OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Eigenwertproblem ノ一証明 （續）
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 180, p. 252-262
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74719
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

788. Eigenwertproblem ノ一証明(續)

中野秀五郎

§5. normal operator H が hyper maximal トハ H ノ measure operator E(X) が全平面ニ對シ L トナルコトデアルト定義シタガ、此ノ定義ガ在來ノ定義ト一致スルコトハ spectralisation ガ一通リニ出來ルコトカラ明カデハアルガ、直接本論文ノ定義ヨリ出發シテ証明シテ見ル。

E(X) ヲ hyper maximal measure operator トスル。コレニ對シ函數 $f(\xi)$ ガ殆連續(此ノ殆連續

ハ著者ガ東京物理學校校友會雜誌ニノセシモノト同樣ノ考ヘナリ）ナリトハ gaussian plane 上適當ニ bounded closed set

$$Z_1 \subset Z_2 \subset \cdots\cdots$$

ヲ

$$\lim_{n\to\infty} E(Z_n) = 1$$

ナル如クニ取リタルトキ $f(z)$ ガ常ニ Z_n ニテ連續ナルトキニ云フ。

定理. hyper maximal measure operator $E(X)$ ニ関シ $f(z)$ ガ殆連續ナルトキハ

$$(1) \quad (Hf, g) = \int f(z)\, d(E(X)f, g)$$

ヨリ定義セラレル linear operator Hf ハ hyper maximal normal operator ニシテ其ノ definitionsbereich ハ

$$(2) \quad \int |f(z)|^2 d|E(X)f|^2$$

ガ收斂スルガ如キ f ノ集合 $\mathfrak{M}$、又

$$(3) \quad (H^* f, g) = \int \overline{f(z)}\, d(E(X)f, g)$$

ナリ。

証明： (2) ガ收斂スルトキ (1) ノ積分ガ收斂スルコトハ Schwarz ノ不等式ヨリ簡單ニ証明サレル。然カモ

$$\left|\int f(z)\,d(E(x)f,g)\right| \leqq \sqrt{\int |f(x)|^2\, d|E(x)f|^2 \cdot |g|}.$$

ヨリ Riesz ノ定理ニヨリ linear operator H ガ定義サレ、E(X) ト commutative ナルコトモ在来ノ方法ト同様ニ証明サル。又 H ガ normal ナルコトノ証明モ在来ノモノト同様ニ簡単ナレバ略ス。残ルハ H ガ hypermaximal ナルコトナリ。即チ H ノ measure operator F(X) ガ全平面ニ数シノナルコトナリ。此レハ次ノ如クニシテ証明サレル。

$f(z)$ ハ Σ_n ハ bounded closed トルヲ以テ Σ_n ニテ常ニ

$$|f(z)| \leqq M_n$$

ナル M_n ガ存在ス。今 H ノ原点ヲ中心 M_n ヲ半径トスル円 $\overline{U}_n$ ニ對スル measure operator $F(\overline{U}_n)$ ヲ考ヘテ見ルニ

$$|HE(\Sigma_n)f|^2 = \int_{\Sigma_n} |f(x)|^2\, d|E(x)f|^2$$

$$\leqq M_n \int_{\Sigma_n} d(E(x)f,f) = M_n |E(\Sigma_n)f|^2$$

故ニ

$$F(\overline{U}_n) \geqq E(\Sigma_n)$$

故ニ $\quad F \geqq \lim F(\overline{U}_n) \geqq 1$

従ッテ H ハ hyper maximal ナリ。

定理・ Hyper maximal normal operator

H が 0 ヲ Eigenwert ニ有サザルトキハ其ノ逆 inverse operator H^{-1} ガ又 Hyper maximal normal ナリ。

証明. H ノ measure operator $E(X)$ ニ對シ

$$(H^{-1}f, g) = \int \frac{1}{z}\, d(E(X)f, g)$$

ハ H ガ 0 ナル Eigenwert ヲ有サザルヲ以テ $\frac{1}{z}$ ハ $E(X)$ ニ關シ始連続ナルヲ以テ Hypermaximal normal operator H^{-1} ヲ決定ス。$f = HH^{-1}f = H^{-1}Hf$ ナルコトハ在來ノ方法ト同樣簡單ニ証サル。

