



Title	Uniformly convex ナ Banach空間ニ就イテ
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 178, p. 206-215
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74714
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

784. Uniformly convex + Banach 空間 = 就イテ

角 谷 静 夫 (阪大)

前号 = 於テ *uniformly convex + Banach* 空間 = 於テハ *Mean Ergodic Theorem* が單 = $\|T\| \leq 1$ ト云フ條件ノ下デ成立スルコトヲ証明シタ。コノ問題トナルハコノ定理が吉田氏ノ定理ノ特別ノ場合トシテ得ラレナイカト云フコトデアアル。吉田氏ノ定理⁽¹⁾ト云フハ次ノ定理デアアル。

定理 T ヲ Banach 空間 E = 於ケル bounded linear transformation トスル。モシ $\|T^n\| \leq C$, $n = 1, 2, \dots$ +ル如キ constant C が存在シ, 且ツ任意

(1) 吉田氏: 紙上談話會 164号, 720, Banach 空間 = 於ケル Mean Ergodic Theorem.

$\forall x \in E =$ 對シテ $x_n = \frac{1}{n} (x + Tx + \dots + T^{n-1}x)$
 $(n=1, 2, \dots)$ が弱收斂スル部分列ヲ含メバ、任意 $x \in E$
 $=$ 對シテ $\{x_n\} (n=1, 2, \dots)$ ハ強收斂スル。

$uniformly\ convex + Banach$ 空間 $E =$ 於テ
 任意 $\|T\| \leq 1 + \epsilon$ bounded linear transformation
 $=$ 對シテ吉田氏ノ定理ノ條件が満足サレテキルコト
 ヲ示ス $\Rightarrow$ $uniformly\ convex + Banach$ 空間
 が locally weakly compact ナルコトヲ示セバ
 十分ナル。更ニコト々々 $\Rightarrow$ $uniformly\ convex +$
 $Banach$ 空間が regular ナルコトヲ示セバ十分
 ナル。

何トナレバ任意ニ系列 $\{x_n\}, x_n \in E, \|x_n\| \leq M, n=1, 2, \dots$
 が與ヘテレタトキ $\{x_n\} (n=1, 2, \dots) =$ ヲツ
 テ張ラレタ E ノ closed linear subspace E_1 ヲ考
 ヘルト E_1 ハ separable ナリ且ツ (E が regular ナルコ
 トヨリ、又ハ E_1 自身が $uniformly\ convex$ ナルコト
 ヲリ) E_1 ハ regular ナル。ヨツテ $\overline{E_1}$ ハ又 separable
 ナル。(1a) 故ニ $\{x_n\} (n=1, 2, \dots)$ ヲ $\overline{E_1}$ = 於ケ
 ル linear functional ノ (有界ト) 系列ト考ヘレバ $\overline{E_1}$
 が separable ナルコトヨリ $\{x_n\} (n=1, 2, \dots)$ ノ
 部分列 $\{x_{n_r}\} (r=1, 2, \dots)$ が存在シテコレガ $\overline{E_1}$ = 於
 ケル linear functional ノ系列トシテ $\overline{\overline{E_1}} = E_1$,

(1a) $\overline{E}$ が separable ナラバ E ハ separable. ヲツテ $E_1 = \overline{E_1}$ が
 separable ナラバ $\overline{E_1}$ ハ separable.

element x_0 = 弱収斂スル。コレハ又 $\{x_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) が $x_0 = E$ の element トシテ 弱収斂スルコトヲ意味スルカラ、 E は *locally weakly compact* デアル。

以上ノヤリナ理由 = ヨツテ本回ハ uniformly convex + Banach 空間が regular = ナルコト ヲ証明スル。

コノ事實ハ D. Milman⁽²⁾ = ヨツテ証明サレタ。

Milman ノ証明ハ *transfinitely closed* ト云フ概念ヲ用ヒルモノデ、uniformly convex + Banach 空間ノ unit sphere が *transfinitely closed* = ナルコトヲ証明スルノガソノ方針デアアル。以下ニ述ベル証明ハ Milman ノト全ク独立ニ得ラレタモノデアリ、ソノ方針モ全ク異ツテキル。⁽³⁾

(2) D. Milman: On some criteria for the regularity of spaces of type (13), C, R. U.R.S.S. 20 (1938), No. 4. 243—246.

