, 2, 3, \dots$ = 對シ
 テ、 a_N, V_{j_N} 及ビ A_N フ順次ニ、

$$i) \quad m(a_N V_{j_N} \cap A_{N-1}) > (1 - \delta) m(V_{j_N})$$

$$ii) \quad m(V_{j_N}) > (1 - \delta) \sigma(A_{N-1})$$

$$iii) \quad A_N = A_{N-1} - a_N V_{j_N}$$

ナル如ク定メテ行ク。コノコトハ $m(A_{N-1}) > 0$ ナル限リ、常
 ニ可能ナル。コノトキ、i) ト iii) ガ直ニナル如ク

$$\sum_N m(V_{j_N}) < \frac{1}{1 - \delta} m(A)$$

従って又 ii) より

$$\sum_N \sigma(A_{N-1}) < \frac{1}{(1-\delta)^2} m(A)$$

である。故に、或る $N_0 =$ 於て

$$m(A_{N_0}) = m\left(A - \sum_{N=1}^{N_0} a_N V_{j_N}\right) = 0$$

トナルカ、然ラザレバ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma(A_N) = 0;$$

従って、 σ は零調子、 $m(B) > 0$ ならば $\sigma(B) > 0$ であつた
カラ

$$m\left(\prod_N A_N\right) = m\left(A - \sum_N a_N V_{j_N}\right) = 0$$

であつて、 δ を充分小に選ぶと、 δ を充分小に選ぶと

$$\sum_N m(V_{j_N}) < \frac{1}{1-\delta} m(A) < m(A) + \epsilon. \quad (\text{証明終})$$

—— 以上、結果を要約シテ、 ρ が m^* に属スル々々、
必要且つ充分な条件を導出スルコトが出来ル。スナハチ：

定理 21. G が群、 m^* が ρ による separabel + Weil
の Maß、 ρ が separabel + ϵ -Metrik トスル。コノ
トキ ρ が m^* に属スル Metrik トル々々、必要且つ充分な
条件は、次の 1)、及び 2) と 3) が成立スルコトである：

1) ρ に関して $I =$ 收斂スル m -meßbar + ρ -開集
合列 U_j ($j = 1, 2, \dots$) が存在スル。

2) A が m -meßbar トキ、 A の殆んどすべての点

$\alpha =$ 於テ

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{m(\alpha U_j \cap A)}{m(U_j)} = 1$$

3) $A \in (m)$ + ルトキ, 任意, $\varepsilon > 0$ = 對シテ α_N, U_{j_N}
ヲ適當ニ選ンデ

$$m(A - \sum_N \alpha_N U_{j_N}) = 0.$$

$$\sum_N m(U_{j_N}) < m(A) + \varepsilon$$

ヲ示セルコトが出來ル。

証明. 必要ナルコトハ既ニ証明シタ。2) が成立スレバ3) が成立ツ。故ニ1) 及ビ3) が充分條件ナルコトヲ示セバヨイ。
—— ρ ハ separabel ナルカラ, 任意, ρ -開集合ハ $\sum_N \alpha_N U_{j_N}$ + ル形ニ表ハサレル, 故ニ m -meßbar ナル。又 $A \in (m)$ = 對シテ3) ヲ満足スル α_N, U_{j_N} ヲ選ンデ

$$U = \sum_N \alpha_N U_{j_N}$$

トオケバ, U ハ ρ -offen ナリテ

$$d_m(A, U) = m(A - U) + m(U - A) < \varepsilon;$$

故ニ定義ニヨリテ ρ ハ m^* = 属スル。 (証明終)

3. Trennungsaxiom. m^* ヲ G 1 separabel
+ Weil 1 Maß, ρ ヲ m^* = 属スル t -Metrik トスル。

ρ が今 Trennungsaxiom:

$$(T) \quad \rho(x, y) = 0 \quad \text{ナラバ} \quad x = y,$$

ヲ満足スルモノト假定スレバ, G ハ ρ ヲ links-invariant
+ Metrik トスル topologische Gruppe, G ,

Komplettierung of G は separabel, im
Kleinen kompakt $\mathfrak{A}$ ヲツテ, m^* は of $\mathfrak{A}$ Haar, Maß
 $\mu^* = \mathfrak{A}$ ヲツテ

$$m^*(A) = \mu^*(A), \quad A \subset G$$

ト現ハサレル。然テバ ρ が (T) ヲ満足スル $\mathfrak{A}$ ノ必要且ツ充
分ナ條件ハ何デアラウカ。コレヲ次ニ述べヨウ。

定理 2.2. m^* ヲ G ノ separabel + Weil, Maß,
 ρ ヲ m^* = 属スル $\mathfrak{A}$ -Metrik トスル。コノ $\mathfrak{A}$ 分離
nungsaxiom:

$$(T) \quad \rho(x, y) = 0 \quad \text{トラバ} \quad x = y$$

カ成立スル $\mathfrak{A}$ ノ必要且ツ充分ナ條件ハ, 次ノ性質 (T') ヲ
有スル (m) ノ可附添部分集合 $(\Lambda) = (\Lambda_j; \Lambda_j \in (m), j=1, 2, \dots)$ カ存在スルコトデアアル;