定理. Definitionsbereich $\mathfrak{M}$ ニヲ常ニ

$$|Hf| \geqq \varepsilon |f| \qquad (\varepsilon > 0)$$

ナルガ如キ normal operator H ガ hyper maximal ナルニ必要且ツ充分ナル條件ハ

$$\varphi = Hf$$
$$\psi = H^{*}f$$

ト置キテ得ル linear operator $\psi = U\varphi$ ガ unitary ナルコトナリ。

証明. 先ヅ必要ナルコトヲ証明スル。H ガ hyper maximal ナルトハ H^{-1} モ亦然リ, ($\because$ $|Hf| \geqq \varepsilon |f|$)

$$|Hf| \geqq \varepsilon |f|$$

ヨリ

$$|\varphi| \geqq \varepsilon |H^{-1}\varphi|$$

即チ H^{-1} ハ bounded normal operator 故ニ其ノ

definitionsbereich ハ一般 Euclid 空間全体ナリ。又 H^* ニ對シテモ同様 H^{*-1} ガ有界 hyper maximal ニシテ其ノ definitionsbereich ガ一般 Euclid 空間全体、然カモ φ ト ψ トハ

$$|\varphi| = |Hf| = |H^*f| = |\psi|$$

ニテ Längentreu. 故ニ U = unitary ナリ。逆ニ $\psi = U\varphi$ ガ unitary ナレバ $H^{-1}\varphi$ ノ definitions-bereich ガ全空間，從ッテ $H^{-1}\varphi$ ハ bounded（此レハ elementary ニ証明サレル）故ニ $H^{-1}\varphi$ ハ hyper-maximal 故ニ前ノ定理ニヨリ Hf ハ hyper maximal ナリ。

此ノ定理ハ J. v. Neumann ノ Hermition operator ニ関スル Caley transformation ノ理論ヲ含ムモノナリ。如何トナレバ、Hf ヲ Hermitian トスレバ $(H+i)f$ ハ normal operator ニシテ然カモ

$$|(H+i)f|^2 = |Hf|^2 + |f|^2 \geqq |f|^2$$

故ニ、$(H+i)f$ ガ hyper maximal ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ

$$\varphi = (H+i)f$$
$$\psi = (H-i)f$$

ヨリ決定サル linear operator $\psi = U\varphi$ ガ unitary ナルコトニシテ、此レハ即チ Hermitian operator ガ hyper maximal ナルタメノ J. v. Neumann

ノ定義ナリ。

Eigenwertproblem ノ一証明（訂正）

§1 ニ於テ、開円 $\overline{U}$ ニ對スル條件

2° $\overline{U} < \overline{V}$ ナルトキハ $E(\overline{U}) \leqq E(\overline{V})$ ヲ次ノ如クニ改メル。

2° 円 $\overline{U}$ が $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \cdots\cdots, \overline{U}_n$ ニテ覆ハレルトキ $E(\overline{U})$ ノ表ハス linear closed manifold ハ $E(\overline{U}_1), \cdots\cdots, E(\overline{U}_n)$ ノ各々ニ表ハサレル linear closed manifold カラ和トシテ作ラレル linear closed manifold ニ含マレル。即チ

$$E(\overline{U}) \leqq E(\overline{U}_1) + \{E(\overline{U}_2) - E(\overline{U}_1)E(\overline{U}_2)\}$$
$$+ \{E(\overline{U}_3) - E(\overline{U}_1)E(\overline{U}_3) - E(\overline{U}_2)E(\overline{U}_3)$$
$$- E(\overline{U}_1)E(\overline{U}_2)E(\overline{U}_3)\}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$

此ノ條件ヲ改メネバ円ニ對シテノ measure operator が一般ニ拡張スルコトガ必ズシモ出來ナイ。

此ノ條件ヲ改メタ上メ §2 ニ於テ normal operator ニ關シ $E(\overline{U})$ ガコノ條件ヲ滿足スルコトノ証明ヲ附加セネバナラヌ。其レハ次ノ如クニシテ証明サレル。

先ヅ $\overline{U}$ ガ充分大ナル円ニ對シテ $E(\overline{U}) \neq 0$ ナレトキハ如何程ニテモ半徑ノ小ナル円ニシテ $E(\overline{U}) \neq 0$ ナルガ如キ円 $\overline{U}$ ガ常ニ存在スルコトヲ証明スル。

今中心 Z_0，半徑 r_0 ノ円 $\overline{U}_0$ ニ對シテ $E(\overline{U}_0) = 0$ ナ

リトス。又 $\overline{U}_1$ ヲ $\overline{U}_0 \subset \overline{U}_1$ = シテ $E(\overline{U}_1) \neq 0$ ナル充分大ナル円トス。然ルトキハ $E(\overline{U}_1)$ ノ manifold 内ノミニテ考ヘテ

$$H_0 = \frac{H - Z_0}{r_0} E(\overline{U}_1)$$

ト置ケバ H_0 ハ bounded normal 即チ $|H_0 f| \leqq M|f|$ = シテ常ニ

$$|H_0^k f| \leqq |f| \qquad (k = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナルが如キ element ハ存在セズ。故ニ

$$|(H_0 H_0^*)^k f| \leqq |f| \qquad (k = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナルが如キ element モナシ。然カモ $H_0 H_0^*$ ハ bounded positive definite Hermitian operator ナルヲ以テ

