



Title	Eigenwertproblem ノー証明
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 180, p. 239-252
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74718
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

787. Eigenwertproblem / 証明

中野 秀五郎

一般 complex Euclidean space $\mathcal{L}$ 上に於ける normal operator / Eigenwertproblem は J. v. Neumann / 方法 = ヨレバ先づ bounded Hermitian operator / Eigenwertproblem より始まり、次 = bounded normal operator を証明し、次 = unbounded Hermitian operator を Unitary operator / 場合 = 変へて証明し、次は unbounded normal operator / Eigenwertproblem を取扱ふ。

此處で直接 unbounded normal operator / Eigenwertproblem を取扱ふ証明を述べル。

§1. 今 Gaussian plane 上に点集合 / additive class $\{X\}$ が Borel 集合を含んでゐる。此の class / 任意の集合 $X =$ 對し、complex Euclidean space $\mathcal{L}$ / projective operator $E(X)$ が對應し、且つ次の條件を満足するものとする。

1° $\{X\}$ / 任意の二集合 $X, Y =$ 對し $E(X), E(Y)$ は commutative.

2°. $\{X\}$ / $X \subset Y$ なる任意の二集合 $X, Y =$ 對し $E(X) \leq E(Y)$.

3° $\{X\}$ / 任意ノ集合列 $X_1, X_2, \dots =$ 對シ,
 X_i, X_j ($i \neq j$) が共有点ナキトキハ

$$E(X_1 + X_2 + \dots) = E(X_1) + E(X_2) + \dots$$

以上ノ如キ *projective operator* $E(X)$ が定義セラレテキルトキ此ノ $E(X)$ ヲ *measure operator* ト呼ブコトトス。又 X が *Gaussian* 全平面ナルトキノ $E(X)$ ヲ $\mathbb{E} = E$ ト記ス。 E が *Einheit* I ナルトキ $E(X)$ ヲ *hyper maximal* ト名ヅケル。

additive class $\{X\} =$ 對シ $E(X)$ が定義セラレテキルトキハ、*Gaussian plane* 上ノ任意ノ円 $\overline{U}$ (閉集合トス) ハ又 $\{X\} =$ 属スルヲ以テ、任意ノ二円 $\overline{U}, \overline{V} =$ 對シ

1° $E(\overline{U}), E(\overline{V})$ ハ *commutative*,

2° $\overline{U} \subset \overline{V}$ ナルトキハ $E(\overline{U}) \leq E(\overline{V})$

3° $\overline{U}, \overline{V}$ が共有点ナキトキハ $E(\overline{U}) E(\overline{V}) = 0$

ナル條件ヲ満足ス。逆ニコノ條件スルガ如キ $E(\overline{U})$ が任意ノ円ニ對シテ與ヘラレテキレバ、コレヨリ *additive*

class $\{X\}$ ト *measure operator* $E(X)$ が定義デキル。如何トナレバ、任意ノ *Borel* 集合 $X =$ 對シテハ X ヲ高々可附番個ノ円 $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \dots =$ 覆ヒ、 $E(\overline{U}_1), E(\overline{U}_2), \dots$ ナル *projective operator* が *space* $\mathcal{L} =$ 表ハス *closed linear manifold* ヲ夫々 $\mathcal{M}(\overline{U}_1), \mathcal{M}(\overline{U}_2), \dots$ トス。即チ $\mathcal{M}(\overline{U}_1)$ トハ $E(\overline{U}_1) f = f$ ナルガ如キ $\mathcal{L}$ ノ *element* f ノ集合

$\mathcal{M}(\bar{U}_1) + \mathcal{M}(\bar{U}_2) + \dots$ を含む最小 closed linear manifold を $\mathcal{M}(\bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \dots)$ とす。此
 の如き族に $\mathcal{M}$ のスベテニ對し、 $\mathcal{M}(\bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \dots)$ の共
 通集合 $\mathcal{M}(X)$ の明か = closed linear manifold
 とす。 $\mathcal{M}(X)$ の projective operator $E(X)$
 を X = 對應せしむ。又 Borel 集合 X = して $E(X) = 0$
 ナル如き X = 含マル任意ノ集合 Y = 對してハ $E(Y) = 0$
 とし、此ノ如き Y ト Borel 集合トヨリナル最小 addi-
 tive class $\{X\}$ = せハ。 $E(X)$ が求ムルモノナル
 コトが証明サレル。或ハ又任意ノ集合 X = 對して、以
 上ノ如ク $E(X)$ を定義シ、此レヲ Caratheodory,
 outer measure ト同様ニ考ヘテ measurable
 class $\{X\}$ を定義スルコトモ得。何レモ実変數函數論
 ノ場合ト同様ナリ。