(T') $x \neq y$ トラバ $x \in \Lambda, y \notin \Lambda$ 且 $\Lambda \in (\Lambda)$ カ存在
スル。⁴⁸⁾

証明. I) 必要ナル事. G ノ ρ -Komplettierung
of $\mathfrak{A}$ abzählbare Basis ヲ有スル。コレヲ $(\mathfrak{U}_j;$
 $j=1, 2, 3, \dots)$ トシ

$$(\Lambda) = (G \cap \mathfrak{U}_j; j=1, 2, 3, \dots)$$

トオケバ, (Λ) ハ明ラカニ (T) ヲ満足スル。

II) 充分ナルコトノ証明。

⁴⁸⁾ Murray and Neumann: On Rings of Operators,
Part IV; Annals of Math. vol. 39 参照。

$$N_p = (x; p(x, 1) = 0)$$

トオク。然ルトキハ m^* ハ定理 18 = ヲツテ G/N_p , p -Komplettierung of Haar Maß = ヲツテ induzieren + レタ Maß デアルカラ, $\Lambda_j \in (\Lambda) =$ 對シテ

$$r_{N_p}^{-1}(\alpha_j) \supset \Lambda_j, \quad m(r_{N_p}^{-1}(\alpha_j) - \Lambda_j) = 0$$

+ル Borel set $\alpha_j \subset \alpha_j$, 及

$$r_{N_p}^{-1}(\beta_j) \supset r_{N_p}^{-1}(\alpha_j) - \Lambda_j, \quad m(r_{N_p}^{-1}(\beta_j)) = 0$$

+ル Borel set β_j が存在スル。從ツテ

$$m\left(\sum_j r_{N_p}^{-1}(\beta_j)\right) = 0$$

デアルカラ

$$x \in G - \sum_j r_{N_p}^{-1}(\beta_j)$$

+ル x が存在スル。今假 $\Sigma = (\Sigma)$ が成立シナイト假定シテ見ヨウ。然ルトキハ

$$N_p \neq 1,$$

從ツテ

$$y \neq x, \quad y \equiv x \pmod{N_p}$$

+ル y が存在スル。從ツテ 或 $\Lambda_j \in (\Lambda)$ が存在シテ

$$x \in \Lambda_j, \quad y \notin \Lambda_j.$$

然ルニ

$$x \notin r_{N_p}^{-1}(\beta_j)$$

デアツタカラ

$$x \in r_{N_p}^{-1}(\alpha_j) - r_{N_p}^{-1}(\beta_j)$$

従って

$$y \in r_{N_p}^{-1}(\alpha_j) - r_{N_p}^{-1}(\beta_j) \subset \Lambda_j$$

デナケレバナラナイ。コレハ矛盾デアル。

(証明終)

§ 7. 應用ト例

1. Map ノ拡張。以上ノ結果ノ應用トシテ、 Map ノ
拡張ニツイテ考ヘテ見ヨウ。——一般ニ空間 R ノニツノ
 $\text{Map } m_1^*, m_2^*$ ノ間ニ、

A ガ m_1 - meßbar イラベ m_2 - meßbar デアツテ
 $m_1(A) = m_2(A)$,

ナル關係ガアルトキ、 m_1^* 、 m_2^* ノ拡張デアルト考ヘラレル。
吾々ハ m_2^* ガ m_1^* ノ拡張デアルトイフコトヲ常ニカリノ如キ
意味ニ解釋スルモノトスル——。