B. A. Lengyel and M. H. Stone (Annals. Vol 37, 859頁) ノ Theorem Hb (此ノ定理ノ証明ハ elementary ナリ) ニヨリ如何ナル element. f ニ対シテモ

$$(H_0 H_0^* f, f) \geqq (f, f)$$

ナリ。従ツテ常ニ

$$|H_0 f| \geqq |f|$$

故ニ $E(\overline{U}_0) = 0$ ナレバ常ニ

$$\left| \frac{H - Z_0}{r_0} E(\overline{U}_1) f \right| \geqq |E(\overline{U}_1) f|$$

$E(\overline{U}_1)$ ノ表ハス manifold 内ノミニテ考フレバ

$$\left|\frac{H-z_0}{r_0}f\right| \geqq |f|$$

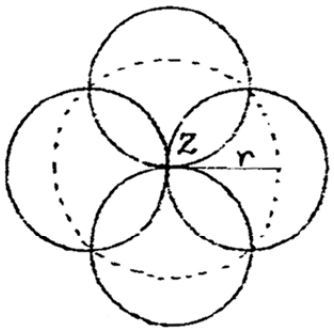
サテ半径 r ノ円 $\overline{\Gamma}$ ニ對シテハ其ノ位置ノ如何ニ関セズ常ニ $E(\overline{\Gamma})=0$ ナリトスレバ，任意ノ点 z ニ對シ常ニ

(1) $$\left|\frac{H-z-r}{r}f\right| \geqq |f|$$

(2) $$\left|\frac{H-z+r}{r}f\right| \geqq |f|$$

(3) $$\left|\frac{H-z-ir}{r}f\right| \geqq |f|$$

(4) $$\left|\frac{H-z+ir}{r}f\right| \geqq |f|$$



ナリ．(1)，(2) ヨリ

$$|(H-z)f|^2 - r((H+H^*-z-\bar{z})f, f) \geqq 0$$

$$|(H-z)f|^2 + r((H+H^*-z-\bar{z})f, f) \geqq 0$$

従ッテ

$$|(H-z)f|^2 \geqq r|((H+H^*-z-\bar{z})f, f)|$$

同様ニ (3)，(4) ヨリ

$$|(H-z)f|^2 \geqq r|(i(H-H^*-z+\bar{z})f, f)|$$

$(H-z)$ ハ bounded ナルヲ以テ $\dfrac{|(H-z)f|}{|f|}$ ノ upper limit ヲ α トスレバ

$$\alpha^2|f|^2 \geqq r|((H+H^*-z-\bar{z})f, f)|$$

$$\alpha^2|f|^2 \geqq r|(i(H-H^*-z+\bar{z})f, f)|$$

f ノ如何ニ成立シ，$(H+H^*\cdots)$ $i(H-H^*\cdots)$ ハ Hermitian

ナルヲ以テ

$$\alpha^2|f| \geqq r|(H+H^*-\alpha-\bar{\alpha})f|$$

$$\alpha^2|f| \geqq r|i(H-H^*-\alpha+\bar{\alpha})f|$$

$$\therefore \quad 2\alpha^4|f|^2 \geqq r^2\left(\left[(H+H^*-\alpha-\bar{\alpha})^2-(H-H^*-\alpha+\bar{\alpha})^2\right]f,f\right)$$

$$=4r^2\left((H-\alpha)(H^*-\bar{\alpha})f,f\right)=4r^4|(H-\alpha)f|^2$$

$$\therefore \quad |(H-\alpha)f| \leqq \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}\,r}|f|$$

$\frac{|(H-\alpha)f|}{|f|}$, upper limit が α ナルヲ以テ

$$\alpha \leqq \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}\,r} \qquad \therefore \quad \alpha \geqq \sqrt{2}\,r > 1.4r$$