§2. Space L の linear manifold $\mathcal{M}$ 、
 任意 element f, g = 對シ、linear operator
 Hf, H^*f が定義セラレ、然カモ

$$(Hf, g) = (f, H^*g)$$

又、 Hf が $\mathcal{M}$ = 属スルトキハ H^*f モ亦 $\mathcal{M}$ = 属シ

$$H^*Hf = HH^*f$$

同様ニ H^*f が $\mathcal{M}$ = 属セバ Hf モ $\mathcal{M}$ = 属シテ

$$HH^*f = H^*Hf.$$

又、 $f_n \rightarrow f$ ナル $\mathcal{M}$ の element $f_1, f_2, \dots$ =
 對シ、 Hf_n, H^*f_n ノ何レカ一方が收斂ナレバ f ハ $\mathcal{M}$

= 属スルモノトス。此ノ如キ Hf ヲ $M =$ テ normal
+ operator ト定義ス。

H ヲ M (M ハ $L =$ テ überall dicht トス) =
テ定義セラレタル normal operator トス。又 γ
complex number γ ヲ正数トシ、 M ノ element
 $f =$ シテ $H^{*k} H^k f$ ($k, k = 1, 2, \dots$) が $M =$ 属
シ且ツ

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \left| \frac{(H - \gamma)^k}{\gamma^k} f \right| < \infty$$

ナルガ如キ element f ノ集合ハ closed linear
manifold ヲナス。如何トナレバ

$$\bar{H} = \frac{H - \gamma}{\gamma}$$

ト置ケバ、 $\bar{H}$ モ亦 $M =$ テ定義セラレタル normal opera-
tor = シテ

$$\overline{\lim} |\bar{H}^k f| < \infty \quad \overline{\lim} |\bar{H}^k g| < \infty$$

ナルトキハ

$$\overline{\lim} |\bar{H}^k (f + g)| \leq \overline{\lim} |\bar{H}^k f| + \overline{\lim} |\bar{H}^k g| < \infty$$

又

$$\begin{aligned} |\bar{H}^k f|^2 &= (\bar{H}^k f, \bar{H}^k f) = (\bar{H}^{*k} \bar{H}^k f, \bar{H}^{k-1} f) \\ &\leq |\bar{H}^{*k} \bar{H}^k f| \cdot |\bar{H}^{k-1} f| = |\bar{H}^{k+1} f| \cdot |\bar{H}^{k-1} f| \\ (\because |\bar{H}^{*k} f|^2 &= (\bar{H}^{*k} f, \bar{H}^{*k} f) = (\bar{H} f, \bar{H} f) \\ &= |H f|^2) \end{aligned}$$

故 = $|\bar{H}^k f| > 0$ ($k=1, 2, \dots$) + ルカ $|\bar{H}^k f| = 0$
 ($k=1, 2, \dots$) + リ。 $|\bar{H}^k f| > 0$ トスレバ

$$\frac{|\bar{H}^k f|}{|\bar{H}^{k+1} f|} \leq \frac{|\bar{H}^{k+1} f|}{|\bar{H}^k f|}$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{H}^k f| < \infty$ ナルヲ以テ

$$\frac{|\bar{H}^{k+1} f|}{|\bar{H}^k f|} \leq 1 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

ナラザルベカラズ。故 =

$$|\bar{H}^k f| \leq |f| \quad (k=1, 2, \dots)$$

ナリ。又此ノ如キ f = 對シテハ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{H}^k f| < \infty$$

ナルユトハ明カナリ。故 = 此ノ如キ f ノ集合ハ

$$|\bar{H}^k f| \leq |f|$$

+ ル f ノ集合即チ *closed linear manifold*, $k=1, 2, \dots$ = 對スル *durchschnitt* ナルヲ以テ又 *closed linear manifold* ナリ。此ノ *closed linear manifold* ノ *projective Operator* γ *Gaussian plane* 上ニ中心トシ、 r ノ半径トスル円 $\bar{U}$ (閉集合) = 對應セシメテ $E(\bar{U})$ トス。然ルトキハ T *commutative* ノ任意ノ *bounded linear operator* T ハ $E(\bar{U})$ ト *commutative* トナル。如何トナレバ $|Tf| \leq \gamma |f|$, $|\bar{H}^k T f| = |T \bar{H}^k f| \leq \gamma |\bar{H}^k f|$ ナルヲ以テ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{H}^k f| < \infty \quad + \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{H}^k T f| < \infty$$