又 B. J. Pettis が Bull. Amer. Math. Soc. 44, No. 7 = テ同ジ結果ヲ得タト報ジテキル。(Abstract. No. 44—7—295). コレハ Abstract ダケデアアルカラ証明ノ方針ハ全然ワカラナイ。

(3) 以下ノ証明ハ *transfinite* + 考ヘテ全然用ヒナイノガソノ主眼デアアル。Banach ハ *transfinitely closed* トイフ概念ヲ用ヒテ Banach 空間ノ *regularity* ヲ論ジテキルガ、コノ考ハ全然無シニスマセル様デアアル。

Banach 空間ノ議論オラ、出来ルだけ *transfinite* + (次回ハ「ツツク」)

以下ノ証明 = 於テ重要ナ役割ヲ演ジルノハ *Idelly*ノ定理⁽⁴⁾デアル。コノ定理ハ相當古イモノデアルケレドモ具体的ナ場合 = シカ論ジラレズ且ツソノ表現ガ *explicit* デナイクノニアマリ注意サレナカッタ様デアル。實際 *Idelly*ノ定理ヲ使ヘバ *Banach* 空間ノ *regularity* = 關スル種々ノ結果ガ非常ニ簡單ニ証明サレ、特ニ *Goldstine*ノ定理⁽⁵⁾ナドハ殆ドソノ *corollary* トナツテシマフノデアル。⁽⁶⁾コノ *Idelly*ノ定理ノ簡單ニ証明ガ三村氏ニヨツテ得ラレタノデ次 = 先ヅコレヲ三村氏ノオ許シテ得テ紹介スル。

◦ Idellyノ定理 *Banach* 空間 E ニ定義サレタ有限個ノ *linear functional* $f_1, f_2, \dots, f_n$, 有限個ノ *real constant* $C_1, C_2, \dots, C_n$ 及ビ *positive number* M ガ與ヘラレタトキ、任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

(脚註ヲノツキ)

考ヘテ除クコトハ重要ナコトヲ思ハレル。コノ方向ニ對シテハ、*weak topology*ガ非常ニ大切ナ役割ヲ演ジル。例ヘバ前号ノ談話 781 参照。

- (4) E. Idelly: über systeme linearer gleichungen mit unendlich vielen unbekannten, Monatshefte für Math., 31 (1921), 60-91.
- (5) H. H. Goldstine: Weakly complete Banach spaces, Duke Math. J. 4 (1938), 125-131.
- (6) コレヲノ事實ハ又別ニ稿ヲ改メテ書クコトニスル。今回ハ *uniformly convex* ナ *Banach* 空間ノ *regularity*ヲ証明スルノニ應用スルニ止メル。

$f_i(x) = c_i, i=1, 2, \dots, n, \|x\| < M + \varepsilon$ 満足スル E の点 x が存在スル $\lambda =$ 必要且ツ十分な条件ハ任意ノ real number system $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 對シテ

$$\begin{aligned} & |\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_n c_n| \\ & \leq M \cdot \|\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n\| \end{aligned}$$

トナルコトデアル。

三村氏ノ証明

必要コトハ明カデアルカラ十分デアルコトヲ証明スル。任意ノ $x \in E =$ 對シテ n 次元ノ Euclid 空間 R^n ノ点 $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ ヲ對應サセルト $x \rightarrow \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ ハ E ヲ R^n 内ニ寫像スル bounded linear transformation デアル。コレヲ $T =$ ヲ表ス。今 E ノ点 $x = \tau$ $\|x\| < M + \varepsilon$ ヲ満足スル ε ノ全体ノ集合ヲ S トシ S ノ $T =$ ヨル R^n 内ノ像 K ヲ考ヘルト。 S ガ convex ナルコトヨリ K 亦 convex デアル。今モシ点 $P = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ ガ K 内ニ屬シテ居レバ定理ハ明カニ成立スル。^(6a) ヨツテ P ガ K 内ニ屬シナイトシテ矛盾ヲ出セバヨイ。 P ガ K 内ニ屬シナイトスレバ、 K ガ convex ナルコトヨリ、 K ノ Stützebene $=$ τ P ヲ通ルモノガ存在スル。即チ n 個ノスベテハ 0 デナイ常数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ヲトツテ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in K$ ナルトキハ $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \leq 1$ 、且ツ $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_n c_n = 1$ トナル。然ルニコノ最初ノ不等式ハ K ノ

(6a) 即チ $f_i(x) = c_i, i=1, 2, \dots, n, \|x\| < M + \varepsilon$ ナル $x \in E$ が存在スル。

定義 = モデル

$$\|x\| < M + \varepsilon \text{ トキ}$$

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) \leq 1$$

トキキ改メルコトが出来ル。 x が $S(\|x\| < M + \varepsilon)$ ヲ動く

トキ、 $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x)$ ノ上限ハ明

$$カ = (M + \varepsilon) \cdot \|\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n\| \text{ デアルカラ}$$

