



Title	双曲線型偏微分方程式ノ存在定理ニ付イテ
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 176, p. 160-166
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74705
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

775. 双曲線型偏微分方程式ノ存在定理 = 付イテ

南 雲 道 夫 (阪大)

□ 1 双曲線型偏微分方程式

-160-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

= 於て, $x=a$ 時 $u=h(y)$, $y=b$ 時 $u=g(x)$
 $[h(b)=g(a)=0]$ + ル積分ノ存在ヲ問題トスル。

$F(x, y, u, p, q)$ が $(x, y, u, p, q) = \text{ツイテ}$ 連続ト假定シタノガハカナル積分ノ存在ハ証明出来ナイ。

$(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ が連続ナルモ、ヲ求メル時=)

何トナレバ、例ヘバ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \Phi(q) = \begin{cases} 2\sqrt{q} & q > 0, \text{トキ} \\ -2\sqrt{-q} & q \leq 0, \text{トキ} \end{cases}$$

トスレバ $\Phi(q)$ ハ連続ナルガ $h(y) = \frac{\varepsilon}{2} y^2$, $g(x) = 0$
 $a=0$, $b=0$ トスレバ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} (x - \sqrt{\varepsilon y})^2 & y > 0, \text{トキ} \\ -(x - \sqrt{-\varepsilon y})^2 & y \leq 0, \text{トキ} \end{cases}$$

從ツテ

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=+0} = x^2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=-0} = -x^2$$

之レハ $y=0$ 不連続ナル。

[2] 次 $F(x, y, u, p, q)$ が $(x, y, u, p, q) = \text{ツイテ}$ 連続ナル上ニ $p, q = \text{ツイテ Lipschitz}$ ノ條件

$$(i) \quad |F(x, y, u, p_1, q_1) - F(x, y, u, p_2, q_2)| \\ \leq L \{ |p_1 - p_2| + |q_1 - q_2| \}$$

が成立スルトキニ、積分ノ存在ヲ函数空間デノ不動点ノ存在

定理 = ヲ 証明シヨ ヲ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = p(x, y) \text{ ト オ ケ バ}$$

$$u = g(x) + h(y) + \int_a^x \int_b^y p(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g'(x) + \int_b^y p(x, \eta) d\eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = h'(y) + \int_a^x p(\xi, y) d\xi$$

従ッテ問題ハ $p(x, y) =$

$$F(x, y, g(x) + h(y) + \int_a^x \int_b^y p(\xi, \eta) d\xi d\eta, g'(x) + \int_b^y p(x, \eta) d\eta, \\ h'(y) + \int_a^x p(\xi, y) d\xi)$$

ナル $p(x, y)$ ノ 存在デアアル。

所デ $\int_a^x \int_b^y p(\xi, \eta) d\xi d\eta$ ハ *vollstetig* ナ 運算デアアル

ガ $\int_a^x p(\xi, y) d\xi \times \int_b^y p(x, \eta) d\eta$ ハ $[(x, y)]$ ノ 函数 =

對シテハ $] \text{ vollstetig } \text{デハナイ。}$ ^(註) 故ニ 函数空間内ノ 不動点

存在定理ヲ 應用スルタメニハ, $p(x, y)$ = 一樣有界性ノ 他ニ

ナ 亦適當ナル 制限 (緊集合ヲ 作ル様ナ) ヲ 附ケネバナラナイ。

ソコデ又, 様ニ 考ヘル。

$$F(x, y, u, p, q) \text{ ハ } |x-a| \leq l, |y-b| \leq l,$$

(註) 例ヘバ 特ニ $p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$ ナル形ニ シテ 考ヘテ 見レバヨイ。

$|u| \leq m, |p| \leq m', |q| \leq m'$ とル範囲ヲ連続, 且ツ
 $|F(\cdot)| \leq M$ トスル. 今コノ範囲内 $= (x, y, u, p, q)$ 及
 $\in (x', y', u', p, q)$ ヲトリ

$$(2) \quad \max_{\substack{|x'-x| \leq \delta \\ |y'-y| \leq \delta \\ |u'-u| \leq 2M\delta}} \{ |f(x', y', u', p, q) - f(x, y, u, p, q)|, M\delta \} = \varphi(\delta)$$

トオク. ヲコニ $\mathcal{R}$ ヲ $|x-a| \leq l, |y-b| \leq l$ 及
 $|p(x, y)| \leq M$ 且ツ

$$\max_{\substack{|x'-x| \leq \delta \\ |y'-y| \leq \delta}} |p(x', y') - p(x, y)| \leq l \varphi(\delta) \quad (l \text{ 一定})$$

ナルモノヲ連続ノ函数ノ全体トスル. $\mathcal{R}$ ハ凸且ツ緊集合ヲ
 作ル.

又 $x=a$, 及 $y=b$ = 於ケル初期條件ヲ $u(a, y)=0$,
 $u(x, b)=0$ ト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ [$u = g(x)$
 + $h(y)$ + v トオキ v ノ方程式ヲ考ヘレバヨイ]. 故テ

$$\tilde{p}(x, y) = F\left(x, y, \int_a^x \int_b^y p(\xi, \eta) d\xi d\eta, \int_b^y p(x, \eta) d\eta, \int_a^x p(\xi, y) d\xi\right)$$

ナル変換 [$p(x, y) \rightarrow \tilde{p}(x, y)$] ヲ考ヘル. 之レハ

$l^2 M \leq m, l M \leq m'$ とル限り端 = 可能アリ,

$|\tilde{p}(x, y)| \leq M$ トナル. 又 $\tilde{p}(x, y)$ ノ連続ノ度合ヲシ

ラベルト, (1) [p, q = 同スル Lipschitz 條件] 及 (2)