ナリ。即ち $TE(\overline{U})f = E(\overline{U})Tf$ 。

又 H^* は commutative + bounded linear operator $T \in E(\overline{U})$ は commutative とナル。如何とナレバ

$$\begin{aligned} \overline{\lim} |H^k f| < \infty \text{ ナル } f \text{ の集合} \\ = \overline{\lim} |H^{*k} f| < \infty \text{ ナル } f \text{ の集合} \end{aligned}$$

ナルヲ以テナリ。故に $T = H^*$ 、或は $T = H$ と置クコトニヨリ $H, H^* \in E(\overline{U})$ は commutative ナリ。(此、証明へ B. A. Lenczel and M. H. Stone. *Annals of mathematics* 37. No. 4, 858頁ニヨル)

故に Gaussian plane 上ノ任意ノ二円 $\overline{U}, \overline{V}$ 對シテハ $E(\overline{U}) \subset E(\overline{V})$ とハ commutative ナリ。又円 $\overline{U}$ が $\overline{V}$ に含まレタリトスレバ $E(\overline{U}) \subseteq E(\overline{V})$ ナリ。如何とナレバ、 $\overline{U}, \overline{V}$ ノ中心及ビ半径ヲ夫々 z_1, z_2, r_1, r_2 トスレバ $E(\overline{U})f = f$ ナル f ハ closed linear manifold $\mathcal{M}(\overline{U})$ ナリシ、 $\mathcal{M}(\overline{U}) = \mathcal{M}(\overline{V})$ ナル

$$\left| \frac{H - z_1}{r_1} f \right| \leq |f|$$

トナル。 $\mathcal{M}(\overline{U}) = \mathcal{M}(\overline{V})$ ナル

$$\left| \frac{H - z_2}{r_2} f \right| \leq |f|$$

ナルコトヲ証明スレバ可ナリ。其レハ

$$\frac{H - z_2}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{H - z_1}{r_1} + \frac{z_1 - z_2}{r_2}$$

ヨリ $\mu(\overline{U}) = \tau$

$$\left| \frac{H - z_2}{r_2} f \right| \leq \frac{r_1}{r_2} |f| + \frac{|z_1 - z_2|}{r_2} |f|$$

$$\leq \frac{r_1 + |z_1 - z_2|}{r_2} |f| \leq |f|$$

ヨリ得ラル、 $(\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset)$ ヲ以テ $\frac{r_1 + |z_1 - z_2|}{r_2} \leq 1$ ナリ。

又、 $\overline{U}$ と $\overline{V}$ とが共有点ナキトキハ、 $E(\overline{U})E(\overline{V}) = 0$ ナリ。如何トスレバ $E(\overline{U})E(\overline{V}) \neq 0$ トスレバ $E(\overline{U})E(\overline{V})$ ハ *projective operator* ナリシテ、 $E(\overline{U})E(\overline{V})f = f$ ナル $f = 0$ ナリシテハ $E(\overline{U})f = f$, $E(\overline{V})f = f$ ナルヲ以テ

$$\left| \frac{H - z_1}{r_1} f \right| \leq |f|, \quad \left| \frac{H - z_2}{r_2} f \right| \leq |f|$$

トナル。然ルトキハ

$$|(z_1 - z_2)f| \leq (r_1 + r_2)|f|$$

即チ

$$|z_1 - z_2| \cdot |f| \leq (r_1 + r_2)|f|$$

$$|z_1 - z_2| \leq r_1 + r_2$$

然ルニ、 $\overline{U}$ と $\overline{V}$ とハ共有点ナキヲ以テ $|z_1 - z_2| > r_1 + r_2$ ナルコトニ矛盾ス。故ニ $E(\overline{U})E(\overline{V}) = 0$ ナリ、以上ノコトヨリ §1ニヨリ、*normal operator* H ハ *additive class* $\{X\}$ トシテ、*measure operator* $E(X)$ トヲ定メル。此ノ *measure operator* $E(X)$ が

hyper maximal + $\mathcal{N}$ + normal operator H
 は hyper maximal + リト云フコトヲス。故ニ H が
 bounded + $\mathcal{N}$ + $E(X)$ が hyper maximal +
 リトハ明カナルヲ以テ bounded normal operator
 は hyper maximal + リ。

