OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スルMarkoff過程ニ就イテ, II
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 176, p. 173-181
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74708
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

778. 可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スル Markoff 過程ニ就イテ II

角谷 静夫（阪大）

次ニ power series $\sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ ヲ考ヘル.

コレラハ何レモ $|z|<1$ ニテ正則ナ函数ヲ表ハシ，シカモ $\{k_n\}$, $\{p_n\}$ ノ定義ヨリ $|z|<1$ ニ於テ

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \frac{1}{1-\sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n}$$

ヲ満足スル。ヨッテ若シ $\sum_{n=1}^{\infty} k_n = k' < 1$ デアレバ右辺ハ $z \to 1$（real axis ニ沿ッテ）ナルトキ $\longrightarrow \frac{1}{1-k'}$ デアルカラ $p_n \geqq 0$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナルコトヨリ

$$\lim_{z\to 1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{1}{1-k'}<\infty$$

ヲ得ル。ヨッテコノ時ハ $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ ハ絶対収斂シ、シタガッテ勿論 $\lim_{n\to\infty}p_n=0$ デアル。次ニ $\sum_{n=1}^{\infty}k_n=1$ ナルトキハ $\sum_{n=1}^{\infty}n k_n=M$ ヲ考ヘル。$M<\infty$ カ又ハ $M=\infty$ デアル。

何レニシテモ

$$\lim_{z\to 1}\frac{1-z}{1-\sum_{n=1}^{\infty}k_n z^n}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}k_n(1+z+\cdots\cdots+z^{n-1})}=\frac{1}{M}$$

トナルコトハ容易ニワカルカラ

$$\lim_{z\to 1}(1-z)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n\right)=\frac{1}{M}$$

ヲ得ル。但シ $M=\infty$ ナルトキハ $\frac{1}{M}=0$ トオクモノトスル。然ルニ $\{p_n\}$ ハ有界（$0\leqq p_n\leqq 1$）デアルカラ、コレヨリ直チニ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)=\frac{1}{M}$$

ヲ得ル。(1) 此ノ如クシテ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)$ ノ存在ガ証明出来タ。次ニ $\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{M}$ トナルコトヲ $\frac{1}{M}=P>0$

---

(1) 例ヘバ Wiener: Fourier Integral. chap. III. 104—106頁

コレヨリ Tauberian theorem ニヨッテ $p_n\to\frac{1}{M}$ トナルコトガ証明出来レバヨイノデアルガ、コレハ旨ク行カナイ様デアル。

ナル場合、即チ $\sum_{n=1}^{\infty} n k_n = M < \infty$ ナル場合ニ、$k_n > 0$ ト
ナル如キ n ノ最大公約数ガ1デアルトイフ條件ノ下デ証明
スル。証明ヲ二段ニ分ツ。

第一段　$\lim_{n\to\infty} p_n = \alpha > 0$ ナルコトヲ Khintchine
ノ additive number theory ノ結果ヲ使ハズニ証
明スルコト。

証明：　p_{m+e}　次ノ如ク表ハスコトガ出来ル。

$$
\begin{aligned}
(4)\quad p_{m+e} = {} & p_m (k_1 p_{e-1} + k_2 p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{e-2} p_2 + k_{e-1} p_1 + k_e) \\
& + p_{m-1} (k_2 p_{e-1} + k_3 p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{e-1} p_2 + k_e p_1 + k_{e+1}) \\
& + p_{m-2} (k_3 p_{e-1} + k_4 p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_e p_2 + k_{e+1} p_1 + k_{e+2}) \\
& + \cdots\cdots \\
& + p_1 (k_m p_{e-1} + k_{m+1} p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{m+e-3} p_2 + k_{m+e-2} p_1 + k_{m+e-1}) \\
& + (k_{m+1} p_{e-1} + k_{m+2} p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{m+e-2} p_2 + k_{m+e-1} p_1 + k_{m+e})
\end{aligned}
$$

コレハ recurrence formula (3) ヲ繰返ヘシテ用ニ
ルコトニヨリテモ得ラレルガ probability ノ考ヘニモド
レバ直接得ラレル。即チ p_n ハ n 回目ニ元ヘ戻ル proba-
bility，k_n ハ n 回目ニハジメテ元ヘ戻ル probability
ト考ヘレバヨイノデアル。更ニ

