



Title	可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スルMarkoff過程ニ就 イテ, II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 176, p. 173-181
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74708
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

778. 可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スル
 Markoff 過程ニ就イテ II

角 谷 静 夫 (阪大)

* = power series $\sum_{n=1}^{\infty} k_n Z^n, \sum_{n=1}^{\infty} p_n Z^n$ ヲ考ヘル.

コレヲハ何レモ $|Z| < 1$ ニテ正則ナ函数ヲ表ハシ, シカモ
 $\{k_n\}, \{p_n\}$ ノ定義ヨリ $|Z| < 1$ ニ於テ

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n Z^n = \frac{1}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} k_n Z^n}$$

ヲ満足スル。ヨツテ若シ $\sum_{n=1}^{\infty} k_n = k' < 1$ ナアレバ右辺ハ

$Z \rightarrow 1$ (real axis = 沿ツテ) ナルトキ $\rightarrow \frac{1}{1-k'}$ ナアル

カニ $p_n \geq 0, n=1, 2, \dots$ ナルコトヨリ

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{1-k'} < \infty$$

ヲ得ル。ヨツテコノ時ハ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ハ絶対収斂シ、シタガツテ
勿論 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ デアル。又 $k = \sum_{n=1}^{\infty} k_n = 1$ ナルトキハ
 $\sum_{n=1}^{\infty} n k_n = M$ ヲ考ヘル。 $M < \infty$ カ又ハ $M = \infty$ デアル。

何レニシテモ

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} k_n (1+z+\dots+z^{n-1})} = \frac{1}{M}$$

トナルコトハ容易ニヤカルカラ

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \right) = \frac{1}{M}$$

ヲ得ル。但シ $M = \infty$ ナルトキハ $\frac{1}{M} = 0$ トオクモノトスル。
然ルニ $\{p_n\}$ ハ有界 ($0 \leq p_n \leq 1$) デアルカラ、コレヨ
リ直チニ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n) = \frac{1}{M}$$

ヲ得ル。(1) 此ノ如クシテ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n)$ ノ存在
ガ証明出来ヌ。又 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{M}$ トナルコトヲ $\frac{1}{M} = P > 0$

(1) 例ヘバ Wiener: *Fourier Integral*. chap. III.
104—106 頁

コレヨリ Tauberian theorem = ヲツテ $p_n \rightarrow \frac{1}{M}$

トナルコトガ証明出来レバヨイノデアルガ、コレハ旨ヲ
行カナイ様デアル。

ナル場合、即ち $\sum_{n=1}^{\infty} n k_n = M < \infty$ ナル場合 =、 $k_n > 0$ ト

ナル如キ n ノ最大公約数が 1 デアルトイフ條件ノ下ヲ証明スル。証明ヲ二段ニ分ツ。

第一段 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \alpha > 0$ ナルコトヲ Khintchine
ノ additive number theory ノ結果ヲ使ハバニ証明スルコト。

証明: p_{m+e} 次ノ如ク表ハスコトガ出來ル。

$$\begin{aligned}
 (4) \quad p_{m+e} &= p_m (k_1 p_{e-1} + k_2 p_{e-2} \\
 &\quad + \dots + k_{e-2} p_2 + k_{e-1} p_1 + k_e) \\
 &+ p_{m-1} (k_2 p_{e-1} + k_3 p_{e-2} \\
 &\quad + \dots + k_{e-1} p_2 + k_e p_1 + k_{e+1}) \\
 &+ p_{m-2} (k_3 p_{e-1} + k_4 p_{e-2} \\
 &\quad + \dots + k_e p_2 + k_{e+1} p_1 + k_{e+2}) \\
 &+ \dots \\
 &+ p_1 (k_m p_{e-1} + k_{m+1} p_{e-2} \\
 &\quad + \dots + k_{m+e-3} p_2 + k_{m+e-2} p_1 + k_{m+e-1}) \\
 &+ (k_{m+1} p_{e-1} + k_{m+2} p_{e-2} \\
 &\quad + \dots + k_{m+e-2} p_2 + k_{m+e-1} p_1 + k_{m+e})
 \end{aligned}$$

