OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Hopfsche Gruppe ト連續変換
Author(s)	坂田, 良次
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 179, p. 228-238
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74717
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

786. Hopfsche Gruppe ト連續変換

坂田　良次（阪大）

Polyeder ノ Betti 群ト Sphäre ヘノ連続変換トハ Abbildungsklasse ノ群特＝ Hopfsche Gruppe ニヨッテ密接ニ結バレテヰル。コノ群ハムシロ obere Bettische Gruppe ノ連続変換ニヨル表現ト見做サレル。 Obere Bettische Gruppe ト untere Bettische Gruppe ノ関係ハ既ニ Kolmogoroff ニヨッテ詳シク研究サレテヰル。[1] §1 デハ連続変換ニ oberer Zyklus ヲ對應サセテ Hopfsche Gruppe ガ簡單ニツクラレルコトヲ述ベル。§2 ニ於テハ kompaktum ノ Sphäre ヘノ wesentlich ナ連続変換ニツイテ述ベル。Polyeder ノ場合ト同様ニ有限次元ノ kompaktum ニ對シテ次ノ結果ガ得ラレル有限次元ノ Kompaktum ノ Sphäre ヘノ Abbildung ガ wesentlich ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ konvergenter Zyklus $Z^n \neq 0$ ガ存在シテ Z ガ wesentlich ニ abbilden サレルコトデアル。

§1. Hopfsche Gruppe[2] P_i ヲ mod 1 デ

---

1) A. Kolmogoroff: Über die Dualität im Aufbare der kombinatorischen Topologie. Ruceuil Math. T. 1(43).

2) 次頁ヘ

reduzieren オレメ実数ノ加法群，Of ヲ整数全体ノ加法群トスル。$P^n = \overline{K}^n$ ヲn次元 Polyeder トシ，$K^\nu \subset K^n$ ハ K^n ノ高々ν次元単体全体カラツクラレル K^n 部分複体トスル。S^n ヲn次元 Sphäre トシ連続変換 $\overline{K}^n \xrightarrow{f} S^n$ ト homotop ナ f' デ $\overline{K}^{n-1}$ ヲ S^n ノ Nordpol ヘウツス変換ガアルカラコレヲ speziell デアルトイフコトニシテ $\overline{K}^n \longrightarrow S^n$ ノ連続変換ノ中 speziell ナモノノミヲ考ヘル。K^n ノn次元 Komplex ハ Koeffizientenbereich ノ値ヲトル Funktional $f^n(T^n)$ デアラハサレル。Of ニ関スル oberer Komplex ヲ $f^n(T^n)$ トシ，P_1 ニ関スル unterer Komplex ヲ $f_n(T^n)$ トスル。f^n ガ與ヘラレタトキ之レニ對シテ各単体 T^n ニ對シテ T^n ハ Nordpol ヘウツシテ Grad $f^n(T^n)$ ヲモツ連続変換 f ヲツクルコトガ出来ル、K^n ハn次元ダカ

---

2) H. Freudenthal: Hopfsche Gruppe, Comp. Math. 2 (1937)
コンデ用ヒル Formulierung ハ Pontrjagin ノモノニ Kolmogoroff ノ結果ヲ直接使フコトガ出来ルノデ便利デアルガ本質的ニハ Lefschetz ノモノト同ジデアル。
L. Pontrjagin: Classification des transformations d'un complexe n+1-dimensionnel dans une sphère n-dimensionnelle, C.R., 206 (1938)
S. Lefschetz: Sur les transformations des complexes en sphères, Fund. Math. 27(1936) 及ビ31(1938)

ヲ勿論 f^n ハ oberen Zyklus デアル。

Lemma f^n, g^n ヲ二ツノ oberer Zyklus トスレバ f^n ト g^n ガ homolog ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ上ノヤウニシテツクッタ連続変換 f 及ビ g ガ homotop デアルコトデアル。