G ヲ群、 m_N^* ($N=1, 2, \text{etc.}$)ヲ separable +
 Weil ノ Map 、 ρ_N ヲ m_N^* ニ属スル t - Metrik トシ。
簡單ノ $\times \times$

$$m_N(G) = 1$$

ト假定シヨウ。⁴⁹⁾ 然ルトキハ

定理 23. m_2^* ガ m_1^* ノ拡張ナルタメノ必要且ツ充分
ノ條件ハ ρ_1 ガ ρ_2 - stetig ナルコトデアル。⁵⁰⁾

証明。 m_2^* ガ m_1^* ノ拡張ナルトキハ明ラカニ

49) $m_N(G) = +\infty$ ノ場合ニハ少シク複雑ノ現象ケ起ル。

50) スナハチ、 $\rho_2(x, x_0) \rightarrow 0$ ナラベ $\rho_1(x, x_0) \rightarrow 0$ 。

$$h_G^{(m_2)} \supset h_G^{(m_1)}$$

デアル。従って定理 18 = ヨッテ P_1 が P_2 -stetig + ルコトが合ル。

逆 = P_1 が P_2 -stetig デアルト假定シテ見ヨウ。コトキ

$$N_{P_1} = (x; P_1(x, 1) = 0)$$

トオイテ, G/N_{P_1} / P_1 -Komplettierung γ_{P_1} , γ_{P_1} / Borel 集合 L_1 へ現ハスコト = スレバ $\gamma_{N_{P_1}}^{-1}(L_1)$ ハ P_1 -Borel 集合, 従って P_2 -Borel 集合デアッテ, 従って m_2 -meßbar デアル。今 $\mu = \mu(L_1)$ ヲ

$$\mu(L_1) = m_2(\gamma_{N_{P_1}}^{-1}(L_1))$$

= ヨッテ定義スレバ, 容易 = 合ル如ク, μ ハ (L_1) ヲ定義サレタ links-invariant, total additiv + 集合函数デアッテ,

$$\mu(\gamma_{P_1}) = 1;$$

従って μ = ヨッテ定メラレル γ_{P_1} / Map μ^* ハ $\mathbb{R}$ -valued / Map デアル。故ニ, m_1^* ハ μ^* = ヨッテ induzieren サレタ Map デアルカラ,

$$\mu(L_1) = m_1(\gamma_{N_{P_1}}^{-1}(L_1));$$

従って

$$B_1 = \gamma_{N_{P_1}}^{-1}(L_1)$$

トオクコト = スレバ

$$m_1(B_1) = m_2(B_1)$$

ディール。故 = m_2^* と m_1^* の拡張でたければよい。(証明終)

以下吾々の更 = ρ_N の Trennungsaxiom (T) を満足するモノト假定しよう。然ルトキハ、既 = 述べた如く、
 m_N^* は G の ρ_N -Komplettierung $\mathcal{O}_N$ 1 Haar, Maß $\mu_N^* = \exists$ ヲテ

$$m_N^*(A) = \mu_N^*(A)$$

ト現ハサレル。吾々の

$$m_N(G) = 1$$

ト假定シテキル。従ッテ $\mathcal{O}_N$ は kompakt でたければよい。

既 = 述べた如く

$$\mu_{N*}(\mathcal{O}_N - G) = 0$$

ディールカラ、 $G \neq \mathcal{O}_N$ ナラバ G は μ_N -meßbar 51) でたけ。

従ッテ今 meßbar でたけ集合ヲ構成スルシステムハ必ず超限帰納法が必ずアアルコトヲ承認スルナラバ、Haar, Maß でたけ m_N^* ハ超限帰納法ヲ利用シタケレバ構成出来タイコト = ナル。

次 = m_2^* が m_1^* の拡張でアルト假定シテ見ル。然ルトキハ、 ρ_1 は ρ_2 -stetig でアルカラ、 $\xi_2 \in \mathcal{O}_2$ = 對シテ

$$\lim_j x^{(j)} = \xi_2 \quad \text{in } \mathcal{O}_2, \quad x^{(j)} \in G$$

ナル $x^{(j)}$ ヲトレバ、 $x^{(j)}$ 、 $\mathcal{O}_1$ 内デ ξ_2 1 ミ = ヲツテ突マル一定ノ ξ_1 = 収斂スル。

$$\lim_j x^{(j)} = \xi_1 \quad \text{in } \mathcal{O}_1$$

コノ ξ, η

$$\xi_1 = S(\xi_2)$$

ト書リコト = スレバ, S ハ $\mathcal{O}_2$ ヲ $\mathcal{O}_1 = \text{abbilden}$ スル 連続
+ *Abbildung* デアルツテ

