



Title	Riemann integral ヨリ Jordan measureヲ作ルコト
Author(s)	國澤, 清典
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 181, p. 263-267
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74720
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

789. Riemann integral ヨリ Jordan measure を作ルコト.

國澤清典 (阪大)

S. Bochner の Proc. Nat. Acad. U. S. A. 25-3 (1939) = 於テ次ノ定理ヲ述ベテキル。⁽¹⁾

定理. C ヲ空間 G ガ定義サレタ實數値⁽²⁾ノ有界函数ノ集合トシコレガ次ノ性質ヲモツテキルモノトスル.

$$1^\circ f(x) \equiv 1 \wedge C = \text{属スル.}$$

$$2^\circ f_1(x), f_2(x) \in C \text{ ナラバ } c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \in C.$$

$$3^\circ f(x) \in C \text{ ナラバ } |f(x)| \in C.$$

今若シ各々ノ $f(x) \in C$ = 對シテ γ ノ mean $M_x(f)$ ガ定義サレテコレガ

$$4^\circ M_x(1) = 1$$

$$5^\circ M_x(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 M_x(f_1) + c_2 M_x(f_2)$$

$$6^\circ f(x) \geq 0 \text{ ナラバ } M_x(f) \geq 0$$

ヲ満足シテ居レバ、 G ノ部分集合ノ family $\mathcal{E} = \{E\}$ 及ビソコヲ定義サレタ Jordan measure $\mu(E)$ ヲ定メテ、コノ Jordan measure $\mu(E)$ = 關シテ C ノ各々 $f(x)$ ガ Riemann integrable トナリ、シカモ γ ノ integral

(1) S. Bochner: Additive set functions on groups.

(2) Bochner ノ複素數値ノ函数ヲモ考ヘテキルガ實數値ノ函数ノ場合ノミヲ考ヘレバ十分デアアル。

ザ丁度 $M_x(f) =$ 等シクナル様ニスルコトが出来ル。

即チ G ノ部分集合ノ family $\mathcal{E} = \{E\}$ トソコヲ定義サレタ measure $\nu(E)$ ヲ定メテコレガ

7° $\Lambda \in \mathcal{E}; E \in \mathcal{E}$ + ラバ $G - E \in \mathcal{E}$

8° $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ + ラバ $E_1 \cdot E_2 \in \mathcal{E}, E_1 + E_2 \in \mathcal{E}$

9° $0 \leq \nu(E) \leq 1, \nu(\Lambda) = 0, \nu(G) = 1$

10° $E_1 \cdot E_2 = \Lambda$ + ラバ $\nu(E_1 + E_2) = \nu(E_1) + \nu(E_2)$

ヲ満足シ、且ツ任意ノ $f(x) \in C$ 及ビ任意ノ real number $\alpha, \beta =$ 對シテ $E_x[\alpha < f(x) \leq \beta]$ ハ $\mathcal{E}$ ニ属シテ

(R) $\int_G f(x) d\nu(x) = M_x(f)$ トナル様ニスルコトが出来

ル。

コノ定理ハ Riemann integral ヨリ逆ニ

Jordan measure ヲ決定スル方法トシテ興味カナル。

G ガ normal + topological space ナ C ガソコ
ヲノ有界ノ実数値ノ連続函数全体デアル場合ハ A. Markoff
ガ最近論ジテキルカ⁽³⁾, 今ノ場合ハ $G = \text{topology}$ ヲ入レ
テナイカラ、コレトハ異ルノデアアル。

Bochner ハ証明ヲ述ベテキナイノデ、ドノ様ニシテ
証明シタカワカラナイ。次ニコノ定理ノ簡單ノ証明ヲ與ヘル。
証明ノ手段トシテ Banachノ extension theorem

(3) A. Markoff: On mean values and exterior
densities, Reuevil Math., 46-1. (1938), 165-191.