充分ナコト. $f^n \sim g^n$ トラバ $n-1$ 次元 oberer Komplex f^{n-1} ガアッテ $g_0 f^{n-1} = f^n - g^n$ [3] 即チ

$$g_0 f^{n-1}(T^n) = \sum_{T^n \to T_j^{n-1}} f^{n-1}(T_j^{n-1}) \qquad (*)$$

$\overline{K}^n$ ト $\langle 0, 1\rangle$ ノ topologisches Produkt $\overline{K}^n \times \langle 0, 1\rangle$ ヲ考ヘテ各細胞 $T^n \times \langle 0, 1\rangle$ ノ Rand ニ次ノヤウナ對應ヲ與ヘル。

$$T^n \times (0) \quad \to \quad f^n(T^n)$$

$$T_j^{n-1} \times \langle 0, 1\rangle \to -f^{n-1}(T_j^{n-1})$$

$$T^n \times (1) \quad \to \quad g^n(T^n)$$

コノ對應ニヨッテ grad ヲ與ヘテ連続変換ヲツクレバ (*) カラワカルヤウニ $T^n \times \langle 0, 1\rangle$ ノ Rand デ unwesentlich トナルカラ $T^n \times \langle 0, 1\rangle$ 全体ヘ。従ッテ $\overline{K}^n \times \langle 0, 1\rangle$ 全体ヘ擴張デキル。シカモ $\overline{K}^n \times (0)$ 及ビ $\overline{K}^n \times (1)$ デハソレゾレ f 及ビ g ト一致スルカラ f ト g ハ homotop デアル。

必要ナコト f ト g ガ homotop ナラバ n 次元

3) g_0 ハ oberer Randoperator

unterer Zyklus ノ P_1 ヘノ同ジ Homomorphismus ヲ與ヘルカラ $f^n \sim g^n$ [4]

Lemma カラ直チニワカルヤウニ obere Bettische Gruppe $B_0^n(K^n)$ = isomorph ナ変換類ノ群ガデキル．コレガ Idopfsche Gruppe デアル。P_1 ニ関スル untere Bettische Gruppe $B_u^n(K^n)$ ト $B_0^n(K^n)$ ガ mod 1 デ Charakterengruppe デアルコトカラ

(i) Idopfsche Gruppe ト $B_u^n(K^n)$ ハ mod 1 デ丁ニ charakterengruppe ヲナス。

一般ニγ次元 Betti群 $B_u^\gamma(K^n)$ ニ對シテモ同ジヤウナ結果ガ得ラレル。コノ場合ニハ K^n 全体ノ変換 $\bar{K}^n \to S^\gamma$ ヲ考ヘナイデ $\bar{K}^\gamma(C\bar{K}^n)$ ノ変換 $\bar{K}^\gamma \to S^\gamma$ ヲ考ヘル。ソノ中デ K^n ノスベテノ $\gamma+1$ 次元單体ノ Rand デハ unwesentlich ナ変換ヲ正規変換トイフコトニスル。コレハ Homotopie ニヨツテカハラナイカラ正規変換類ガ考ヘラレル。コノ正規変換類ノミデ前ト同様ニ群ヲ定義スル。

正規変換類ノ中カラ speziell ナ変換ヲトツテ oberer Komplex ヲ對應サセルトキ oberer Zyklus ニナルコトヲ証明スレバ充分デアル。

一般ニ untere Zyklus $h^{\gamma+1}$ トノ間ニ次ノ関係ガ成立スル。

---

4) 脚註1)ノ論文参照。

$$f^r \times g_u h^{r+1} = g_o f^r \times h^{r+1}$$ 5)

但シ g_o, g_u ハソレゾレ oberer, unterer Rand-operator. f^r ヲ正規変換（spezielt）トスレバ定義ニヨッテ右辺ハ 0. 換言スレバスベテノ $r+1$ 次元 unterer Zyklus ニ對シテ.

