OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Banach 空間ガ regularニナルタメノ條件
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 179, p. 221-227
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74716
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

785. Banach 空間が regular ニナルタメノ條件

角谷 靜夫（阪大）

Banach 空間 E が regular デアルト云フノハ，$E=\bar{\bar{E}}$ トナルコト．即チ E ノ conjugate space $\bar{E}$ デ定義サレタ任意ノ bounded linear functional $F(f)$ ガ適當ニ $x\in E$ ヲトレバ

$$F(f)=f(x) \quad \text{for all} \quad f\in\bar{E}$$

ト云フ形ニ表ハサレルコトデアル．Banach 空間が regular ニナルタメノ條件ハ Banach, Goldstine, Pettis, Gantmakher, Šmulian, Bourbaki, Milman 等ニヨッテ論ジラレテヰル．コレラノ人々ノ結果ハ何レモ斷片的ノモノガ多ク，考ヘハ非常ニ面白クテモ，マトマッタ結果ガ出テヰナイメウデアル．次ニ

コレラノ條件ヲ、統一的ニ論ジテ見、コレニヨツテコノ方面ノ見通シガハッキリスル様デアル。主ナ考ヘハ Banach 空間ノ weak topology ヲ使フトコロニアル。[1] weak topology ヲ使ヘバ形式的ニ transfinite ナ議論ヲ避ケ得ラレル便宜ガアル。

最初ニ以下ノ議論ニ必要ナ定義ヲ與ヘル。

Banach空間 E ニ於ケル weak topology (element トシテノ weak topology). 任意ノ $x_0 \in E$ ニ對シテ、ソノ近傍 $U(x_0; f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$ ハ $|f_i(x_0) - f_i(x)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ヲ満足スル $x \in E$ 全体トシテ定義サレル。但シ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n \in \bar{E}$, $\varepsilon > 0$ デアル。

Conjugate space $\bar{E}$ ニ於ケル weak topology (functional トシテノ weak topology). 任意ノ $f_0 \in \bar{E}$ ニ對シテ、ソノ近傍 $U(f_0; x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \varepsilon)$ ハ $|f_0(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ヲ満足スル $f \in \bar{E}$ 全体トシテ定義サレル。但シ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \in E$, $\varepsilon > 0$ トスル。

$\bar{E}$ ニ於テハ又 element トシテノ weak topology ガ定義サレル。即チ任意ノ $f_0 \in \bar{E}$ ニ對シテソノ近傍 $U'(f_0; F_1 F_2, \cdots\cdots, F_n, \varepsilon)$ ヲ $|F_i(f_0) - F_i(f)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ヲ満足スル $f \in \bar{E}$ 全体トシテ定義スレバヨイ。但シ $F_1, F_2, \cdots\cdots, F_n \in \bar{\bar{E}}$ デアル。

---

(1) 前々号ノ談話参照.

コノニツノ weak topology ハ必ズシモ一致シナイ。

定理1 コノニツノ weak topology ガ一致スルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ E ガ regular ナルコトデアル。

証明　十分ナコトハ明カデアルカラ必要ナコトダケ証明スル。今コノニツノ topology ガ一致スルトシ、任意ノ $F\in\bar{\bar{E}}$ ヲトレ。$F(f)=0$ トル如キ $f\in\bar{E}$ 全体ノ集合ヲ Γ トスレバ Γ ハ $\bar{E}$ ノ部分集合デ $\bar{E}$ ノ element トシテノ weak topology デ閉デアル。ヨツテ假定ニヨリ、Γ ハ E ニ於ケル functional トシテノ weak topology デ閉デアル。

ヨツテ前々項ノ結果ヨリ Γ ハ又 E ニ於ケル functional ノ集合トシテ regularly closed デアル。故ニ任意ノ $f_0\in E$, $f_0\notin\Gamma$ ニ對シテ $f_0(x_0)=1$, $f(x_0)=0$ for any $f\in\Gamma$ トル如キ $x_0\in E$ ガ存在スル。今 f_0 トシテ $F(f_0)=1$ ナラシメル $f_0\in\bar{E}$ ヲトレバ（カカル f_0 ハ $F\equiv0$ デナケレバ必ズ存在スル）

任意ノ $f\in\bar{E}$ ニ對シテ $F(f-F(f)f_0)=0$. ヨツテ $f-F(f)f_0\in I$. 故ニ x_0 ノ定義ヨリ $f(x_0)-F(f)f_0(x_0)=0$ 然ルニ $f_0(x_0)=1$ デアツタカラ $f(x_0)=F(f)$、コレハ任意ノ $f\in\bar{E}$ ニ對シテ成立シ、且ツ F ハ任意ノ $\bar{\bar{E}}$ ノ element デアツタカラ $E=\bar{\bar{E}}$、即チ E ハ regular デアル。

定理2 Banach space E が regular デアルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ E が $\overline{\overline{E}}$ = 於テ $\overline{E}$ = 於ケル functional トシテノ weak topology = テ開デテキルコトデアル。

証明： 必要ナコトハ明カ。十分ナコトノ証明ヲニツ述ベル。

1° E ハ $\overline{\overline{E}}$ ノ linear subspace デアルカラ weak topology デ開デテキレバ又 regularly closed デアル。（前々号ノ結果ヨリ）ヨッテモシ $F \in \overline{\overline{E}}$ ガ E = 属シナケレバ $F(f_0)=1$, $f_0(x)=0$ for any $x \in E$ トナル。コレハ明カニ矛盾デアル。(2)

