



Title	Eigenwertproblem ノー証明 (續)
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 180, p. 252-262
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74719
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

788. Eigenwertproblem I - 証明(續)

中野 秀五郎

§5. Normal operator H が hyper maximal とハ H の measure operator $E(X)$ が全平面ニ對シ L トナルコトデアルト定義シタガ、此ノ定義が在來ノ定義ト一致スルコトハ spectralisation が一通リニ出來ルコトカヲ明カデハアルガ、直接本論文ノ定義ヨリ出發シテ証明シテ見ル。

$E(X)$ ヲ hyper maximal measure operator トスル。コレニ對シ函数 $f(X)$ が殆連続(此ノ殆連続

ハ著者が東京物理学校校友会雑誌ニ「セミナー」ト同様ノ
考ヘナリ）ナリトハ Gaussian plane 上適當 = bounded
closed set

$$Z_1 \subset Z_2 \subset \dots$$

7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(Z_n) = I$$

ナリ如クニ取リタルトキ $f(z)$ が常ニ Z_n ニテ連続ナルト
キニ云フ。

定理. hyper maximal measure operator
 $E(X)$ = 関シ $f(z)$ が殆連続ナルトキハ

$$(1) \quad (Hf, g) = \int f(z) d(E(X)f, g)$$

ヨリ定義セラレル linear operator Hf ハ hyper
maximal normal operator = シテ其ノ definitionsbereich ハ

$$(2) \quad \int |f(z)|^2 d|E(X)f|^2$$

ガ収斂スルガ如キ f ノ集合内、又

$$(3) \quad (H^*f, g) = \int \overline{f(z)} d(E(X)f, g)$$

ナリ。

証明: (2) ガ収斂スルトキ (1) ノ積分ガ収斂スル
コトハ Schwarz ノ不等式ヨリ簡單ニ証明サレル。
然カモ

$$\left| \int f(z) d(E(x)f, g) \right| \leq \sqrt{\int |f(z)|^2 d|E(x)f|^2} \cdot |g|.$$

ヨリ Riesz / 定理 = ヨリ linear operator H が定義
 せし、 $E(x)$ と commutative せしことによる方法と
 同様 = 証明せし。又 H が normal せしこと、証明せし
 ことと同様 = 簡単 = レベ略す。残るハ H が hypermaxi-
 mal せしことなり。即チ H / measure operator
 $F(x)$ が全平面ニ對シ / せしことなり。此レハ次ノ如ク =
 シテ証明せし。

$f(z)$ ハ $\mathbb{C}_n$ ハ bounded closed トルヲ以テ
 $\mathbb{C}_n = \tau$ 帯 =

$$|f(z)| \leq M_n$$

ナル M_n が存在ス。今 H / 原点ヲ中心 M_n ヲ半径トスル円
 $\overline{U}_n$ = 對スル measure operator $F(\overline{U}_n)$ ヲ考ヘテ
 見ル =

$$\begin{aligned} |HE(\mathbb{C}_n)f|^2 &= \int_{\mathbb{C}_n} |f(z)|^2 d|E(x)f|^2 \\ &\leq M_n \int_{\mathbb{C}_n} d(E(x)f, f) = M_n |E(\mathbb{C}_n)f|^2 \end{aligned}$$

故 =

$$F(\overline{U}_n) \geq E(\mathbb{C}_n)$$

$$\text{故} = F \geq \lim F(\overline{U}_n) \geq I$$

從ツテ H ハ hyper maximal せし。

定理. 1 hyper maximal normal operator

$H \neq 0$ 7 Eigenwert = 有サビルトキハ其ノ逆 inverse operator H^{-1} ガ又 1 hyper maximal normal ナリ。

証明. H 1 measure operator $E(X) =$ 對シ

$$(H^{-1}f, g) = \int \frac{1}{\lambda} d(E(X)f, g)$$

ハ H ガ 0 ナル Eigenwert 7 有サビルトキ以テ $\frac{1}{\lambda}$ ハ $E(X)$ = 関シ殆連続ナルヲ以テ 1 hyper maximal normal operator H^{-1} ヲ決定ス。 $f = HH^{-1}f = H^{-1}Hf$ ナルコトハ在來ノ方法ト同様簡單ニ証サル。