(5) $h_{e,j} = h_{j+1} p_{e-1} + h_{j+2} p_{e-2} + \cdots + h_{j+e-1} \cdot p_1 + h_{j+e}$ $\quad j = 0, 1, 2, \cdots, m, \cdots$

トオケバ $h_{e,0} = p_e$ =テ $h_{e,j}$ $(j > 0)$ ハ $l, l+1, \cdots\cdots, l+j-1$ 回目ニ元ヘ戻ラズ $= l+j$ 回目ニ元ヘ戻ル probability デアルコト $h_{e,j}$ ヲ使ヘバ

(4*) $p_{m+e} = p_m \cdot h_{e,0} + p_{m-1} \cdot h_{e,1} + \cdots + p_1 \cdot h_{e,m-1} + h_{e,m}$

トナリ、且ツ又、$h_{e,j}$ ノ定義ヨリ明カニ

$$h_{e,0} + h_{e,1} + \cdots + h_{e,m} + \cdots \leqq 1$$

又ハ

(6) $p_e + h_{e,1} + h_{e,2} + \cdots + h_{e,m} + \cdots \leqq 1$

次ニ (6) ガ l ニ関シテ一様ニ収斂スルコトト、(6) ニ於テ実際ニ等号ガ成立スルコトヲ示サウ。(6) ガ l ニ関シテ一様ニ収斂スルコトハ $h_{e,j}$ ノ定義 (5) 及ビ $\sum_{n=1}^{\infty} n h_n < \infty$ トイフコトヨリ明カデアロウ。実際 l ニ無関係ニ

$$\sum_{m=M}^{\infty} h_{e,m} = \sum_{m=M}^{\infty} (h_{m+1} \cdot p_{e-1} + h_{m+2} p_{e-2} + \cdots\cdots + h_{m+e-1} p_1 + h_{m+e})$$

$$\leqq \sum_{m=M}^{\infty} (h_{m+1} + h_{m+2} + \cdots + h_{m+e-1} + h_{m+e})$$

$$\leqq h_{M+1} + 2 h_{M+2} + 3 h_{M+3} + \cdots\cdots$$

$$\leqq \sum_{m=M+1}^{\infty} m h_m$$

ヨッテ M ヲ十分大トリトレバ右辺、シタガッテ左辺ハ l ニ

無関係ニイクラデモ小サクナル．次ニ(6)ニ於テ等号ガ成立スルトハ

$$p_\ell + k_{\ell,1} + k_{\ell,2} + \cdots\cdots + k_{\ell,m}$$
$$= (k_1 p_{\ell-1} + k_2 p_{\ell-2} + \cdots\cdots + k_{\ell-1} p_1 + k_\ell)$$
$$+ (k_2 p_{\ell-1} + k_3 p_{\ell-2} + \cdots\cdots + k_\ell p_1 + k_{\ell+1})$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$+ (k_m p_{\ell-1} + k_{m+1} p_{\ell-2} + \cdots\cdots + k_{m+\ell-2} p_1 + k_{m+\ell-1})$$
$$+ (k_{m+1} p_{\ell-1} + k_{m+2} p_{\ell-2} + \cdots\cdots + k_{m+\ell-1} p_1 + k_{m+\ell})$$
$$= p_{\ell-1}(k_1 + k_2 + \cdots\cdots + k_{m+1}) + p_{\ell-2}(k_2 + k_3 + \cdots\cdots + k_{m+2}) + \cdots$$
$$+ p_1(k_{\ell-1} + k_\ell + \cdots\cdots + k_{m+\ell-1}) + (k_\ell + k_{\ell+1} + \cdots + k_{m+\ell})$$
$$= p_{\ell-1} + p_{\ell-2}(1 - k_1) + \cdots\cdots + p_1(1 - k_1 - k_2 - \cdots\cdots - k_{\ell-2})$$
$$+ (1 - k_1 - k_2 - \cdots\cdots - k_{\ell-1})$$
$$+ O(k_{m+2} + 2k_{m+3} + 3k_{m+4} + \cdots\cdots)$$