コレハ recurrence formula (3) ヲ繰返ヘシテ用ヒ
ルコトニヨリテモ得ラレルガ probability ノ考ヘニモ
レハ直接得ラレル。即ち p_n ハ n 回目ニ元ヘ戻ル proba-
bility, k_n ハ n 回目ニ ハジメテ 元ヘ戻ル probability
ト考ヘレバヨイデアル。更ニ

$$(5) \quad k_{e,j} = k_{j+1} p_{e-1} + k_{j+2} p_{e-2} + \dots + k_{j+e-1} p_1 + k_{j+e} \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \dots$$

トオケバ $k_{e,0} = p_e = \tau k_{e,j} (j > 0)$ ハ $l, l+1, \dots$
 $\dots, l+j-1$ 回目 = 元へ戻ラズ = $l+j$ 回目 = 元へ戻
 ン probability デアル。コノ $k_{e,j}$ ノ使ヘバ

$$(4^*) \quad p_{m+e} = p_m \cdot k_{e,0} + p_{m-1} \cdot k_{e,1} + \dots + p_1 \cdot k_{e,m-1} + k_{e,m}$$

トナリ、且ツ又、 $k_{e,j}$ ノ定義ヨリ明カニ

$$k_{e,0} + k_{e,1} + \dots + k_{e,m} + \dots \leq 1$$

又ハ

$$(6) \quad p_e + k_{e,1} + k_{e,2} + \dots + k_{e,m} + \dots \leq 1$$

次ニ (6) ガ $e = \infty$ ニテ一様ニ收斂スルコトト、(6) = 於テ
 實際ニ等号ガ成立スルコトヲ示サシ。 (6) ガ $e = \infty$ ニテ一様
 ニ收斂スルコトハ $k_{e,j}$ ノ定義 (5) 及ビ $\sum_{n=1}^{\infty} n k_n < \infty$ ト
 ナルコトヨリ明カデアロウ。實際 $e = \infty$ ニテ

$$\sum_{m=M}^{\infty} k_{e,m} = \sum_{m=M}^{\infty} (k_{m+1} p_{e-1} + k_{m+2} p_{e-2} + \dots + k_{m+e-1} p_1 + k_{m+e})$$

$$\leq \sum_{m=M}^{\infty} (k_{m+1} + k_{m+2} + \dots + k_{m+e-1} + k_{m+e})$$

$$\leq k_{M+1} + 2 k_{M+2} + 3 k_{M+3} + \dots$$

$$\leq \sum_{m=M+1}^{\infty} m k_m$$

ヨリテ M ノ十分大トツトレバ右辺、シタガツテ左辺ハ $e =$

無関係 = イク ラ デモ 小 + ク + ル。 次 = (6) = 於テ等号が成立

スル トハ

$$\begin{aligned}
 & p_e + k_{e,1} + k_{e,2} + \dots + k_{e,m} \\
 &= (k_1 p_{e-1} + k_2 p_{e-2} + \dots + k_{e-1} p_1 + k_e) \\
 &+ (k_2 p_{e-1} + k_3 p_{e-2} + \dots + k_e p_1 + k_{e+1}) \\
 &+ \dots \\
 &+ (k_m p_{e-1} + k_{m+1} p_{e-2} + \dots + k_{m+e-2} p_1 + k_{m+e-1}) \\
 &+ (k_{m+1} p_{e-1} + k_{m+2} p_{e-2} + \dots + k_{m+e-1} p_1 + k_{m+e}) \\
 &= p_{e-1} (k_1 + k_2 + \dots + k_{m+1}) + p_{e-2} (k_2 + k_3 + \dots + k_{m+2}) + \dots \\
 &+ p_1 (k_{e-1} + k_e + \dots + k_{m+e-1}) + (k_e + k_{e+1} + \dots + k_{m+e}) \\
 &= p_{e-1} + p_{e-2} (1 - k_1) + \dots + p_1 (1 - k_1 - k_2 - \dots - k_{e-2}) \\
 &+ (1 - k_1 - k_2 - \dots - k_{e-1}) \\
 &+ O(k_{m+2} + 2k_{m+3} + 3k_{m+4} + \dots)
 \end{aligned}$$