結局

$$(M + \varepsilon) \cdot \|\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n\| \leq 1$$

$$= \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_n c_n$$

$\varepsilon > 0$ デアルカラ、コレハ定理ノ假定ニ矛盾スル。ヨツテ

$P \in K$ デナケレバナラナイ。 — 以上 —

Idelly 1 定理ヲ conjugate space ノ問題ニ應用
スレバ直ニ次ノ系ヲ得ル。

[系] E ノ Banach 空間, E ノ $\vee$ ノ conjugate
space, $\bar{E}$ ノ更ニ $\vee$ ノ conjugate space トスル。
 X ノ $\bar{E}$ ノ任意ノ element (即チ $X(f)$ ハ $\bar{E}$ デ定義サ
レタ linear functional) トスルトキ、任意ノ $\varepsilon > 0$ 及
ビ任意ノ $f_1, f_2, \dots, f_n \in \bar{E}$ = 對シテ $f_i(x) = X(f_i)$,
 $i = 1, 2, \dots, n$ ノ満足シ且ツ $\|x\| < \|X\| + \varepsilon$ トナレ如キ E
ノ点 x が存在スル。

証明 任意ノ real number ノ system $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, λ_n = 對シテ

$$|\lambda_1 X(f_1) + \lambda_2 X(f_2) + \dots + \lambda_n X(f_n)|$$

$$\leq \|X\| \cdot \|\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n\|$$

トナルコトヨリ明カ。

Uniformly convex + Banach 空間が
regular ナルコトノ証明

E が uniformly convex + Banach 空間トセヨ。
任意 $\alpha \in \bar{E}$ が與ヘラレタトキ $f(\alpha) = \alpha(f)$ が任意
ノ $f \in \bar{E}$ ニ對シテ成立スル如キ $x \in E$ が存在スルコトヲ示
セバヨイ。 $\alpha = 0$ ナルトキハ明カデアルカラ $\|\alpha\| > 0$ ト
假定スル。ヨツテ $\|\alpha\|^{-1}$ ヲ乗ズルコトニヨリ $\|\alpha\| = 1$ ト
假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。

先ヅ $\|\alpha\| = 1$ ナルコトヨリ $\|f_n\| = 1$, $\alpha(f_n) > 1 - \frac{1}{n}$
ナル如キ $f_n \in \bar{E}$ が存在スル。今系列 $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$
ヲ考ヘル。コノうちノ最初ノ有限個 $f_1, f_2, \dots, f_n$ ヲト
ルト、コレニ對シテ Idellg ノ定理ノ系ニヨリ $x_n \in E$ が
定マツテ

$$f_i(x_n) = \alpha(f_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\|x_n\| < \|\alpha\| + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

トナル。

此ノ如ク定メラレタ点列 $\{x_n\}$ が強収斂スルコトヲ示
サウ。モシ x_n が強収斂ニナケレバアル $\varepsilon > 0$ 及び
 $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \dots < n_k < m_k < \dots$ が定マツテ
 $\|x_{n_k} - x_{m_k}\| \geq \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$ トナル。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$
 $= 1$ デアルカラ、 E が uniformly convex ナルコトヨ

$$1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_{n_k} + x_{m_k}}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon) \quad \text{トナル。}$$

($\delta(\varepsilon)$ は uniformly convex, 定義⁽⁷⁾ = 現ハレタ
 ε)。然ルニ $\mathcal{X}_{n_k}, \mathcal{X}_{m_k}$ ($n_k < m_k$) は定義ヨリ

$$f_{n_k}(\mathcal{X}_{m_k}) = \mathbb{X}(f_{n_k}), \quad f_{m_k}(\mathcal{X}_{n_k}) = \mathbb{X}(f_{m_k})$$

ヲ満足ス。従ッテ

$$f_{n_k}\left(\frac{\mathcal{X}_{n_k} + \mathcal{X}_{m_k}}{2}\right) = \mathbb{X}(f_{n_k}),$$

トナリ、コレヨリ 順次

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n_k} < \mathbb{X}(f_{n_k}) &= f_{n_k}\left(\frac{\mathcal{X}_{n_k} + \mathcal{X}_{m_k}}{2}\right) \\ &\leq \|f_{n_k}\| \cdot \left\|\frac{\mathcal{X}_{n_k} + \mathcal{X}_{m_k}}{2}\right\| = \left\|\frac{\mathcal{X}_{n_k} + \mathcal{X}_{m_k}}{2}\right\|, \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\|\frac{\mathcal{X}_{n_k} + \mathcal{X}_{m_k}}{2}\right\| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n_k}\right) = 1$$