然ルニ

$$p_{\ell-1} + p_{\ell-2}(1 - k_1) + \cdots\cdots + p_1(1 - k_1 - k_2 - \cdots\cdots - k_{\ell-2})$$
$$+ (1 - k_1 - k_2 - \cdots\cdots - k_{\ell-1})$$
$$= \{p_{\ell-1} - (p_{\ell-2} k_1 + p_{\ell-3} k_2 + \cdots\cdots + p_1 k_{\ell-2} + k_{\ell-1})\}$$
$$+ \{p_{\ell-2} - (p_{\ell-3} k_1 + p_{\ell-4} k_2 + \cdots\cdots + p_1 k_{\ell-3} + k_{\ell-2})\}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$+ \{p_2 - (p_1 k_1 + k_2)\} + \{p_1 - k_1\} + 1 = 1$$

デアルカラ，結局

$$p_\ell + k_{\ell,1} + k_{\ell,2} + \cdots\cdots + k_{\ell,m} = 1 + O\left(\sum_{n=M+1}^{\infty} n k_n\right)$$

ヨッテ

(7) $p_\ell + k_{\ell,1} + k_{\ell,2} + \cdots\cdots + k_{\ell,m} + \cdots\cdots = 1$

ヲ得ル。コレヨリ (4*) ヲ使ヘバ $m \geqq M$ ニ対シテ

$$p_{m+\ell} \geqq p_m \cdot k_{\ell,0} + p_{m-1} \cdot k_{\ell,1} + \cdots\cdots + p_{m-M} \cdot k_{\ell,M}.$$

$$\geqq \{\min(p_m, p_{m-1}, \cdots\cdots, p_{m-M})\}(k_{\ell,0} + k_{\ell,1} + \cdots\cdots + k_{\ell,M})$$

ヨッテ先ガ M ヲ十分大キクトッテ $k_{\ell,0} + k_{\ell,1} + \cdots\cdots + k_{\ell,M} \geqq \frac{1}{2}$ ガ任意ノ ℓ ニ対シテ成立スルヤウニトリ。然ル後 m ヲ十分大キクトッテ $m - M > N$ ナル如クトレバ（但シ N ハ $n > N$ ナルトキニ常ニ $p_n > 0$ トナルヤウナ N トスル。コノ様ナ N ガ存在スルコトハ、$k_n > 0$ トナル如キ n ノ最大公約数ガ 1 ナルコトヨリ容易ニワカル）.

$$\min(p_m, p_{m-1}, \cdots\cdots, p_{m-M}) = \alpha_0 > 0$$

トナルカラ結局 $m \geqq M + N$ ナル任意ノ m ニ対シテ

$p_m \geqq \frac{1}{2}\alpha_0 > 0$ ガ成立スル。即チ $\lim_{n\to\infty} p_n = \alpha \geqq \frac{1}{2}\alpha_0 > 0$ デアル。

<u>第二段</u> $\lim_{n\to\infty} p_n = \alpha > 0$ ナルトキ $\lim_{n\to\infty} p_n$ ガ存在スルコトノ証明。

コレハ吉田氏ガ 173 号ニ於テ証明サレタノト全ク同ジヤウニスレバ出来ル。シカシ吉田氏ノ証明ニ少シ不十分ナ点ガアッタノデ、コヽデソレヲオギナッテ証明スル。（吉田氏ノ証明ニ於テハ $p_\ell + \sum_{j=1}^{\infty} k_{\ell,j}$ ガ <u>ℓ ニ関シテ一様ニ</u>収斂スルト云フコトヲ注意シテナカッタノデアル）$\overline{\lim_{n\to\infty}} p_n = \beta$

トオキ $\beta > \alpha$ トシテ矛盾ヲ出セバヨイ。先ヅ (4^*) ヨリ

$$p_{m+l} = p_m p_l + p_{m-1} \cdot f_{l,1} + p_{m-2} \cdot f_{l,2} + \cdots + p_1 \cdot f_{l,m+1} + f_{l,m}$$

ヨッテ ε が任意ニ與ヘラレタトキ先ヅ M ヲ十分大キクトッテ l ニ無関係ニ

$$f_{l,M+1} + f_{l,M+2} + \cdots \leqq \varepsilon$$

トナル様ニスレバ $m \geqq M$ ニ對シテ

$$p_{m+l} \leqq p_m \cdot p_l + p_{m-1} \cdot f_{l,1} + p_{m-2} \cdot f_{l,2} + \cdots + p_{m-M} \cdot f_{l,M} + \varepsilon$$