ヲ使ツタメ。又トシテ G ノスベテノ部分集合ノ族が出來ルコトハ注目スベキコトデフロウ。

先ヅ G デ定義サレタアラエル有界ノ実数値ノ函数ノ集合ヲ考ヘ、コレヲ C^* トスル。 C ハ C^* ノ linear subspace デアル。ヨツテ C デ定義サレタ linear functional $M_x(f)$ ハ C^* 全体ヘ linear = 拡張スルコトが出來ル。シカモ $M_x(f)$ ハ C デ positive⁽⁴⁾ + linear functional デアルカラ、 $M_x(f)$ ノ extension $M_x^*(f)$ が C^* デ positive linear functional = + ル様ニスルコトが出來ル。

コノタメニハ次ノ如クスレバヨク。即チ、任意ノ $\varphi(x) \in C^*$ = 對シテ $\varphi(x) \leq f(x)$ (for all $x \in G$) ナル如キ $f(x) \in C$ ヲトリ (コノ様ニ $f(x)$ ハ確カニ存在スル)。カナル $f(x)$ 全体ニ對スル $M_x(f)$ ノ下限ヲ $p(\varphi)$ トオク。 $p(\varphi)$ ハ明ニ =

$$(i) \quad p(\varphi + \psi) \leq p(\varphi) + p(\psi)$$

$$(ii) \quad p(a\varphi) = a \cdot p(\varphi), \quad a \geq 0$$

ヲ満足スル。ヨツテスベテノ $\varphi \in C^*$ = 對シテ $M_x^*(\varphi) \leq p(\varphi)$ ヲ満足スル如キ $M_x(f)$ ノ extension $M_x^*(\varphi)$ が存在スル。 $M_x^*(\varphi)$ が positive ナルコトハ $\varphi \geq 0$ ナルトキ $-M_x^*(\varphi) = M_x^*(-\varphi) \leq p(-\varphi) \leq 0$ トナルコトヨリワカル。

次ニ任意ノ G ノ部分集合 E = 對シテ $\psi(E) = M_x^*(\varphi_E(x))$

(4) $f(x) \geq 0$ ナルトキ $M_x(f) \geq 0$ トナルコト。

(但し $\varphi_E(x)$ は E の characteristic function)

トオケバ $\nu(E)$ が求ムル Jordan measure ナル。

$\nu(E)$ が $q^0, 10^0$ を満足スルコトハ明カデアルカラ

$\int_G f(x) d\nu(x) = M_x(f)$ トナルコトヲ示サウ。コノタメニ

$|f(x)| < M$ for all $x \in G$ ナル如キ M ヲトリ $-M = \alpha_0 < \alpha_1$

$< \dots < \alpha_n = M$ ナル分割 Δ ヲ考ヘル。

$$M(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \nu(E_i) = M_x^* \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \varphi_{E_i}(x) \right),$$

$$m(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} \cdot \nu(E_i) = M_x^* \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} \cdot \varphi_{E_i}(x) \right),$$

$$E_i = E_x [\alpha_{i-1} < f(x) \leq \alpha_i]$$

トオケバ明カニ

$$\begin{aligned} 0 &\leq M(f, \Delta) - m(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \cdot \nu(E_i) \\ &\leq |\Delta| \equiv \max_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \end{aligned}$$

ニテ且 $M_x^*(f)$ が positive linear functional ナ

ナルコト $\sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} \varphi_{E_i}(x) \leq f(x) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_{E_i}(x)$ ナルコト

トヨリ

$$m(f, \Delta) \leq M_x^*(f) = M_x(f) \leq M(f, \Delta)$$

ニテ $|\Delta| \rightarrow 0$ ナルトキ $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} M(f, \Delta), \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} m(f, \Delta)$

ハ存在シテ、何レモ $M_x(f)$ ニ等シイ。即チ $\int_G f(x) d\nu$ が存

在レテ $M_x(f) = 0$ シイ。