$$g_o f^r \times h^{r+1} = 0$$

$$\therefore \quad g_o f^r = 0$$

従ッテ f^r ハ oberer Zyklus デアル. コレニヨッテ $\overline{K}^r \longrightarrow S^r$ ノ正規変換類ノツリル群 $\mathfrak{f}^r(K^n)$ ハ r 次元 obere Bettische Gruppe $B_o^r(K^n)$ ト isomorph デアルコトガワカル。従ッテ (1) ノ擴張トシテ

(2) スベテノ $r \geqq 1$ ニ對シテ $B_u^r(K^n)$ ト $\mathfrak{f}^r(K^n)$ ハ互ニ mod 1 デ Charakterengruppe デアル。6)

ガ得ラレル。

(1) ト特ニ次ノヨク知ラレタ結果ガ得ラレル。二ツノ連続変換 $f, g : \overline{K}^n \longrightarrow S^r$ ガ homotop ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ mod 1 ノ n 次元 Zyklus ガ同ジ Grad (mod 1) デアツサレルコトデアル。コレハ直接ニハ

---

5) 脚註1)ノ論文參照.

6) H. Hopf: Eine Charakterisierung der Bettischen Gruppen von Polyedern durch stetige Abbildungen, Comp. Math. 5 (1938)

又ハ位相數學第一卷第二分冊論文紹介參照.

erweiterungssatz = übertragen シテ証明デキル（Hopf ノ方法）。S^1 ノトキハ S^p ガ S^1 ヘ wesentlich = abbilden デキナイコトト K^n ノ0次元 Torsion ガナイコトヲツカヘベ Hopf ノ方法デニツノ連続変換 $f, g : \overline{K^n} \longrightarrow S^1$ ガ homotop ナルタメノ必要且ツ充分十條件ハ $\mathfrak{o}_f$ ニ関スル1次元 Zyklus ガ同ジ grad デウッサレルコトデアルコトガワカル。[7]

(2) ニ於テ $r=1$ ノ場合ヲトレバ $\overline{K'} \subset \overline{K^n}$ ノ S^1 ヘノ正規連続変換ハ $\overline{K^n}$ マデ erweitern デキルカラ $\overline{K^n} \to S^1$ ヲ考ヘレバヨイコトニナル。又上ノ注意ニヨッテ $\overline{K'} \to S^1$ ノ同ジ正規変換ト Erweiterung トシテ得ラレル変換ハ homotop ダカラ又 $\overline{K^n} \to S^1$ ノ同ジ変換類ニ属スル。従ッテ $K^n \to S^1$ ノ変換類ノ群ガ定義デキルコトニナル。K^n ハ0次元ノ Torsion ガナイカラ mod 1 ノ Betti 群ノカハリニ $\mathfrak{o}_f$ ニ関スル Betti 群 $B'_{\mathfrak{o}_f}(K^n)$ ヲトレバヨイ。ソシテ ganzzahligen character ヲ考ヘレバ

(3) $\overline{K^n} \to S^1$ ノ変換類ノ群ハ $B'_{\mathfrak{o}_f}(K^n)$ ト isomorph デアル。[8]

---

7) 詳シクハ Alexandroff-Hopf: Topologie I. Kapitel XIII ヲ見ラレタイ。

8) N. Bruschlinsky: Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3. Math. Ann. 109. (1934)

(1) 及ビ (3) デハ $\overline{K^n}$ 全体ノ S ヘノ連続変換ヲ考ヘルカラ容易 *Kompaktum* ニマデ擴張スルコトガデキル。[9]

F ヲ n 次元 *Kompaktum* トシ F ガ n 次元 *Polyeder* N_k ノ R_n-*adisch* + *Folge* デ展開サレテイルモノトスル:

$$N_1 \leftarrow N_2 \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow N_k \leftarrow \cdots\cdots ; \quad \pi_k^l N_l \subset N_k$$