§3. H 7 hyper maximal normal operator
 $E(X)$ 7 $\mathcal{N}$ / measure operator トス。今後 $\{X\}$ =
 属スル集合ヲ measurable ト云フコトトス。 H / 定義
 セラレタル linear manifold 7 $\mathcal{M}$ = $\mathcal{N}$ 表ハス。

bounded measurable + 集合 X が原点ヲ中心
 トシ半径 γ ナル円ノ内部ニアルトスレバ前節ニヨリ

$$|HE(X)f| \leq |E(X)f|$$

ナリ。今 X 7 n 個ノ measurable 集合 $X_1, X_2, \dots, X_n$
 ニ分解シ、 X_i ハ中心 Z_i 、半径 ε_i ナル円ニ含マル、カ如
 クスレバ

$$|(H - Z_i)E(X_i)f| \leq \varepsilon_i |E(X_i)f|$$

故ニ任意ノ $g \in \mathcal{M}$ 7

$$|((H - Z_i)E(X_i)f, g)| \leq \varepsilon_i |E(X_i)f| |g|$$

$$|(HE(X_i)f, g) - Z_i(E(X_i)f, g)| \leq \varepsilon_i |E(X_i)f| |g|$$

$$\sum_{i=1}^n E(X_i) = E(X)$$

ナルヲ以テ

$$\begin{aligned} |(HE(X)f, g) - \sum Z_i(E(X_i)f, g)| \\ \leq \sum \varepsilon_i |E(X_i)f| |g| \end{aligned}$$

$|\varepsilon_i| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots) \text{ となし得る}$

$$|(HE(x)f, g) - \sum z_i (E(x_i)f, g)| \leq \varepsilon \|f\| \|g\|$$

故に

$$(1) \quad (HE(x)f, g) = \int_x z d(E(x)f, g)$$

又

$$(E(x)f, H^*E(x)g) = \int_x z d(E(x)f, g)$$

$$(2) \quad (H^*E(x)g, f) = \int_x \bar{z} d(E(x)g, f)$$

を得る。

又 (1) より f は $\mathcal{M}$ の element となり

$$(Hf, E(x)g) = \int_x z d(E(x)f, g)$$

$x \rightarrow \Delta$ Gaussian plane となし得る、此ノ
左辺ハ常 $= (Hf, g) =$ 収斂スルヲ以テ、右辺モ同一値ニ
収斂シ

$$(Hf, g) = \int z d(E(x)f, g)$$

g ハ任意ナルヲ以テ、 $g = Hf$ ト置ケバ

$$|Hf|^2 = \int z d(E(x)f, Hf)$$

然ルニ

$$(E(x)f, Hf) = \int \bar{z} d(E(x)f, f)$$

$$d(E(x)f, Hf) = \bar{z} d(E(x)f, f)$$

故 =

$$|Hf|^2 = \int |z|^2 d(E(x)f, f)$$

或ハ

$$(3) |Hf|^2 = \int |z|^2 d|E(x)f|^2$$

故 = $\mathcal{M}$, 任意, element f = 對シ

$$(4) \int |z|^2 d|E(x)f|^2$$

が收斂ナリ。逆 = 又 (4) が收斂ナルが如キ f ハ $\mathcal{M}$ = 属ス。

如何トナレバ bounded measurable set X = 對シ常 =

$$\begin{aligned} \left| \int_X z d(E(x)f, g) \right|^2 &\leq \int_X |z|^2 d|E(x)f|^2 \cdot \int_X d|E(x)g|^2 \\ &\leq \int_X |z|^2 d|E(x)f|^2 \cdot |f|^2 \end{aligned}$$

ナレヨリ

$$\int z d(E(x)f, g)$$

が收斂ス。

$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \rightarrow \Delta$ Gaussian plane

ナラシムレバ (3) ヨリ

$$|H(E(X_n) - E(X_m))f| = \int_{X_n - X_m} |z|^2 d|E(x)f|^2$$

故ニ、 $HE(X_n)f \rightarrow \bar{f}$

ナル $\bar{f}$ が存在シ、 $E(X_n)f \rightarrow f$ ナルヲ以テ、 f ハ $\mathcal{M} = \mathcal{M}$ 属ス。

逆ニ任意、hyper maximal measure operator $E(x)$ ヲ與フルトキハ

$$\int |z|^2 d|E(x)f|^2$$

が收斂ナルカ如キ f ハ linear manifold $\mathcal{M}$ ヲナシ

$$(Hf, g) = \int z d(E(x)f, g)$$

が hyper maximal normal operator ナルコトハ在来ト同様簡單ニ証明サル。又此 H / measure operator が $E(x)$ トナルコトハ

$$\left| \left(\frac{H - z_i}{r_i} \right)^{2k} f \right|^2 = \int \left| \frac{z - z_i}{r_i} \right|^{2k} d|E(x)f|^2$$