ヲ得ルカラ、コレハ矛盾デアル。ヨツテ $\{\mathcal{X}_n\}$ は強収斂シナ
 ケレバナラナシ。コノ limit ヲ $\mathcal{X}_0$ トセヨ。 $\mathcal{X}_0$ ハ明カニ

$$\|\mathcal{X}_0\| = 1, \quad f_i(\mathcal{X}_0) = \mathbb{X}(f_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

ヲ満足スル。シカモ E が uniformly convex ナルコトヨ
 11 カナル $\mathcal{X}_0 \in E$ ハ唯一ツシカ存在シナシ。⁽⁸⁾

(7) 前号ノ談話, 782, 198頁脚註参照。

(8) 何トナレバモシ $\mathcal{X}'_0$ (キ $\mathcal{X}_0$) が $\|\mathcal{X}'_0\| = 1$, $f_i(\mathcal{X}'_0) = \mathbb{X}(f_i)$,

$i = 1, 2, \dots$ ヲ満足スレバ $\left\|\frac{\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}'_0}{2}\right\| < 1$ ナリ且ツ

$$f_i\left(\frac{\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}'_0}{2}\right) = \mathbb{X}(f_i), \quad i = 1, 2, \dots \text{トナリ。}$$

$$1 - \frac{1}{i} < \mathbb{X}(f_i) = f_i\left(\frac{\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}'_0}{2}\right) \leq \|f_i\| \cdot \left\|\frac{\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}'_0}{2}\right\| = \left\|\frac{\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}'_0}{2}\right\|,$$

デアレカラ $\left\|\frac{\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}'_0}{2}\right\| = 1$ トナラネバナラナシ。コレハ矛盾デアル。

次ニコノ x_0 が任意ノ $f \in \bar{E} = \mathcal{E}$ シテ $f(x_0) = \mathcal{X}(f)$ ヲ満足スルコトヲ示サウ。コレヲ示スタメニハ前ニ $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ ヲ用ヒテ点列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ヲ定義シテト全ク全様ニシテ、 $f, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots = \mathcal{E}$ シテ点列 $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots$ ヲ定義スルベヨイ。即チ $x'_n \in E$ ヲ

$$\|x'_n\| < 1 + \frac{1}{n}, \quad f(x'_n) = \mathcal{X}(f),$$

$$f_i(x'_n) = \mathcal{X}(f_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ヲ満足スルヲウニ選ベバヨイ。此ノ如クシテ定義サレタ点列 $\{x'_n\}$ が強収斂スルコトハ前ト全ク全様ニシテ証明サレル。且ツ $\lim x'_n$ ハ明カニ

$$\|x'_0\| = 1, \quad f(x'_0) = \mathcal{X}(f),$$

$$f_i(x'_0) = \mathcal{X}(f_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

ヲ満足シテキル。即チ x'_0 ハ先ニ得タ x_0 ノ性質ヲスベテ持ツテキル。カナル x_0 ハ唯一ツシカ存在シタカッタノデアアルカラ $x_0 = x'_0$ デナケレバナラナイ。即チ x_0 ハ上記ノ条件ノ外ニ $f(x_0) = \mathcal{X}(f)$ ヲ満足スル。 $f \in \bar{E}$ ハ全ク任意デアツタカラ、 x_0 ハ求ムルモノデアアル。(証明終)

(注意) J. A. Clarkson⁽⁹⁾ ハ *uniformly convex* + *Banach* 空間ニ於テ *indefinite integral* ニ關スル種々ノ結果ヲ得テキル。

(9) J. A. Clarkson: *Uniformly convex spaces*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 40(1936), no. 3. 396—414.

又 B. J. Pettis⁽¹⁰⁾ 及び I. Gelfand⁽¹¹⁾ は 夫々 *weakly complete* 及び *regular* + Banach 空間 = 於て同様
の問題ヲ論ジテキル。上記ノ定理が得ラレレバ Clarkson
ノ結果ハ大部分 Pettis, Gelfand 等ノ結果ノ *corollary*
ト考ヘラレルヲケデアル。

(10) B. J. Pettis: On integration in vector spaces, Trans.
Amer. Math. Soc. 44 (1938), 277-304.

(11) I. Gelfand: Zur Theorie abstrakter Funktionen,
C. R. URSS, 17 (1937), no. 5. 243-245.

I. Gelfand: Operatoren und abstrakte Funktionen,
C. R. URSS, 17 (1937), 245-248.