コレニヨッテ *Betti* 群 $B(F)$ ハ $B(N_k)$[10] ニヨッテ G_n-*adisch* ニ展開サレル:

$$B(N_1) \leftarrow B(N_2) \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow B(N_k) \leftarrow \cdots\cdots ;$$
$$\pi_k^l B(N_l) \subset B(N_k)$$

従ッテ $F \to S$ ノ変換類ノ群ハ $B(N_k)$ ノ *Charakterengruppe* デアル $N_k \to S$ ノ変換類ノ群 $\mathfrak{F}(N_k)$[10] ニヨッテ G_n-*al* ニ展開サレル:

$$\mathfrak{F}(N_1) \to \mathfrak{F}(N_2) \to \cdots\cdots \to \mathfrak{F}(N_k) \to \cdots\cdots ;$$
$$\mathfrak{F}(N_l)\pi_k^l \subset \mathfrak{F}(N_k)$$

コンデ $N_k \xrightarrow{f_k} S$ ト $z_l \in B(N_l)$ ニ対シテ

$$f_k(\pi_k^l z_l) = (f_k \pi_k^l) z_l$$

ガ成立スルカラ *Limesgruppe* ハ又ニ = *Charakterengruppe* デアル。

---

9) S, S' 又ハ S^n ノイヅレカノ意味:

10) $B(N_k)$ ハ $B'_{ol}(N_k)$ 又ハ $B^n_{P_i}(N_k)$, $\mathfrak{F}(N_k)$ ニ $N_k \to S^1$ 又ハ $N_k \to S^n$ ノ変換類ノ群ノ意味.

(1') Hopfsche Gruppe ト $B^n_{P_1}(F^n)$ ハ mod 1 デ互= Charakterengruppe デアル。[11]

(3') $F^n \to S^1$ ノ変換類ノ群ハ $B'_{0f}(F^n)$ ト isomorph デアル。[12]

§2. Kompaktum ノ wesentliche Abbildungen.

コノ§デハ Koeffizientenbereich ハ P_1 ノミヲ考ヘル。F ヲ Kompaktum, S^r ヲ r 次元 Sphäre トスル。

Satz F ハ有限次元ノ Kompaktum トスル。F ノ Sphäre (任意次元ノ) ヘノ Abbildung ガ wesentlich ナルタメノ必要且充分ナ条件ハ konvergenter Zyklus $Z(\neq 0)$ ガアッテコレガ wesentlich = abbilden サレルコトデアル。

証明: 充分ナコトハ明ラカダカラ必要ナコトヲ証明スレバ充分デアル。

F ノ Projektionsspektum ヲ

$$N_1 \leftarrow N_2 \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow N_k \leftarrow \cdots\cdots ; \quad N_k = \pi_k^{k+1}(N_k)$$

N_k ノ頂点ハスベテ F ノ上ニアルモノトスル。F カラ S^r ヘノ Abbildung f ガ wesentlich トスル。f カラ induzieren サレル $N_k \xrightarrow{f_k} S^r$ ガ得ラレ, $F \xrightarrow{\pi_k} N_k$ トッミケテ $F \xrightarrow{f_k\pi_k} S^r$ ヲ考ヘレバ k ヲ充分大キクトレバ

---

11) H. Freudenthal: Bettische Gruppe mod 1 und Hopfsche Gruppe, Comp. Math. 4 (1937)

12) 脚註8)参照。

f_k 元 k ハ f ト homotop ニナルカラ f が wesentlich ナラバ f_k モ wesentlich デアル。スベテノ k ニ對シテ f_k ハ wesentlich ト考ヘテオク。一般ニ Polyeder P ノ Sphäre ヘノ wesentlich ナ変換 f ガアレバ $Z \neq 0$ in P ガ存在シテコノ Zyklus Z ガ f ニヨッテ wesentlich = abbilden サレル。[13]