次ニ $\overline{\lim_{n\to\infty}} p_n = \beta$ ナルコトヨリ，任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ N ガ定マッテ $n \geqq N$ ナレトキ $p_n < \beta + \varepsilon$ トナル。

更ニ $\underline{\lim_{n\to\infty}} p_n = \alpha$ ナルコトニヨリ、m ヲ十分大キクトッテ $p_n < \alpha + \varepsilon$，$m - M \geqq N$ トナルヤウニスルコトが出来ル。ヨッテ此ノ如キ m ニ對シテ

$$\begin{aligned} p_{m+l} &\leqq (\alpha+\varepsilon) p_l + (\beta+\varepsilon) f_{l,1} + (\beta+\varepsilon) f_{l,2} + \cdots + (\beta+\varepsilon) f_{l,M} + \varepsilon \\ &= (\alpha+\varepsilon) p_l + (\beta+\varepsilon)(f_{l,1} + \cdots + f_{l,M}) + \varepsilon \\ &\leqq (\alpha+\varepsilon) p_l + (\beta+\varepsilon)(1 - p_l) + \varepsilon \end{aligned}$$

$$p_{m+l} \leqq -(\beta - \alpha) p_l + \beta + 2\varepsilon$$

コレハ m ヲ上記ノ如ク定メルト任意ノ l ニ對シテ成立スル式デアル、ヨッテ l ヲ十分大キクトッテ $p_{m+l} > \beta - \varepsilon$，$p_l > \alpha - \varepsilon$ ナル如クトレバ（コレハ可能！）

$$\beta - \varepsilon \leqq -(\beta - \alpha)(\alpha - \varepsilon) + \beta + 2\varepsilon$$

トナル。$\varepsilon > 0$、任意デアッタカラ $0 < \alpha < \beta$ トスレバコレ

ハ存在デアル。ヨッテ $\overline{\lim_{n\to\infty}} p_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} p_n$ デナケレバナラナイ。

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(p_1 + \cdots + p_n) = \frac{1}{M}$ デアッタカラ $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{M}$ デナケレバナラヌコトハ明カデアル。

(注意) 前号ニ掲ゲテ於イタ大キナ Matrix ノ形ヲ見ルト、$\sum_{n=1}^{\infty} k_{11}^{(n)} = 1$ ナル場合ノ Matrix $\mathbb{K}$ ハ (l) ノ空間ノ norm カラノ bounded linear transformation ヲ與ヘ、且ツ任意ノ $x \in (l)$ ニ対シテ $\{\mathbb{K}^{(n)}(x)\}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ガ (l) 内ニテ compact ナ集合ヲ作ッテヰルコトガワカル。ヨッテ $\frac{1}{n}\{\mathbb{K}(x) + \mathbb{K}^{(2)}(x) + \cdots + \mathbb{K}^{(n)}(x)\}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ モ、ヤハリ一ツ定メレバ compact デアル。故ニ一般ノ Banach 空間ニ於ケル linear transformation ノ iteration ノ議論[1]ヨリ $\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \mathbb{K}^{(m)}\}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ハ linear operator ノ sequence トシテ strongly ニ収斂スル。ヨッテ列論 $\frac{1}{n}(p_{11}^{(1)} + p_{11}^{(2)} + \cdots\cdots + p_{11}^{(n)}) \longrightarrow P_{11}$ ガ存在スル。

実際吉田氏ニヨッテ注意サレタ如ク各々ノ ergodic part ニ於テハ mean ergodic Theorem ガ成立シテヰルノデアル。コレハ (l_1) ニ於ケル positive element $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots\cdots)$ ガ positive element $x = (x_1, x_2, \cdots\cdots)$ ニ各座標ガ収斂シ $(x_i^{(n)} \longrightarrow x_i,$

---

(1) 吉田氏: 紙上談話会 164 号ノ 20, 角谷. 紙上談話会 162 号 711 (680)

$i=1,2,\cdots\cdots$) 且ツ $\|X_n\| \to \|X\|$.

(即チ $\sum_{i=1}^{\infty} |X_i^{(n)}| \to \sum_{i=1}^{\infty} |X_i|$) ナラバ $X_n \to X$ strongly

トナル コトヨリ容易ニワカルノデアル。