定理. Definitionsbereich $\mathcal{M}_\varepsilon =$ 7 常 =

$$\{Hf \mid |Hf| \geq \varepsilon |f| \quad (\varepsilon > 0)\}$$

ナルガ如キ normal operator H ガ hyper maximal ナルニ必要且テ充分ナル條件ハ

$$\varphi = Hf$$

$$\psi = H^*f$$

ト置キテ得ル linear operator $\psi = \varphi$ ガ unitary ナルコトナリ。

証明. 先ツ必要ナルコトヲ証明スル。 H ガ hyper maximal ナルトハ $H^{-1} \in$ 亦然リ, $(\because |Hf| \geq \varepsilon |f|)$

$$|Hf| \geq \varepsilon |f|$$

ヨリ

$$|\varphi| \geq \varepsilon |H^{-1}\varphi|$$

即チ H^{-1} ハ bounded normal operator 故ニ其ノ

definitions.bereich は一般 Euclid 空間全体より。
 又 H^* = 對して同様 $H^{*'}$ が有界 hyper maximal
 = して其の definitions.bereich が一般 Euclid 空間
 全体、然るに $\varphi \rightarrow \psi$ と

$$|\varphi| = |Hf| = |H^*f| = |\psi|$$

= $\Rightarrow$ Längentreu. 故に $U =$ unitary より。逆
 $\psi = U\varphi$ が unitary なるに $H^* \varphi$ の definitions-
 bereich が全空間、従つて $H^* \varphi$ は bounded (此に
 elementary = 証明される) 故に $H^* \varphi$ は hyper-
 maximal 故に前定理より Hf は hyper maximal
 なり。

此定理は J. v. Neumann の idermitian
 operator = 関する Caley transformation の理論
 を含むより。如何とせば、 Hf は idermitian と
 すれば $(H+i)f$ は normal operator = して然る
 。

$$|(H+i)f|^2 = |Hf|^2 + |f|^2 \geq |f|^2$$

故に、 $(H+i)f$ が hyper maximal なる必要且
 充分な条件は

$$\varphi = (H+i)f$$

$$\psi = (H-i)f$$

より決定する linear operator $\psi = U\varphi$ が unitary
 なることは、此に即ち idermitian operator が
 hyper maximal なること、J. v. Neumann

ノ定義ナリ。

Eigenwertproblem / 一証明(訂正)

§1 = 於テ、開円 $\overline{U}$ = 對スル條件

2° $\overline{U} \subset \overline{V}$ ナルトキハ $E(\overline{U}) \subseteq E(\overline{V})$ ナルヲ如ク = 改メル。

2° 円 $\overline{U}$ ガ $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \dots, \overline{U}_n = \overline{U}$ 覆ハレルトキ $E(\overline{U})$ ノ表ハス linear closed manifold ハ $E(\overline{U}_1), \dots, E(\overline{U}_n)$ ノ各々ヲ表ハサレル linear closed manifold カラ和トシテ作テレ linear closed manifold = 含マレル。即チ

$$\begin{aligned} E(\overline{U}) \subseteq & E(\overline{U}_1) + \{E(\overline{U}_2) - E(\overline{U}_1)E(\overline{U}_2)\} \\ & + \{E(\overline{U}_3) - E(\overline{U}_1)E(\overline{U}_3) - E(\overline{U}_2)E(\overline{U}_3) \\ & - E(\overline{U}_1)E(\overline{U}_2)E(\overline{U}_3)\} \\ & + \dots \end{aligned}$$

此ノ條件ヲ改メネバ円 = 對シテノ measure operator が一般ニ拡張スルコトが必ズシモ出來ナイ。

此ノ條件ヲ改メタタメ §2 = 於テ normal operator = 關シ $E(\overline{U})$ がコノ條件ヲ満足スルコトノ証明ヲ附加セネバナラヌ。其レハ次ノ如クニシテ証明サレル。

先ヅ $\overline{U}$ が充分大ナル円 = 對シテ $E(\overline{U}) \neq 0$ ナルトキハ如何程ニテモ半径ノ小ナル円 = シテ $E(\overline{U}) \neq 0$ ナルが如キ円 $\overline{U}$ が常ニ存在スルコトヲ証明スル。

今中心 Z_0 , 半径 r_0 ノ円 $\overline{U}_0$ = 對シテ $E(\overline{U}_0) = 0$ ナ

リトス。又 $\overline{U}, \exists \overline{U}_0 \subset \overline{U}, =$ シテ $E(\overline{U}_0) \neq 0$ ナル充分大ナル円トス。然ルトキハ $E(\overline{U}_0)$, manifold 内ノミニテ考ヘテ

$$H_0 = \frac{H - Z_0}{r_0} E(\overline{U}_0)$$

ト置ケバ H_0 ハ bounded normal 即チ $|H_0 f| \leq M |f|$
 $=$ シテ常 $=$

$$|H_0^k f| \leq |f| \quad (k=1, 2, \dots)$$

ナルカ如キ element へ存在セズ。故 $=$

$$|(H_0 H^*)^k f| \leq |f| \quad (k=1, 2, \dots)$$

ナルカ如キ element $\in +\mathcal{V}$ 。然カモ $H_0 H_0^*$ ハ bounded positive definite Hermitian operator ナルヲ以テ