カラ

$$\begin{aligned} \text{Max } |\tilde{f}(x', y') - \tilde{f}(x, y)| &\leq [1 + 2L(lk + 1)] \varphi(\delta) \\ |x' - x| &\leq \delta \\ |y' - y| &\leq \delta \end{aligned}$$

故 = $l < \frac{1}{2L}$ 1 場合 = l が充分大 ($l \geq \frac{2L+1}{1-2Ll}$) = トレバ

$$|\tilde{f}(x', y') - \tilde{f}(x, y)| \leq l \varphi(\delta)$$

トナリ, $\tilde{f}(x, y) \in \mathcal{R}$ を得ル。従って Schauder の不動点ノ存在定理カラ

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$$

ナル $f(x, y)$ が存在スル。故 = 求ムル積解が存在スル。

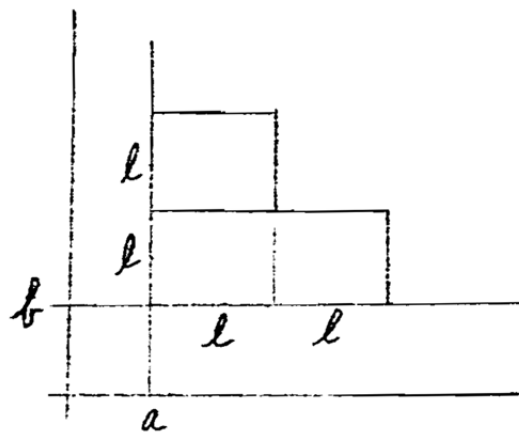
尚上 = $l < \frac{1}{2L}$ ナレ制限ヲ附シタガ之レハ次ノヤウニシテ除カレル。(コノ制限ハ $\varphi(\delta)$ ノ大サトハ無関係ヲ只 L ノミニヨリテ決定サレルモノ

ナル)。先ツ上ニヨリ

$f(x, y)$ 従ツテ u ハ

$a \leq x \leq a+l, b \leq y \leq b+l$ ナ連続ニ定義サレ

ル。



次 = $a+l \leq x \leq a+2l, y=b$ 於ケル u ノ値及ビ $x=a+l, b \leq y, b+l$ 於ケル u ノ値カラ $a+l \leq x \leq a+2l, b \leq y \leq b+l$ ナ範囲デ $f(x, y), u(x, y)$ が求マル。同様ニシテ $a \leq x \leq a+l, b+l \leq y \leq b+2l$ ナル範囲デ u が求マル。第三ニハ $a+l \leq x \leq a+2l,$

$b+l \leq y \leq b+2l$ なる範囲 u が求メラレド。以下同様
 の法ヲ繰返セバヨイ。

[3] F が p, q = ツ $Lipschitz$ 条件ヲ満足スルトキ
 = ハ領域分割法ニヨリ (細分ノ極限ヲトル方法デ) 積分
 存在ガ証明サレルコトガ 福原氏 著 偏微分方程式論 (223頁)
 [岩波講座] = 示サレテアル。ソコデハ 必ず シ $Lipschitz$
 1 条件 = 限テ ス トアルケレド 茲ニ述ベタ方法デ $Lipschitz$
 1 条件ヲ繰メルニハ如何ニシタラヨイデセウカ。

尚、小生偏微分方程式ニツイテハ未ダ殆ソド何モ勉強
 シテナイノデ古クカラ知テレテキルコトヲモ知ラズニ居ル
 事ガ極メテ多イノデス。ニノコトニ関シ文献等デモ御氣附ノ
 御方ニハ御手数ナガラ何卒御一報ノ程ヲ御願ヒ致シマス。

追 記

F が p, q = ツ $Lipschitz$ 1 条件ガ成立セヌ時デ
 モ、之ガ連続デ

$$|F(x, y, u, p', q) - F(x, y, u, p, q)| \leq \phi(x, y, |p' - p|),$$

$$|F(x, y, u, p, q') - F(x, y, u, p, q)| \leq \psi(x, y, |q' - q|),$$

$$\text{且ツ } \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \phi(x, y, \lambda), \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \psi(x, y, \mu) \text{ ナル方程式}$$

(實質的ニハ常微分方程式) = ツキ初期条件 $\lambda(x, b) = 0$,
 $\mu(a, y) = 0$ ナル解ガ只一ツナルトキニハ存在定理ガ証明
 出來ル様デス。

但シコノ場合ニハ $p(x, y)$, $q(x, y)$ 及ビ $u(x, y)$

ヲ独立トシテ取扱ヒ、夫々別々ニ適宜ト連続性ノ程度
ノ條件ヲ付ケテ

$$\tilde{u} = \int_a^x \int_b^y F(\xi, \eta, u, p, q) d\xi d\eta$$

$$\tilde{p} = \int_b^y F(x, \eta, u, p, q) d\eta$$

$$\tilde{q} = \int_a^x F(\xi, y, u, p, q) d\xi$$

ナル変換ノ不動点 $(\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q}) = (u, p, q)$ ノ存在ヲ証明
スルノデス。

尚、 $F(x, y, u, p, q)$ が連続ナルトキニハ（或ハモッ
ト緩クテモヨイデセウ） u, p, q ニツイテ連続、全部ノ変数
ノ函数トシテハ有界可測位ヲモ） $p, q, \frac{\partial u}{\partial x \partial y}$ が可測ナル
積分が存在スルノデハタイデセウカ。御教示ヲ得タク存シ
マス。