然ルニ

$$\begin{aligned}
 & p_{e-1} + p_{e-2} (1 - k_1) + \dots + p_1 (1 - k_1 - k_2 - \dots - k_{e-2}) \\
 &+ (1 - k_1 - k_2 - \dots - k_{e-1}) \\
 &= \{ p_{e-1} - (p_{e-2} k_1 + p_{e-3} k_2 + \dots + p_1 k_{e-2} + k_{e-1}) \} \\
 &+ \{ p_{e-2} - (p_{e-3} k_1 + p_{e-4} k_2 + \dots + p_1 k_{e-3} + k_{e-2}) \} \\
 &+ \dots \\
 &+ \{ p_2 - (p_1 k_1 + k_2) \} + \{ p_1 - k_1 \} + 1 = 1
 \end{aligned}$$

デアルカラ、結局

$$p_e + k_{e,1} + k_{e,2} + \dots + k_{e,m} = 1 + O\left(\sum_{n=M+1}^{\infty} n k_n\right)$$

ヨツテ

$$(7) \quad p_e + k_{e,1} + k_{e,2} + \dots + k_{e,m} + \dots = 1$$

ヲ得ル。コレヨリ (4*) ヲ使ヘバ $m \geq M =$ 對シテ

$$\begin{aligned} p_{m+e} &\geq p_m \cdot k_{e,0} + p_{m-1} \cdot k_{e,1} + \dots + p_{m-M} \cdot k_{e,M}, \\ &\geq \{ \min(p_m, p_{m-1}, \dots, p_{m-M}) \} (k_{e,0} + k_{e,1} \\ &\quad + \dots + k_{e,M}) \end{aligned}$$

ヨツテ先ヅ M ヲ十分大キクトツテ $k_{e,0} + k_{e,1} + \dots + k_{e,M} \geq \frac{1}{2}$ が任意, $e =$ 對シテ成立スルヤウニトリ、然ル後 m ヲ十分大キクトツテ $m-M > N$ とル如クトレバ (但シ N ハ $n > N$ とルトキ $=$ 常 $= p_n > 0$ とルヤウナ N とスル。コノ様ナ N が存在スルコトハ、 $k_n > 0$ とル如キ n ノ最大公約數が1とルコトヨリ容易ニヤカル)。

$$\min(p_m, p_{m-1}, \dots, p_{m-M}) = \alpha_0 > 0$$

トナルカラ結局 $m \geq M + N$ とル任意, $m =$ 對シテ

$$p_m \geq \frac{1}{2} \alpha_0 > 0 \text{ が成立スル。即チ } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \alpha \geq \frac{1}{2} \alpha_0 > 0$$

デアアル。

第二段 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \alpha > 0$ とルトキ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ が存在スルコトノ証明。

コレハ吉田氏が 173 号ニ於テ証明サレタノト全く同ジヤウニスレバ出来ル。シカシ吉田氏ノ証明ニ少し不十分ナ点ガフツタノデ、コノデソレヲオギナツテ証明スル。(吉田氏ノ証明ニ於テハ $p_e + \sum_{j=1}^{\infty} k_{e,j}$ が 閉ニテ一様ニ收斂スルト云フコトヲ注意シテオケツタノデアアル)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \beta$$

トオキ $\beta > \alpha$ トシテ矛盾ヲ出セバヨイ。先ツ (4*) = ヨリ

$$p_{m+l} = p_m p_l + p_{m-1} \cdot k_{l,1} + p_{m-2} \cdot k_{l,2} \\ + \dots + p_1 \cdot k_{l,m+1} + k_{l,m}$$

ヨツテ ε が任意ニ與ヘテレダトキ先ツ M ヲ十分大キクトッ
テ $l = \text{無関係} =$

$$k_{l,M+1} + k_{l,M+2} + \dots \leq \varepsilon$$

トナル様ニスレバ $m \geq M = \text{對シテ}$

$$p_{m+l} \leq p_m \cdot p_l + p_{m-1} \cdot k_{l,1} + p_{m-2} \cdot k_{l,2} + \dots \\ \dots + p_{m-M} \cdot k_{l,M} + \varepsilon$$