B. A. Lengyel and M. H. Stone (Annals. Vol 37, 859 頁) , Theorem Hb (此ノ定理ノ証明ハ elementary ナリ) $=$ ヨリ 如何ナル element. $f =$ 對シテモ

$$(H_0 H_0^* f, f) \geq (f, f)$$

ナリ。從ツテ常 $=$

$$|H_0 f| \geq |f|$$

故 $= E(\overline{U}_0) = 0$ ナルベ常 $=$

$$\left| \frac{H - Z_0}{r_0} E(\overline{U}_0) f \right| \geq |E(\overline{U}_0) f|$$

$E(\overline{U}_0)$ ノ表ハス manifold 内ノミニテ考フレバ

$$\left| \frac{H - Z_0}{r_0} f \right| \geq |f|$$

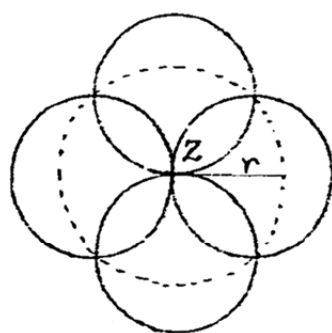
サテ半徑 r の円 $\overline{U}$ = 對シテハ其ノ位置ノ如何ニ關セ
ズ常 $E(\overline{U}) = 0$ ナリトスレバ、任意ノ点 z = 對シテ
=

$$(1) \quad \left| \frac{H - z - r}{r} f \right| \geq |f|$$

$$(2) \quad \left| \frac{H - z + r}{r} f \right| \geq |f|$$

$$(3) \quad \left| \frac{H - z - ir}{r} f \right| \geq |f|$$

$$(4) \quad \left| \frac{H - z + ir}{r} f \right| \geq |f|$$



ナリ。 (1), (2) ヨリ

$$|(H - z)f|^2 - r((H + H^* - z - \bar{z})f, f) \geq 0$$

$$|(H - z)f|^2 + r((H + H^* - z - \bar{z})f, f) \geq 0$$

從ツテ

$$|(H - z)f|^2 \geq r|((H + H^* - z - \bar{z})f, f)|$$

同様ニ (3), (4) ヨリ

$$|(H - z)f|^2 \geq r|i(H - H^* - z + \bar{z})f, f|$$

$$(H - z) \text{ is bounded} \text{ ナルヲ以テ } \frac{|(H - z)f|}{|f|},$$

upper limit ヲ取ツスレバ

$$\alpha^2 |f|^2 \geq r|((H + H^* - z - \bar{z})f, f)|$$

$$\alpha^2 |f|^2 \geq r|i(H - H^* - z + \bar{z})f, f|$$

f ノ如何ニ依リテ、 $(H + H^* - \dots)$ $i(H - H^* - \dots)$ ハ Hermitian

ナルヲ以テ

$$\alpha^2 |f| \geq r | (H + H^* - Z - \bar{Z}) f |$$

$$\alpha^2 |f| \geq r | i(H - H^* - Z + \bar{Z}) f |$$

$$\begin{aligned} \therefore 2\alpha^4 |f|^2 &\geq r^2 \{ (H + H^* - Z - \bar{Z})^2 - (H - H^* - Z + \bar{Z})^2 \} f, f \\ &= 4r^2 ((H - Z)(H^* - \bar{Z}) f, f) = 4r^4 |(H - Z)f|^2 \end{aligned}$$

$$\therefore |(H - Z)f| \leq \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}r} |f|$$

$\frac{|(H - Z)f|}{|f|}$, upper limit が α ナルヲ以テ

$$\alpha \leq \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}r} \quad \therefore \alpha \geq \sqrt{2}r > 1.4r$$

$$\text{故} = |(H - Z)f| > 1.4r |f|$$

ナル element f ハ常ニ存在スル。故ニ今 Z ノ中心 $1.4r$

r ナル半径ノ円 $\overline{U}_1$ = 對シ $E(\overline{U}_2) \neq 0$ トイレバ

$HE(\overline{U}_1)E(\overline{U}_2)$ ナル operator $\gamma E(\overline{U}_1)E(\overline{U}_2)$ ノ

manifold 内ニテ考フレバ、 γ ハリ半径 r ノ円 = 對シ

テハ常ニ $E(\overline{U}) = 0$ ニテ、然カモ $E(\overline{U}_1) \geq E(\overline{U}_2) \neq 0$