2° Idelly ノ定理(3) ニヨリ任意ニ $F \in \overline{\overline{E}}$ ヲ與ヘタトキ、任意ノ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n \in \overline{E}$ 及ビ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$F(f_i) = f_i(x), \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n;$$

$$\|x\| < \|F\| + \varepsilon$$

ナル如キ $x \in E$ ガ存在スル。コレハ F ノ如何ナル weak neighbourhood ニモ E ノ点ガ存在スルコトヲ示ス。ヨッテ若シ E ガ $\overline{\overline{E}}$ = テ weak topology = テ開デテオレバ $F \in E$. 即チ $\overline{\overline{E}} = E$ トテラネバナラナイ。

---

(2) 即チ E ハ $\overline{E}$ ニ於ケル bounded linear functional ノ集合トシテ total デアッタノデアル。コノ証明ハ Banach: Theorie des Operations linéaries, 117 頁 remark = ヨル。

(3) 前号ノ談話参照。

Goldstine ノ結果[4]ハコノ 2° ト殆ンド同ジデアル。Goldstine ハ E が regular ニナルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ E が S-weakly complete ナルコトデアルコトヲ証明シタ。(S-weakly completeness ニ関シテハ私ノ位相数學第一巻第一号ノ寄書ヲ参照) Goldstine ノ S-weakly completeness ハ結局 weakly closed ト同ジコトデアル。weak topology ヲ用ヒル方ガウント分リ易クナル様デアル。シカモ Goldstine ハ Helly ノ定理ヲ使ハナカッタノデ証明ガ非常ニ面倒ニナッテヰル。Helly ノ定理ヲ使ヘバ殆ンド問カナコトトナッテシマフノデアル。シカシ Goldstine ガソノ証明ノ途中ニ用ヒタ考ヘ方ハナカナカ面白イ。[5]

Bourbaki[6] モ同様ナ結果ヲ述ベテヰル。Bourbaki ハ weak topology ヲ使ッテヰルガ(H. Cartan ヤ A. Weil ノ所謂 filtre ノ形デ). compact (實ハ

---

(4) Goldstine: Weakly complete Banach spaces, Duke Math. J. 4. (1938), 125-131.

(5) Goldstine ハ $F \in \bar{E}$ ト任意ニ $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \bar{E}$, $\varepsilon > 0$ ヲ與ヘタトキ $|F(f_i) - f_i(x)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\|x\| \leqq \|F\|$ ナル如キ $x \in E$ ガ存在スルコトヲ証明シテヰル。Helly ノ定理トノ違ヒニ注意!

(6) Bourbaki: Sur les espaces de Banach, C. R. Paris, 206 (1938), Nr. 23.

bicompact）ト云フコトニ重点ヲオイテキルラシイ。(7)
実際 $\overline{E}$ ハ $\overline{E}$ ニ於ケルアラユル linear functional ノ集合デアルカラ weak topology デハ locally bicompact ニナル。（Tychonoff ト同ジ考ヘデ）。ヨッテ $\overline{E}$ ニ於テ開ヂテオル E ハ又 locally bicompact ニナルノデアル。

コノ bicompactness ヲ使フト又イロイロ面白イコトガ出ル様デアル。Milman(8) ノ方法モ weak topology トイフコトハ explicit ニ云ッテナイガ、結局コノ bicompactness ヲウマク使フノデアル。

定理3(9) Banach space E ガ separable デ且ツ locally weakly compact ナラバ E ハ regular デアル。

証明：$\overline{E}$ ニテ weakly dense ナ集合ヲ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n, \cdots\cdots$ トセヨ。$F \in \overline{E}$ ガ任意ニ與ヘラレタトキ Idelly ノ定理ニヨリ

$$F(f_i) = f_i(x_n),\ i = 1, 2, \cdots\cdots, n;\quad \|x_n\| < \|F\| + \frac{1}{n}$$

---

(7) 詳シイ証明ガナイノデワカラナイガ。

(8) Milman: On some criteria for the regularity of spaces of type (B). C.R. URSS. 20 (1938), No. 4. 243—246.

(9) S. Banach: 189頁 Banach ノ証明ハ大ヘン面倒デアル。シカモ transfinitely. closed ト云フ考ヘヲ使ッテキル。

ナル如キ $x_n \in E$ が存在スル。E ハ locally weakly compact ナル故 $\{x_n\}$ ノ部分列 $\{x_{n_\nu}\}$ が存在シテ $x_{n_\nu} \to x_0 \in E$ (weakly) トナル。コノ x_0 ハ明カニ

$$F(f_i) = f_i(x_0), \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$$

ヲ満足スル。次ニ

$$F(f) = f(x_0)$$

ガ任意ノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ成立スルコトヲ証明シヨウ。

コノタメニハ任意ノ $f_0 \in \overline{E}$ ヲ取リ $\{x_n\}$ ノ代リニ $\{x'_n\}$ ヲ

$$F(f_i) = f_i(x'_n), \quad i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n;$$

$$\|x'_n\| < \|F\| + \frac{1}{n}$$

ニヨリ定メル。($i=0$ ヲ含メテ future コトニ注意) コノ $\{x'_n\}$ カラ部分列 $\{x'_{n_\nu}\}$ ヲエラビ $x'_{n_\nu} \to x'_0 \in E$ (weakly) ナラシメルト

$$F(f_i) = f_i(x'_0), \quad i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$$

トナル。ヨッテ又

$$f_i(x'_0) = f_i(x_0), \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$$

然ルニ $\{f_i\}$ ハ $\overline{E}$ ニテ weakly dense デアッテカラ $x_0 = x'_0$ デナケレバナラナイ。コレヨリ $F(f) = f(x_0)$ ガ任意ノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ成立スルコトヲ知ル。