ヨリ中心 z_i 、半径 r_i 、ノ円 $\overline{U}$ 、 H / measure operator が $E(\overline{U})$ ナルコトが証明サル。従ツテ H / measure operator ハ §2 ヨリ $E(x)$ トナル。此レニヨリ H = 對スル measure operator、unique が証明サレタ。

§4. hyper maximal normal operator H が Gaussian plane 上ノ連続曲線 $z(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) ノ共有点ヲ有サスル点集合ニ對シテハ measure operator が零ナルトキハ、§3 ヨリ

$$(Hf, g) = \int_0^1 z(t) d(E(t)f, g)$$

ヲ得ル。但シ $E(t)$ ハ $[0, t] =$ 對スル $Z(t)$ ノ集合ノ

measure operator トス。Idermitian, unitary operator ハ 共ニ此ノ場合トナル。

Idermitian operator が此ノ場合、即チ実軸以外ノ点集合 $X =$ 對シ $E(X) = 0$ ナルコトハ

$$(HE(x)f, g) = \int_X z d(E(x)f, g)$$

$$(f, HE(x)g) = \int_X \bar{z} d(E(x)f, g)$$

$$\therefore \int_X \Im z d(E(x)f, g) = 0$$

$$\therefore \int_X \Im z d|E(x)f|^2 = 0$$

故ニ 常ニ $\Im z > 0$ ナル点集合 $X =$ 對シテハ $E(X) = 0$

又 $\Im z < 0$ ナル点集合 $X =$ 對シテモ $E(X) = 0$ 。故ニ

$\Im z = 0$ ナル点ヲ含マサル点集合 $X =$ 對シテハ $E(X) = 0$

又 unitary operator $U =$ 對シテハ

$$(UE(x)f, UE(x)f) = \int_X |z|^2 d|E(x)f|^2$$

$$(E(x)f, E(x)f) = \int_X d|E(x)f|^2$$

$$\therefore \int_X (1 - |z|^2) d|E(x)f|^2 = 0$$

即チ $|z| \neq 1$ ナル点集合 $X =$ 對シテ $E(X) = 0$ トナル。

(訂正)

§1 = 於テ Gaussian plane 上ノ圓 $\overline{U}$ = 對シ projective operator $E(\overline{U})$ が對應シ $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ ノ條件ヲ満たストセシ所へ、尚次ノ條件ヲ附加スル。

4° $\overline{U}$ ノ中心ヲ変ヘズ、半径 r ヲ変ヘタトキ

$$\text{常} = \lim_{r \rightarrow r_0 + 0} E(\overline{U}_r) = E(\overline{U}_{r_0})$$

measure operator ヲ作ル場合 = ハ此ノ條件ハ不要ナルモ、此ノ條件ナキトキハ measure operator $E(X)$ が $\overline{U}$ = 對シ必ズシモ最初 $\overline{U}$ = 對應セシメラレタル projective operator = 等シクナラヌ不便ガアル。

§2 = 於ケル normal operator H = 對シテ定義セル $E(\overline{U})$ が上ノ 4° ヲ満足スルコトハ次ノ如クニシテ証明サル。即チ中心 z , 半径 r ナル円 $\overline{U}$ = 對シテ $E(\overline{U})$ ハ

$$|(H - z,)^n f| \leq r^n |f| \quad n = 1, 2, \dots$$

ナルガ如キ f ノ集合ナリ。故ニ $r > r_0$ ナル總マテ r = 對シ此ノ式ヲ満たセバ、 $r = r_0$ = 對シテ満たスコトモ明カナリ。従ツテ 4° が満足サレル。

§1 = 於テ $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ ヲ満足スルガ如ク總ベテノ円 = projective operator が對應シテアル場合其レヨリ measure operator ヲ作ル = 色々ナ方法ニテナシ得ルモ次ノ如ク考フルガ最も簡單ノ様ニ思ハル。先ヅ圓集合 = 對シ、其レニ含まレル円 = 對應スル projective operator

ノ表ハス *closed linear manifold* / 従ッ = ヨリ
 テ作ラレル *closed linear manifold* / *pro-*
jective operator テ以テ *measure operator* トシ、
 次 = G_δ 集合 = 對シテ其レヲ含ム開集合 / *measure opera-*
tor = 對スル *closed linear manifold* / 従ッ /
durchschnitt / *projective operator* テ以
 テ *measure operator* トシ 次 = G_δ ノ零集合ヲ定義
 シ其ノ零集合ト G_δ トノ和及ビ差ハ *additive class*
 $\{X\}$ テ作ルコトガ簡單ニ証明サル。従ッ *measure opera-*
tor モ定義サレル。