ナルニヨリ

$$|(H - Z)f| > 1.4r |f|$$

ナル element が $E(\overline{U}_2)$, manifold 内ニ存在スル

コトニナリテ、一オ $E(\overline{U}_2)$ ノ manifold ハ

$$|(H - Z)^k f| \leq 1.4r |f| \quad (k = 1, 2, \dots)$$

ナル element ナルコトニ矛盾ス。故ニ今 Z ノ中心トシ、

$1.4r$ ノ半径トスル円 $\overline{U}_1$ = 對シテハ $E(\overline{U}_1) = 0$ ナリ。

又 Z ハ任意ノ点トスルニ可ナルヲ以テ、結局 $1.4r$ ノ半径ト

スル總テノ円ニ對シ $E(\overline{U})=0$. 從ツテ同様ノ論法ニヨリ
 $(1,4)^k \gamma$ ($k=1,2,\dots$)ヲ半徑トスル円ニ對シ $E(\overline{U})=0$
 故ニ $\overline{U}_1$ ノ半徑ヨリ大ナル $(1,4)^k \gamma$ ヲ半徑ノ円ニ對シテモ
 $E(\overline{U})=0$. 從ツテ $E(\overline{U}_1)=0$ トナリ矛盾ス. 故ニ
 如何程ニテモ小ナル半徑ニシテ $E(\overline{U}) \neq 0$ ナルガ如キ円
 ガ常ニ存在ス.

次ニ $E(\overline{U})$ ガ 2°ヲ満足スルコトヲ証明スル. 若シ満
 足セズトスレバ、即チ円 $\overline{U}$ ガ $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \dots, \overline{U}_n$ ニテ覆ハ
 レ. 然カモ $E(\overline{U})$ ノ manifoldガ $E(\overline{U}_1), E(\overline{U}_2), \dots$
 $\dots, E(\overline{U}_n)$ ノ表スル manifoldノ和トノ和クテ得
 ラレタル closed linear manifoldニ含マレズトス
 レバ、 $\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_n$ ノ半徑ヲ充分少シ増シテモ又ハリ同様
 ナレヲ以テ、最初ヨリ円 $\overline{U}$ ノ点ガ $\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_n$ 何レカノ
 内点ナリト假定ス.

$$\text{今 } F = E(\overline{U}) - E(\overline{U}) \{ E(\overline{U}_1) + \{ E(\overline{U}_2) - E(\overline{U}_1) E(\overline{U}_2) \} \\ + \dots \}$$

即チ F ヲ $E(\overline{U})$ ノ manifoldニ含マレ、 $E(\overline{U}_1), \dots$
 $\dots, E(\overline{U}_2)$ ノ和ヨリ得ル manifoldニ含マレザル
 elementヨリナル closed linear manifoldト
 ス. 從ツテ當然ハト commutativeニ總テノ bounded
 operatorト commutativeナリ. $F \neq 0$ ナルヲ以テ
 HF ヲ F ノ manifold内ノミニテ考フレバ、既ニ円 $\overline{U}$
 ニ對シテ $E(\overline{U}) (\geq F)$ ハ 0ナラザルヲ以テ、半徑 ε ヲ如何
 ニ小トスルモ、 $E(\overline{U}_\varepsilon) \neq 0$ ナル円 $\overline{U}_\varepsilon$ ガ存在ス. 然ルニ

$FE(\overline{U}_1) = FE(\overline{U}_2) = \dots = FE(\overline{U}_n) = 0$ ナルヲ以テ
 $\overline{U}_\varepsilon$ ハ $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \dots, \overline{U}_n$ ノ何レニモ含まレズ、然カモ
 $F(\overline{U}) = F$ ナルヲ以テ $\overline{U}$ ノ外部ニハアラズ。此ノ如キ月
 ε ヲ充分大ニスレバ存在セザルヲ以テ矛盾ス。証明終リ。

以上ノ証明ニテ用ヒタ *Lengyel and Stone* /
Theorem 4b ハ其ノ証明ガ *elementary* デハアルカ其
 ノ方法ハ、先ヅ有元次、*Hilbert space* 一般ユークリ
 ッド空間ト順次ニ証明スルモノニテアマリ感心セザルヲ以テ
 今ノ所 *dimension* ヲ用ヒザル方法ヲ研究中ナリ。

注意。 §1 ニ於テハ *measure operator* ヲ
Lebesgue 式ニセシモ *Eigenwertproblem* ノミヲ
 考フル場合ハ *Riemann* 式ニテ充分ニシテ、其ノ場合ハ
Interval ノミヲ考フレバ可ナルニヨリ非常ニ簡單トナ
 ル。