OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Uniformly convex ナ Banach空間ニ於ケル Mean Ergodic Theorem
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 177, p. 197-200
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74712
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

782. Uniformly convex + Banach 空間ニ於ケル Mean Ergodic Theorem

角谷 靜夫（阪大）

近着ノ Bull. Amer. Math. Soc. 45-1 ニテ Garrett Birkhoff ガ uniformly convex + Banach 空間ニテ $\|T\| \leqq 1$ ナル任意ノ linear operator T ニ對シテ Mean Ergodic Theorem ガ簡單ニ証明出來タト報ジテヰル。Birkhoff ノ証明ハ非常ニ簡單ナモノラシイケレドモ、ソノ証明ハドウ云フ方法ニヨツタモノカ全然ワカラナイ。コノ定理ノ比較的ニ簡單ナ証明ガ得ラレタカラ以下デ報告スル。

定理 假定 E ガ uniformly convex + Banach 空間[1]，T ハ $\|T\| \leqq 1$ ナル bounded

脚註次頁ヘ

linear operator.

結論　任意ノ $x \in E$ ニ對シテ $x_n = \frac{1}{n}(T + T^2 + \cdots + T^n)x$ ハ $n \to \infty$ トキ強收斂スル。

証明：　$\|x_n\|$ ノ $n = 1, 2, \cdots$ ニ對スル下限ヲ α トセヨ。$\alpha = 0$ ナラバ定理ハ明カニ成立スル。何トナレバ $\alpha = 0$ ナラバ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\|x_n\| < \varepsilon$ ナル n ガ存在スル。然ラバ任意ノ N ニ對シテ $kn \leqq N < (k+1)n$ ナル integer k ヲトレバ

$$x_N = \frac{1}{N}(T + T^2 + \cdots T^N)x$$

$$= \frac{1}{N}\{nx_n + nT^n x_n + \cdots + nT^{(k-1)n}x_n + (T^{kn+1} + \cdots + T^N)x\}$$

$$\|x_N\| \leqq \frac{1}{N}\{kn\|x_n\| + (N - kn)\|x\|\}$$

$$\leqq \|x_n\| + \frac{n}{N}\|x\| < \varepsilon + \frac{n}{N}\|x\|$$

ヨッテ

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \|x_N\| \leqq \varepsilon$$

(i) Banach 空間ガ uniformly convex デアルト云フハ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ガ定マリ、$\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $\|x - y\| \geqq \varepsilon$ ナル任意ノ $x, y \in E$ ニ對シテ $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqq 1 - \delta(\varepsilon)$ トナルコトデアル。コノ條件ニ於テ $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ ハ $\|x\| \leqq 1$, $\|y\| \leqq 1$ ニヨッテ容易ニオキカヘラレル。紙上談話會　号又ハ東北數學誌　巻　頁參照。

$\varepsilon>0$ ハ任意ナル故 $\|x_N\|\to 0$

$\alpha>0$ ナルトキハ、任意ノ $\eta>0$ ニ對シテ $\varepsilon>0$ ヲ十分小サクトレバ

$$(\alpha+\varepsilon)\left(1-\delta\left(\frac{\eta}{\alpha+\varepsilon}\right)\right)<\alpha$$

然ルトキハ任意ノ $\|y\|<\alpha+\varepsilon$, $\|z\|<\alpha+\varepsilon$ ナル y, z ニ對シテ $\|y-z\|\geqq\eta$ ナラバ $\left\|\frac{y+z}{2}\right\|<\alpha$.

ヨッテ $\|X_n\|<\alpha+\varepsilon$ ナル如キ n ヲトレバ

$\|T^n X_n\|<\alpha+\varepsilon$, $\left\|\frac{1}{2}(X_n+T^n X_n)\right\|=\|X_{2n}\|\geqq\alpha$ ナルコトヨリ $\|X_n-T^n X_n\|<\eta$.

同様ニシテ $\|X_n-T^{kn}X_n\|<\eta$, $k=1, 2, \cdots\cdots$ (何トナレバ、モシ $\|X_n-T^{kn}X_n\|\geqq\eta$ ナラバ $y_n=\frac{1}{2}(X_n+T^{kn}X_n)$ ハ $\|y_n\|<\alpha$ ニテ、コレヨリ

$$\|X_{2kn}\|=\left\|\frac{1}{k}(y_n+T^n y_n+\cdots\cdots+T^{(k-1)n}y_n)\right\|$$
$$\leqq\|y_n\|<\alpha$$

トナリ矛盾ヲヒキオコスカラ.) ヨッテ任意ノ N ニ對シテ $kn\leqq N<(k+1)n$ ナル k ヲ考ヘレバ

$$\|x_N-x_n\|=\frac{1}{N}\left\|\{nx_n+nTx_n+\cdots\cdots+nT^{(k-1)n}x_n+(T^{kn+1}+\cdots\cdots+T^N)x-Nx_n\}\right\|$$
$$\leqq\frac{1}{N}\{n\|T^n x_n-x_n\|+\cdots\cdots+n\|T^{(k-1)n}x_n-x_n\|+(N-kn)(\|x\|+\|x_n\|)\}$$
$$\leqq\frac{1}{N}\{(k-1)n\cdot\eta+(N-kn)(\|x\|+\|x_n\|)\}$$
$$<\eta+\frac{n}{N}(\|x\|+\|x_n\|)$$
$$<\eta+\frac{2n}{N}\|x\|$$

ヨッテ

$$\|x_N - x_{N'}\| \leqq 2\eta + 2\left(\frac{n}{N} + \frac{n}{N'}\right)\|x\|$$

右辺ハ $N, N' \to \infty$ トキ（n ハ fixed）2η トナリ $\eta > 0$ ハ任意デアッタカラ $\{x_N\}$ ハ基本列デアル。