



Title	Banach空間ニ於ケル linear functional ノ集合ニ関スル weak topologyニ就イテ
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 177, p. 193-197
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74711
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

781. Banach 空間 = 於ケル linear functional
ノ 集合 = 關スル weak topology = 就
イテ

角 谷 静 夫 (阪大)

Banach 空間 E デ 定 義 サ レ タ ア ラ エ ル bounded
linear functional $f(x)$ ハ ヌ ー ツ ノ Banach 空間
 $\bar{E}$ ヲ 作 ツ テ キ ル。 任 意 ノ $f \in \bar{E}$ = 對 シ テ f ノ norm $\|f\|$ ハ

$\|f\| = l. u. b. |f(x)| = \text{ヨツテ定義セラル, コノ norm}$
 $\|x\| \leq 1$

= ヨツテ與ヘラレル topology ハ E ノ strong topology
 ト呼バレル。コレニ對シテ $\bar{E}$ = 於テハ 又 weak topology
 が考ヘラレル。即チ任意ノ $f_0 \in \bar{E}$ = 對シテ ヲノ weak

neighbourhood $\bigcup \left(f_0; \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \end{matrix} \right)$ ハ

$|f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$ ナル如キ $f \in \bar{E}$
 全体ノ集合トシテ定義セラル。但シ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ハ E
 ノ任意ノ点, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ハ任意ノ real positive
 number, n ハ任意ノ integer デアル。コノ近傍系 =
 ヨツテ $\bar{E}$ ガ一ツノ Hausdorff 空間トナツテキルコト
 ハ明カデアリ、又コノ近傍系 = ヨツテ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_0$ トナル
 ノハ、任意ノ $x \in E$ = 對シテ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_0(x)$ (real
 number ノ系列トシテノ收斂) トナルコトト同等デアアル。

シカシ weak topology ハ近傍系トシテ第一可附番公
 理ヲ満足シテキナイカラ、コノ weak topology = ヨツ
 テ一点 f_0 が $\bar{E}$ ノ部分集合 G ノ集積点トナツテキタトシ
 テモ G ノ中ヨリ f_0 = (弱) 收斂スル部分列ヲ選ビ出スコトハ
 必ズシモ可能デハナイ。(例ヘバ J. v. Neumann: Zur
 Algebra der Funktional operationen und
 theorie der normalen Operatoren, Math.
 Ann. 102. 380 頁)。コノ事實ノタメ $\bar{E}$ ノ weak
 topology ハ取扱ヒガ困難デ、色々ト面倒ナコトが起ツテ

來ル。

例へバ、 $\bar{E}$ ノ線状部分集合 G が *regularly closed* デアルト云フ性質ヲ論シルタメニハ *transfinitely closed* ト云フ概念ヲ持ツテ來ナケレバナラナカツタ。

(Banach ノ書. *Opérations linéaires*, p. 116 — 118). 但シコトニ $\bar{E}$ ノ線状部分集合 G が *regularly closed* デアルト云フノハ任意ノ $f_0 \in \bar{E} - G$ ニ對シテ $x_0 \in E$ が定マツテ $f_0(x_0) \neq 0$, $f(x_0) = 0$ for $f \in G$ トナルコトデアル。 *transfinitely closed* ノ定義ハ以下ノ議論ニハ必要ガナイノデ省略スル。(詳シクハ Banach ノ本ヲ参照)

Banach ハ $\bar{E}$ ノ線状部分集合 G ニ對シテ *regularly closed* デアルコトト *transfinitely closed* デアルコトトが同等デアルコトヲ証明シテ、コレヲ種々ノ議論ニ用ヒテキル。以下ニ於テハ $\bar{E}$ ノ線状部分集合 G ニ對シテ *regularly closed* デアルコトト *weakly closed* (*weak topology*ニ於テ *closed*) デアルコトトが同等デアルコトヲ証明シヨウ。コレハ非常ニ簡單ナコトデ、當然注意サレルベキコトデアリナガラホダコレヲ述ベタモノヲ見タコトガナイ。

シカモコノ考ヲ用ヒルト Banach ノ行ツタ議論が大ヘン簡單ニナレヨウデアル。¹⁾

脚註ハ次頁ヘ—

定理. E / 部分線状集合 G が *regularly closed* デアルタメ = 必要且十分条件ハ G が $\bar{E} = \text{於テ weak topology} = \text{テ開カテキルコトデアル}$.

証明: 必要 + コトハ明ラカデアルカラ十分 + コトノミ証明スル. $f_0 \in \bar{E} - G = \text{テ}$ 且ツ G が *weak topology* = テ開カテキルカラ、 f_0 / *weak neighbourhood*

$$\cup \left(f_0; x_1, x_2, \dots, x_n \right) \text{ カ定マツテ } G. \cup \left(f_0; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \right)$$

= 0 トナル。ヨツテ今任意ノ $f \in \bar{E}$ = 對シテ n 次元 / Euclid 空間 R_n 内ノ点 $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ ヲ對應セシメレバ $f \rightarrow \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ ハ $\bar{E} \rightarrow R_n$ ナル *linear transformation* ヲ定ムル。且ツコノ $T = \text{ヨル } G$ / 像 $T(G)$ ハ $T(f_0) = \{f_0(x_1), f_0(x_2), \dots, f_0(x_n)\}$ / $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ -近傍 (R_n 内ノ) = ハハイラナイ。 $T(G)$ ハ R_n 内ノ線状部分集合デアルカラ、適當 = *real number* $c_1, c_2, \dots, c_n$ ヲ定メテ $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in T(G)$ ナルトキ

$$\sum_{i=1}^n c_i \xi_i = 0, \text{ 且ツ } \sum_{i=1}^n c_i f_0(x_i) \neq 0 \text{ ナル如クスルコト}$$

が出來ル。ヨツテ今 $x_0 = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ トオケバ $x_0 \in E = \text{テ}$

(1) C.R. 206, Nr. 23 (1938) = 於テ N. Bourbaki が $\bar{E}$ = 於ケル *weak topology* ヲ論ジテ、コノ考ヘヲ用フレバ E が *regular* デアルタメノ条件が比較的容易 = 與ヘラレルコトヲ示シテキル。シカシ Bourbaki ハ上記ノ事實 = ハ少しモ触レテキナイ。

$$f \in G \text{ かつ } f(x_0) = f\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) = 0,$$

$$\text{且 } f_0(x_0) = f_0\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i f_0(x_i) \neq 0 \text{ かつ } f_0 \in G.$$

此ノ如クシテ x_0 が定マツタカラ G は *regularly closed* ナル。 — 以上 —