



Title	Uniformly convex ナ Banach空間ニ於ケル Mean Ergodic Theorem
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 177, p. 197-200
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74712
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

782. Uniformly convex + Banach 空間 = 於ケル Mean Ergodic Theorem

角 谷 静 夫 (阪大)

近着, Bull. Amer. Math. Soc. 45-1 = 7
Garrett Birkhoff が uniformly convex +
Banach 空間 = $\tau \|T\| \leq 1 + \epsilon$ 任意 linear operator
 T = 對シテ Mean Ergodic Theorem が簡單 = 証明
出來タト報ジテキル。Birkhoff の証明ハ非常 = 簡單
+ モノヲシイケレドモ、ソノ証明ハドウ云フ方法 = ヨツタモ
ノカ全然ワカラナイ。コノ定理ノ比較的 = 簡單 + 証明が得
ラレタカラ以下ヲ報告スル。

定理 假定 E が uniformly convex +
Banach 空間⁽¹⁾, T ハ $\|T\| \leq 1 + \epsilon$ bounded

脚註 次頁へ

linear operator.

結論 任意 $x \in E$ に対して $x_n = \frac{1}{n} (T + T^2 + \dots + T^n)x$ $n \rightarrow \infty$ とするとき強収斂スル。

証明: $\|x_n\|$ $n=1, 2, \dots$ = 對スル下限ヲ有トセヨ。 $\alpha=0$ トラバ定理ハ明カニ成立スル。 何トナレバ $\alpha=0$ トラバ任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シテ $\|x_n\| < \varepsilon$ ナル n が存在スル。 然ラバ任意ノ N = 對シテ $kn \leq N < (k+1)n$ ナル integer k ナレバ

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{1}{N} (T + T^2 + \dots + T^N)x \\ &= \frac{1}{N} \left\{ nx_n + nT^n x_n + \dots + nT^{(k-1)n} x_n + (T^{kn+1} + \dots + T^N)x \right\} \end{aligned}$$

$$\|x_N\| \leq \frac{1}{N} \left\{ kn \|x_n\| + (N - kn) \|x\| \right\}$$

$$\leq \|x_n\| + \frac{n}{N} \|x\| < \varepsilon + \frac{n}{N} \|x\|$$

ヨツテ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|x_N\| \leq \varepsilon$$

(i) Banach空間が uniformly convex ナラバ

、ハ任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シテ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が定マリ、 $\|x\|=1$ 、

$\|y\|=1$ 、 $\|x-y\| \geq \varepsilon$ ナル任意ノ $x, y \in E$ = 對シテ $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$

トナルコトデアル。 コノ條件ニ於テ $\|x\|=1$ 、 $\|y\|=1$ 、

$\|x\| \leq 1$ 、 $\|y\| \leq 1$ = ヨツテ容易ニオキカヘラレル。 紙上談

話會 号又ハ東北數學誌 卷 頁参照。

$\varepsilon > 0$ の任意性より故 $\|x_N\| \rightarrow 0$

$\alpha > 0$ かつ $\eta > 0$ 任意、任意 $\eta > 0 =$ 對して $\varepsilon > 0$ かつ
充分小な η をとれば

$$(\alpha + \varepsilon) \left(1 - \delta \left(\frac{\eta}{\alpha + \varepsilon}\right)\right) < \alpha$$

然るに η の任意性より $\|y\| < \alpha + \varepsilon$, $\|z\| < \alpha + \varepsilon$ かつ y, z
= 對して $\|y - z\| \geq \eta$ ならば $\left\|\frac{y+z}{2}\right\| < \alpha$.

よって $\|x_n\| < \alpha + \varepsilon$ なる n をとれば

$\|T^n x_n\| < \alpha + \varepsilon$, $\left\|\frac{1}{2}(x_n + T^n x_n)\right\| = \|x_{2n}\| \geq \alpha$ かつ
よって $\|x_n - T^n x_n\| < \eta$.

同様にして $\|x_n - T^{kn} x_n\| < \eta$, $k = 1, 2, \dots$ (何れにと
れば、もし $\|x_n - T^{kn} x_n\| \geq \eta$ ならば $y_n = \frac{1}{2}(x_n + T^{kn} x_n)$
は $\|y_n\| < \alpha$ かつ、これより

$$\begin{aligned} \|x_{2kn}\| &= \left\|\frac{1}{k}(y_n + T^n y_n + \dots + T^{(k-1)n} y_n)\right\| \\ &\leq \|y_n\| < \alpha \end{aligned}$$

とより $\bar{x}$ に向き合ふこととなる。) よって任意 $N =$ 對して

$k_n \leq N < (k+1)n$ なる k を考へれば

$$\begin{aligned} \|x_N - x_n\| &= \frac{1}{N} \left\| \{ nx_n + nT^n x_n + \dots + nT^{(k-1)n} x_n \right. \\ &\quad \left. + (T^{kn} + \dots + T^N)x_n - Nx_n \} \right\| \\ &\leq \frac{1}{N} \left\{ n\|T^n x_n - x_n\| + \dots + n\|T^{(k-1)n} x_n - x_n\| \right. \\ &\quad \left. + (N - kn)(\|x\| + \|x_n\|) \right\} \\ &\leq \frac{1}{N} \left\{ (k-1)n \cdot \eta + (N - kn)(\|x\| + \|x_n\|) \right\} \\ &< \eta + \frac{n}{N} (\|x\| + \|x_n\|) \\ &< \eta + \frac{2n}{N} \|x\| \end{aligned}$$

ヨツテ

$$\|x_N - x_{N'}\| \leq 2\eta + 2\left(\frac{n}{N} + \frac{n}{N'}\right)\|x\|$$

右辺ハ $N, N' \rightarrow \infty$ ナルトキ (n ハ *fixed*) 2η トナリ $\eta > 0$

ハ任意デアツタカラ $\{x_N\}$ ハ基本列ナラズル。