$\times = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \beta$ トルコトヨリ, 任意, $\varepsilon > 0 = \text{對シテ}$

N が定マツテ $n \geq N$ トキ $p_n < \beta + \varepsilon$ トナル。

更ニ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \alpha$ トルコトヨリ, m ヲ十分大キクトッテ

$p_n < \alpha + \varepsilon$, $m - M \geq N$ トナルヤウニスルコトが出来ル。

ヨツテ此ノ如キ $m = \text{對シテ}$

$$p_{m+l} \leq (\alpha + \varepsilon) p_l + (\beta + \varepsilon) k_{l,1} + (\beta + \varepsilon) k_{l,2} + \dots \\ \dots + (\beta + \varepsilon) k_{l,M} + \varepsilon$$

$$= (\alpha + \varepsilon) p_l + (\beta + \varepsilon)(k_{l,1} + \dots + k_{l,M}) + \varepsilon$$

$$\leq (\alpha + \varepsilon) p_l + (\beta + \varepsilon)(1 - p_l) + \varepsilon$$

$$p_{m+l} \leq -(\beta - \alpha) p_l + \beta + 2\varepsilon$$

コレハ m ヲ上記ノ如ク定ムルト任意, $l = \text{對シテ}$ 成立スル式

ナラ、ヨツテ l ヲ十分大キクトッテ $p_{m+l} > \beta - \varepsilon$,

$p_l > \alpha - \varepsilon$ ナル如クトレバ (コレハ可能!)

$$\beta - \varepsilon \leq -(\beta - \alpha)(\alpha - \varepsilon) + \beta + 2\varepsilon$$

トナル。 $\varepsilon > 0$ 、任意ヲツタカラ $0 < \alpha < \beta$ トスレバコレ

ハ矛盾ナアル。ヨツテ $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ ナレバナラ
 +イ。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (p_1 + \dots + p_n) = \frac{1}{M}$ ナツタカラ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{M}$ ナ
 レバナラ又コトハ明カデアル。

(注意) 前号ヲ掲ゲテ於イタ大キナ Matrix ノ形ヲ見ル
 ト、 $\sum_{n=1}^{\infty} k_{n,1}^{(n)} = 1$ ナル場合、Matrix K 、 (l) ノ空間、
 norm カ、 l 、bounded linear transformation
 ヲ與ヘ、且ツ任意ノ $x \in (l)$ = 対シテ $\{K^{(n)}(x)\}$ ($n=1,$
 $2, \dots$) カ (l) 内ニテ compact + 集合ヲ作ツテキル
 コトガワカル。ヨツテ $\frac{1}{n} \{K(x) + K^{(2)}(x) + \dots + K^{(n)}(x)\}$
 ($n=1, 2, \dots$) ニ、 x ヲ一ツ定メレバ compact デアル。
 故ニ一般ニ Banach 空間ニ於ケル linear trans-
 formation ノ iteration、議論⁽¹⁾ヨリ $\{\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n K^{(m)}\}$
 ($n=1, 2, \dots$) ハ linear operator ノ sequence
 トシテ strongly 収斂スル。ヨツテ勿論 $\frac{1}{n} (p_{11}^{(1)} +$
 $p_{11}^{(2)} + \dots + p_{11}^{(n)}) \rightarrow P_{11}$ ガ存在スル。

實際吉田氏ニヨツテ注意サレタ如ク各々、ergodic
 part = 於テハ mean ergodic Theorem カ成立シ
 テキルノヲアル。コレハ (l_1) = 於ケル positive element
 $X_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$ ガ positive element
 $X = (x_1, x_2, \dots)$ = 各座標ガ収斂シ ($x_i^{(n)} \rightarrow x_i$ 、

(1) 吉田氏: 紙上談話會 164 号 120, 角谷. 紙上談話會 162
 号 711 (680)

$i=1, 2, \dots$ 且ツ $\|X_n\| \rightarrow \|X\|$.

(即チ $\sum_{i=1}^{\infty} |X_i^{(n)}| \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |X_i|$) + ラバ $X_n \rightarrow X$ *strongly*

トナルコトヨリ容易ニ可カルノデアル。