$$x \in G \text{ ノトキ } S(x) = x.$$

従ツテ, $\mathcal{K}_2$ ヲ

$$\mathcal{K}_2 = (\xi_2; S(\xi_2) = 1)$$

ト定義スレバ, $\mathcal{K}_2$ ハ $\mathcal{O}_2$, *abg. Normalteiler* デアル
ツテ

$$\mathcal{O}_1 \cong \mathcal{O}_2 / \mathcal{K}_2.$$

コノトキ, 又容易 = 知ル如ク

$$G \cap \mathcal{K}_2 = 1$$

デアル。

故ニ, m_2^* が *Isaar* , *Map* , ストハチ $G = \mathcal{O}_2 + \mathcal{K}_2$
トキハ, $\mathcal{K}_2 = 1$, $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1$, 従ツテ $m_2^* = m_1^*$ デアルレ
バナラナ。 *Isaar* , *Map* ハ如何ナル m_N^* , *eigent-*
lich + 拡張デモアリ得ナ。 従ツテ或ル m_N^* , *eigent-*
lich + 拡張ハ *Isaar* , *Map* ナナ。 *eigentlich* +
拡張ヲ構成スルタメニハ超限帰納法ヲ要スル。

2. 例1. $\mathcal{R}$ ヲ有理数体, Γ ヲ實数体トシ, 実数ヲ
 α, β, ξ, η etc., 平面 $\Gamma \times \Gamma$ ノ点ヲ (ξ, η) デ現ハス
コトトシ, Γ ノ部分集合 (η) が與ヘラレタトキ, (η) デ
erzeugen サレル $\mathcal{R}$ -Modul ヲ $\Sigma \mathcal{R}\eta$ ト書クコト = ス
ル。 $\Sigma \mathcal{R}\eta$ ハストハチ

$$(\gamma_1 \eta_1 + \dots + \gamma_n \eta_n; \gamma_j \in \mathcal{R}, \eta_j \in (\eta))$$

デアルカラ、 (η) が無限集合ナルトキハ、 $\sum \mathcal{R} \cdot \eta$ の濃度ハ (η) の濃度ニ等シイ。

平面 $\Gamma \times \Gamma$ ノ開集合ノ個數ハ連続ノ濃度ヲ越エタイ。
従ツテ連続ノ濃度ヲ有スル最初ノ超限順序數ヲ $\aleph_1$ トスレバ、
 $\Gamma \times \Gamma$ ノ $\text{Map} > 0$ ナスベテノ開集合ヲ、 $N < \aleph_1$ ナル順序數 N
ヲ Index トシテ

$$F_N \quad (1 \leq N < \aleph_1)$$

ト現ハスコトが出来ル。コノトキ、 σ ヲ $\sigma \leq \aleph_1$ ナル任意ノ
順序數トスレバ、 $N < \sigma$ ナルスベテノ N = 對シテ次ノ條件1)
— 4) ヲ満足スル實數 ξ_N, η_N, β_N ヲ對應サセルコトが
出来ル:

$$1) \quad \xi_N = \eta_N \cdot \frac{1}{N}$$

$$2) \quad (\xi_N, \eta_N) \in F_N$$

$$3) \quad \mathcal{R} \cap \sum_{N < \sigma} \mathcal{R} \eta_N = 0$$

$$4) \quad (\mathcal{R} + \sum_{N < \sigma} \mathcal{R} \eta_N) \cap \sum_{N < \sigma} \mathcal{R} \beta_N = 0$$

コレヲ σ = 開スル超限帰納法 = ヲツテ証明スル。コノタメニ、
 $\sigma < \sigma_0$ ナルスベテノ σ = ツイテ既ニ証明サレタモノト假定
シヨウ。 σ_0 ガ孤立數ナルトキハ

$$\tau = \sigma_0 - 1$$

ハオケバ、 $N < \tau$ ナル N = ツイテハ既ニ ξ_N, η_N, β_N ガ構成
レタキル。 $\xi_\tau, \eta_\tau, \beta_\tau$ ヲ構成スルタメニ、 F_τ ノ
charakteristische Funktion ヲ e_{F_τ} トスレバ、假

突 = ヨ ッ テ

$$\int d\xi \int e_{F_c}(\xi, \eta) d\eta > 0$$

デアル。 $M\alpha > 0$ + ル $m\alpha bar$ + 集合ハ連続ノ濃度ヲ有スル。 然ル = $\sigma_0 < \beta_0$ デアルカラ

$$m = \alpha + \sum_{N < c} \alpha \eta_N + \sum_{N < c} \alpha \beta_N$$

トオケバ、 m ノ濃度ハ連続ノ濃度ヨリ小サイ。 従ッテ

$$\xi_c \notin m, \int e_{F_c}(\xi_c, \eta) d\eta > 0$$

+ ル ξ_c が存在スル。 $m + \xi_c \alpha$ ノ濃度 = 亦連続ノ濃度ヨリ小サイ。 従ッテ又

$$\eta_c \notin m + \xi_c \alpha, \quad e_{F_c}(\xi_c, \eta_c) = 1$$

+ ル η_c が存在スル。 β_c ヲ

$$\beta_c = \xi_c - \eta_c$$

ト定義スレバ、カク定メラレタ ξ_c, η_c, β_c 及び $N < c$ = 對スル ξ_N, η_N, β_N が σ_0 = 對シテ條件 1) — 4) ヲ満足スルコトハ明白デアラリ。

