



Title	F.Riesz ノ Mean ergodic theorem
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 176, p. 166-170
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74706
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

776. F. Riesz / Mean ergodic theorem

吉田 耕作 (阪大)

近着, J. London Math. Soc. 13 (1938), p. 274
— 278 = F. Riesz / Some mean ergodic theorem
ト題スル論文が出テヲ リマス。其ノ定理 1, 2ハ $L^p(0, 1)$

(但し $p > 1$) デ、mean ergodic theorem デアリ、筆者 談話 720, 角谷氏談話 731' = 得テレタ Banach 空間 = 於ケル mean ergodic theorem , オカ一般デアリマス。Riesz / 定理 3. $L(0,1)$ = 於ケル mean ergodic theorem デハ、形 = 述べテレテアリマス。

定理 T $Banach$ 空間 $L(0,1)$ デ、線型作用素デ

$$(1) \quad \|T^n\| \leq \text{常數} \quad (n=1, 2, \dots)$$

ヲ満足スルモノトスル。コノトキ任意ノ $f \in L(0,1)$ = 對シ

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n T^m \cdot f \quad (n=1, 2, \dots)$$

ガ equi-integrable⁽¹⁾ + ラ、 $f^* \in L(0,1)$ ガ存在シテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f^*| dx = 0.$$

証明 mean ergodic theorem (談話 720) = ヨレバ $\{f_n\}$ カラ weakly convergent + 部分列 $\{f_{n'}\}$ ガ探ベレバヨイ。⁽²⁾ (1) = ヨリ $\int_0^1 |f_n| dx < \text{常數} \quad (n=1, 2, \dots)$

(1) 任意ノ $\delta > 0$ = 對シテ $\varepsilon > 0$ ガ存在シ $\text{mes}(E) < \varepsilon$ + ラバ

$$\int_E |f_n| dx < \delta \quad (n=1, 2, \dots). \quad \text{コノ条件ハ例へバ } (0,1)$$

ヲ $(0,1)$ = 測度ヲ変ヘナイヤウニ交換スル交換 π = 對シ

$Tf = g, g(x) = f(\pi \cdot x)$ デ定義サレル T = 對シテハ満

足サレル。

(2) $L(0,1)$ ハ weakly complete (H. Steinhaus, 定理)

だから H. Lebesgue の定理⁽³⁾ = ヨリ $\{f_n\}$ が weakly convergent + 部分列ヲ含ムタメノ必要條件ハ $\{f_n\}$ が equi-integrable + コトアアルカラ証明スデアル。

Banach, 本 = ハ Lebesgue の定理, 証明ガ書イテ + イカラ, 念ノタメ = Riesz = 従ッテ証明ノ方針ヲ書イテマカウ。

方針 $F_n(x) = \int_0^x f_n dx$ ト置クト, equi-integrable + コトカラ $\{F_n(x)\}$ ハ equi-continuous. 故 = $(0, 1)$ ノ各点ヲ収斂スルマウナ部分列 $\{F_{n'}(x)\}$ ガ撰ベル:

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} F_{n'}(x) = F^*(x).$$

equi-integrability カラ $F^*(x)$ ハ absolutely continuous: $F^*(x) = \int_0^x f^* dx$, $f^* \in L(0, 1)$. 即チ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n dx = \int_0^x f^* dx$ ($0 \leq x \leq 1$)

故 = equi-integrability カラ $(0, 1)$ テ有界可測ノ函数 $m(x)$ = 對シ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n m dx = \int_0^1 f^* m dx$$

ガ云ヘル。

—— 以上 ——

(注意1) equi-integrable ナル概念ハ 南雲氏 ガ

⁽³⁾ S. Banach: Théorie des opérations linéaires, p. 8.

Lebesgue トハ 社立 = 考ヘテ 積分法, 微分方程式等ニ 應用

(1)

サレタコトガアル。

(注意2) Markov 過程 = 出テケル核

$$p(x, y) \geq 0, \quad \int_0^1 p(x, y) dy \equiv 1$$

ヲ 考ヘテミル。 $L(0, 1)$ テ, 線型作用素 P :

$$P \cdot f = g, \quad g(y) = \int_0^1 f(x) p(x, y) dx$$

ガ weakly completely continuous⁽²⁾ + タ + 1 必充
條件ハ上, Lebesgue ノ 定理 = ヲリ

$$(2) \begin{cases} \text{任意, } \delta > 0 = \text{對シ } \varepsilon > 0 \text{ が存在シ } \text{mes}(E) < \varepsilon + \\ \text{ラ } x = \text{閉シテ一様} = \int_E p(x, y) dy < \delta. \end{cases}$$

ナレコトガワカル。之ハ所謂 J. L. Doeblin ノ 條件⁽³⁾ デアル。

所ガ (2) が満足サレテアレバ

$$(3) \begin{cases} \text{正整数 } m \text{ ト 完全連続ト線型積分作用素 } Q \text{ が存在} \\ \text{シテ } \|P^m - Q\| < 1 \end{cases}$$

ガ成立ツ。⁽⁴⁾ 即チ外見上弱サウナ條件 weak comp. continuityヲ假定スルト殆ント完全連続ト同シコト = ナツテ了ヲ
コトハ面白いト思ヒマス。斯ル Markov 過程ノ性質ハ相當
詳細ニワカッテアル (Doeblin ノ 研究⁽⁴⁾)。又上ニ述ベタ

(1) 日本数学会報 (1929)。

(2) $L(0, 1)$ ノ 単位球ヲ weakly compact + set = 寫ススコ。

(3) 筆者談話 724。

(4) " " 746。

(5) Ann. of Math. 1937. (次頁ノ)

$\mu = P, f = g, g(x) = f(\tilde{T}x)$ ($\tilde{T}$ ハ測度ヲ変ヘナイ変換)ノ場合ハ *Ergodentheorie*ノ一般論 (*Kryloff-Bogolionboff*⁽⁵⁾)デ良ク調べラレヲル。此ノ最後ノ場合ニハ P ハ勿論完全連続性ト甚ダシク距ツテアリマス。即チ今迄知ラレテヲル $L(0, 1)$ デノ *Markoff* 過程ハ殆ド完全連続ナモノト完全ニ完全連続ナラザルモノトノ両極端デ此ノ中間ニ位スルモノガナイ訳デアリマス。而モ前者ハ *indeterministic* 後者ハ *deterministic* (流れ)デアルノデスガ中間的ナモノハナイモノデセウカ。

Rieszノ約束 論文ノ最後ニ、此次ノ *paper* = $L(0, 1)$ ヲ抽象化シテソコデノ *ergodic theorem*ヲ出スト述ベテアリマス。期待シテヲル次第デス。