從ッテ，スベテノ $N_k \xrightarrow{f_k} S^r$ ハ wesentlich ダカラスベテノ k ニ對シテ $Z_k^{S_k} \neq 0$ in N_k ガアッテ f_k ニヨッテ wesentlich = abbilden サレル．コノヤウニシテ Zyklus ノ列

$$Z_1^{S_1}, Z_2^{S_2}, \cdots\cdots, Z_k^{S_k}, \cdots\cdots$$

ヲツクル。F ハ有限次元ダカラコノ中ニハ無限ニデテクル次元数 S ガアル。[14] S 次元ノ Zyklus ダケニ注目シテ添字ヲツケカヘ S ハ省略シテ

$$Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_k, \cdots\cdots$$

トカク。コノ中カラ部分列 $Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}, \cdots\cdots, Z_k^{(1)}, \cdots\cdots$ ヲ元 η_1, $Z_k^{(1)}$[15] ガ N_1 ノ algebraischer Komplex Z_1' ヘ converge スルヤウニトル。

---

13) A. Komatu und R. Sakata: über ein Problem von Herrn Borsuk (Jap. Journ.)

14) 有限次元ノ假定ハコヽダケニ用ヒル。

15) η_1 又ハ η_i ハコヽデハ $Z_k^{(1)}$ 又ハ $Z_k^{(i)}$ ノソレゾレ Z_1, Z_i ヘノ Abbildung ノ意味。

更ニコノ中カヨ部分列 $z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \cdots\cdots, z_k^{(2)}, \cdots\cdots$ ヲ Z_2 ヨリ先キカラ選ンデ $\pi_2 z_k^{(2)}$ が N_2 ノ z_2' へ converge スルヤウニトッテ一般ニ $z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \cdots\cdots, z_k^{(i)}, \cdots\cdots$ ノ中カラ Z_{i+1} ヨリ先キカラ部分列 $z_1^{(i+1)}, z_2^{(i+1)}, \cdots\cdots, z_k^{(i+1)}, \cdots\cdots$ ヲ適当ニトッテ $\pi_{i+1} z_k^{(i+1)}$ が N_{i+1} ノ z_{i+1}' へ converge スルヤウニスル。コウシテデキタ wahrer Zyklus $Z' = (z_1', z_2', \cdots\cdots, z_k', \cdots\cdots)$ ハ明ラカニ projektiver Zyklus デアル。[16] z_1' が f_1 ニヨッテ wesentlich = abbilden サレルコトヲイヘバヨイ。$f_1 \pi_1 z_k^{(1)}$ ニ於テ $f_1 \pi_1$ ハスベテノ k ニ對シテ f ト homotop ト考ヘテヨイカラ wesentlich デアリ換言スレバスベテノ k ニ對シテ $\pi_1 z_k^{(1)}$ ハ f_1 ニヨッテ，從ッテ f ニヨッテ wesentlich = abbilden サレル。從ッテ z_1' モ f ニヨッテ wesentlich = abbilden サレルカラ Z' ハ f ニヨッテ wesentlich = abbilden サレル。

コノ特別ノ場合トシテ

<u>スベテノ Betti 群ガ有限次元 Kompaktum ハ如何ナル Sphare ヘモ wesentlich = abbilden 出來ナイ。</u>

コトガワカル。コレハ有限次元ノ假定ガナクテモ成立スル

---

16) P. Alexandroff: Zur Homologietheorie der Kompaktum, Comp. Math. 4. (1937)

ヤウニ思ハレル.[17] コレラノ問題ト関聯シテ

〃 Polyeder P, Sphäre, Abbildung ニ於テ P, Zyklus Z が wesentlich = abbilden サレルナラバ Z ≠ 0 in P デアル〃

ハ成立スルデセウカ。

---

17) K. Borsuk: Sur les transformations des polyèdres acycliques en surfaces sphériques, Fund. Math. 28, (1937), p. 210.