σ_0 が極限数 + ル場合 = ハ、既 = スベテノ $N < \sigma_0$ = 對シテ ξ_N, η_N, β_N が條件 1) — 4) ヲ満足スルモノ = 定義サレテキル——。

特 = $\sigma = \beta_0$ トオケバ、スベテノ $N < \beta_0$ = 對シテ 1) — 4) ヲ満足スル ξ_N, η_N, β_N が存在スルコトガナル。 ヲコデ

$$Y = \sum_{N < \beta_0} \alpha \eta_N$$

トオキ。又

$$B \supset \sum_{N \in \mathcal{B}} \mathcal{R} \beta_N$$

トル $\mathcal{R}$ -Modul B 7 適當ニ定メレバ, Γ ハ三ツノ Modul $\mathcal{R}, Y, B$ 1 direkte Summe トシテ 現ハサレル:

$$\Gamma = \mathcal{R} + Y + B.$$

從ツテ $\xi \in \Gamma$ ハ eindeutig -

$$\xi = \gamma_\xi + \eta_\xi + \beta_\xi, \quad \gamma_\xi \in \mathcal{R}, \eta_\xi \in Y, \beta_\xi \in B.$$

ト 現ハサレ, ξ = 對シテ

$$\xi^* = (\xi, \eta_\xi)$$

ト オケバ, ξ^* 1 全体ハ Γ = isomorph + $\Gamma \times \Gamma$ 1 部分群 Γ^* 7 作ル。

特ニ $\xi = \xi_N$ ト オケバ

$$\xi_N^* = (\xi_N, \eta_N)$$

デアルカラ, Γ^* ハ スベテ 1 Map > 0 + $\Gamma \times \Gamma$ 1 閉集合 F_N ト 共通点ヲ 有スル。故ニ $\Gamma \times \Gamma - \Gamma^*$ 1 inneres Map ハ 0 デナケレバナラナイ。從ツテ $\Gamma \times \Gamma$ 1 Lebesgue 1 Map = ヲツテ Γ^* 1 separabel + Weil 1 Map m^* ガ induzieren サレル。明ラカニ $\Gamma^* \neq \Gamma \times \Gamma$ デアルカラ, m^* ハ Idaar 1 Map デナイ。

例2. $\mathcal{O}_f$ 7 有理整数全体 1 作ル加法群トスレバ,

$$T = \Gamma / \mathcal{O}_f$$

ハ スナハチ 1 Torsion 群 デアル。 T 1 Idaar 1 Map μ 1 invariant + Metrik 7 有トリ, 又簡單, $\mathbb{Z} \times T$

1 元 Γ ト同シ文字 ξ, η , etc. 出現ハスコトニシヨウ. 明
ラカニ

$$T = \Gamma / \mathcal{O}_\Gamma = \mathcal{R} / \mathcal{O}_\Gamma + Y + B$$

デアルカラ, $\xi \in \Gamma =$ 對シテ γ / Y -Komponent η_ξ
ト書クコトニスレバ

$$\xi^* = (\xi, \eta_\xi)$$

1 全体ハ $T = \text{isomorph} + T \times T$ / 部分群 T ヲ作り,

$$\mu \mu_* (T \times T - T^*) = 0$$

デアル. 從ツテ $\mu \mu^* = \exists \text{ ヲテ } T \cong T^*$, separabel +
Weil, Maß m_2^* ヲ induzieren + レル. $m_2^* =$ 属ス
ル t -Metrik ρ_2 ハ

$$\rho_2(\xi^*, \xi_0^*) = \sqrt{\rho(\xi, \xi_0)^2 + \rho(\eta_\xi, \eta_{\xi_0})^2}$$

テ與ヘラレル. 明ラカニ ρ ハ ρ_2 -stetig デアル. 故ニ

$$\mu(T) = m_2(T) = 1$$

デアルカラ, 定理 23 = ヲツテ, m_2^* ハ μ^* / 擴張, 而ニ
eigentlich + レ擴張デアル.

—— (終) ——