故ニ $\quad |(H-\alpha)f| > 1.4r|f|$

ナル element f ハ常ニ存在スル。故ニ今 α ヲ中心ト1.4 r ナル半径ノ円 $\overline{U}_1$ ニ對シ $E(\overline{U}_2)\neq 0$ トイヘバ $HE(\overline{U}_1)E(\overline{U}_2)$ ナル operator ヲ $E(\overline{U}_1)E(\overline{U}_2)$ ノ manifold 内ニテ考フレバ，サヘリ半径 r ノ円ニ對シテハ常ニ $E(\overline{U})=0$ ニシテ、然カモ $E(\overline{U}_1)\geqq E(\overline{U}_2)\neq 0$ ナルニヨリ

$$|(H-\alpha)f| > 1.4r|f|$$

ナル element ガ $E(\overline{U}_2)$ ノ manifold 内ニ存在スルコトニナリテ，一方 $E(\overline{U}_2)$ ノ manifold ハ

$$|(H-\alpha)^k f| \leqq 1.4r|f| \qquad (k=1,2,\cdots\cdots)$$

ナル element ナルコトヲ予言ス。故ニ α ヲ中心トシ，1.4 r ヲ半径トスル円 $\overline{U}_1$ ニ對シテハ $E(\overline{U}_1)=0$ ナリ。又 α ハ任意ノ点トスルモ可ナルヲ以テ、結局 1.4 r ヲ半径ト

スル総テノ円ニ對シ $E(\overline{U})=0$. 從ッテ同様ノ論法ニヨリ $(1.4)^k r$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ半徑トスル円ニ對シ $E(\overline{U})=0$ 故ニ $\overline{U}_1$ ノ半徑ヨリ大ナル $(1.4)^k r$ ヲ半徑ノ円ニ對シテモ $E(\overline{U})=0$. 從ッテ $E(\overline{U}_1)=0$ トナリ矛盾ス。故ニ如何程ニテモ小ナル半徑ニシテ $E(U)\neq 0$ ナルガ如キ円ガ常ニ存在ス。

次ニ $E(\overline{U})$ ガ $\overline{2^\circ}$ ヲ滿足スルコトヲ証明スル。若シ滿足セズトスレバ，即チ円 $\overline{U}$ ガ $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \cdots\cdots, \overline{U}_n$ ニテ盡ハレ、然カモ $E(\overline{U})$ ノ manifold ガ $E(\overline{U}_1), E(\overline{U}_2), \cdots\cdots, E(\overline{U}_n)$ ノ表ス manifold ノ和トノ和ヲ得ラレタル closed linear manifold ニ含マレズトスレバ、$\overline{U}_1, \cdots\cdots, \overline{U}_n$ ノ半徑ヲ充分少シ增シテモ又ハリ同様ナルヲ以テ、最初ヨリ円 $\overline{U}$ ノ点ガ $\overline{U}_1, \cdots\cdots, \overline{U}_n$ 何レカノ内点ナリト假定ス。

今
$$F=E(\overline{U})-E(\overline{U})\{E(\overline{U}_1)+\{E(\overline{U}_2)-E(\overline{U}_1)E(\overline{U}_2)\}+\cdots\cdots\}$$

即チ F ヲ $E(\overline{U})$ ノ manifold ニ含マレ、$E(\overline{U}_1), \cdots\cdots, E(\overline{U}_2)$ ノ和ヨリ得ル manifold ニ含マレザル element ヨリナル closed linear manifold トス。從ッテ當然 H ト commutative ナル總テノ bounded operator ト commutative ナリ。$F\neq 0$ ナルヲ以テ HF ヲ F ノ manifold 内ノミニテ考フレバ、既ニ円 $\overline{U}$ ニ對シテ $E(\overline{U})(\geq F)$ ハ 0 ナラザルヲ以テ、半徑 ε ヲ如何ニ小トスルモ、$E(\overline{U}_\varepsilon)\neq 0$ ナル円 $\overline{U}_\varepsilon$ が存在ス。然ルニ

$FE(\overline{U}_1)=FE(\overline{U}_2)=\cdots\cdots=FE(\overline{U}_n)=0$ ナルヲ以テ $\overline{U}_\varepsilon$ ハ $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \cdots\cdots, \overline{U}_n$ ノ何レニモ含マレズ、然カモ $\Gamma E(\overline{U})=F$ ナルヲ以テ $\overline{U}$ ノ外部ニハアラズ。此ノ如キ円ハ ε ヲ充分大ニスレバ存在セザルヲ以テ矛盾ス。証明終リ。

以上ノ証明ニテ用ヒタ Lengyel and Stone ノ Theorem 4b ハ其ノ証明が elementary デハアルが其ノ方法ハ、先ヅ有元次、Hilbert space 一般ユークリッド空間ト順次ニ証明スルモノニテアマリ感心セザルヲ以テ今ノ所 dimension ヲ用ヒザル方法ヲ研究中ナリ。

注意. §1 ニ於テハ measure operator ヲ Lebesgue 式ニセシモ Eigenwertproblem ノミヲ考フル場合ハ Riemann 式ニテ充分ニシテ、其ノ場合ハ Interval ノミヲ考フレバ可ナルニヨリ非常ニ簡単トナル。