



Title	Closed linear operator ヲ Unitar ト Hermitian ト ノ 積ニテ表ハス証明
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 181, p. 267-272
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74722
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

791. Closed linear operator $\neq$ Unitär
ト Hermitian トノ積 $=$ テ表ハス証明

中野 秀五郎

J. v. Neumann 著 Über adjungierte

Funktionaloperatoren, (Ann. of Math. 33)
 $=$ closed linear operator $\rightarrow$ hyper maximal Hermitian $\rightarrow$ largest $\rightarrow$ operator $\rightarrow$
 ノ積 $=$ テ表ハスコトヲ証明シタ。所カ最近小平氏カ Murray
 and J. v. Neumann: On Rings of Operators
 (Ann. of Math. 37), Lemma 9.1.4, $Q(f, g)$
 $\rightarrow Q(f, g) = (Af, Ag) + (f, g)$ ト置クコト $=$ ヨリ直チ $=$
 此, Lemma ヨリ上, Neumann ノ定理が得ラレルコ
 トヲ証明シタ。(近日中発表ノ由) 此処デハ上, $Q(f, g)$
 ヨリ Lemma ヲ用ヒテ証明シタ。

A $\rightarrow$ definitionsbereich $\mathcal{D} =$ テ定義セラレ
 $\rightarrow$ closed linear Operator. 然カモ $\mathcal{D}$ ハ $\mathcal{E} =$ テ
 überall dicht $\rightarrow A$ ノ range $\in \mathcal{E} =$ テ überall
 dicht トスル。然ルトキハ $\mathcal{D} =$ 含マレル $f_1, f_2, \dots$
 $=$ シテ $\mathcal{E}$, completely normalized orthogonal
 system カ存在スル。今

$$Q(f, g) = (Af, Ag) + (f, g) \quad f, g \in \mathcal{D}$$

ヲ考フレバ $Q(f, g)$ ハ一ツノ inner product ト考
 ヘラレ 此, inner product $=$ 関シテハ $f_1, f_2, \dots$
 ハ最早 orthogonal デハナシ。故ニ Schmidt ノ方
 法 $=$ テ $Q(f, g) =$ 関シ normalized orthogonal
 system $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ $\rightarrow f_1, f_2, \dots$ ヨリ作ル。
 例ヘバ

$$\varphi_1 = a_{11} f_1 \quad a_{11} \neq 0$$

$$g_2 = a_{21} f_1 + a_{22} f_2 \quad a_{22} \neq 0$$

(必ずしも此ノ如キ方法ヲ必要トセズ單ニ $g_i \in \mathcal{V}$ + レバ可
故ニ一般ユークリッドニテモ可). + ル形ニテ得ラル (f_1
 $f_2, \dots$ が $\mathcal{Q}$ = 同シテ *linearly independent* +
ルコトハ $\mathcal{Q}(f, f) = \|Af\|^2 + \|f\|^2 \geq \|f\|^2$ 明ナリ).

今

$$x_1 g_1 + \dots + x_n g_n = R(x_1 f_1 + \dots + x_n f_n)$$

+ ル linear operator R ヲ考フニ

$$f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$$

$$g = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n$$

= 對シ

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(Rf, Rg) &= \mathcal{Q}(x_1 g_1 + \dots + x_n g_n, y_1 g_1 \\ &\quad + \dots + y_n g_n) \\ &= x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n} \\ &= (f, g) \end{aligned}$$

故ニ

$$(ARf, ARg) + (Rf, Rg) = (f, g)$$

$$\text{又} \quad \|ARf\|^2 + \|Rf\|^2 = \|f\|^2$$

$$\text{故ニ} \quad \|Rf\| < \|f\|$$

= シテ Rf ハ bounded. 從ツテ R 1 definitions-
bereich ヲ $\mathcal{G}$ = 拡張スルコトが出来ル。然ルモ
 $g_1, g_2, \dots$ が收斂スル elements トスレバ
(ARg_n が sinnvoll = テ)

$$\|A(Rg_n - Rg_m)\|^2 + \|Rg_n - Rg_m\|^2 = \|g_n - g_m\|^2$$

ヨリ g_n, Rg_n, ARg_n ニツカ収斂スレバ他モ収斂ス。

A が closed + リットノ假定ヨリ、 Rf / rang ト $\mathcal{D}$ ト
 一致スルコトカ知ラル。又 Rf が bounded + ルヲ以
 テ $R^*f \in \text{bounded} \Rightarrow \text{definitionsbereich}$ ハ
 $\mathcal{G}$ 故 $= R^*R$ ハ bounded positive definit.

故 $=$ hypermaximal + レバ、其レ、Eigenwert-
 darstellung ヲリ

$$R^*R = H_1^2$$

+ ル bounded positive definite Hermitian
 カ存在カ知ラレル。然カモ $Rf = 0$ + レバ $f = 0$ + ルヲ
 以テ、 $R.H.$ ハ inverse カ存在シテ

$$U = R H_1^{-1}$$

ト置ケバ

$$U^* = H_1^{-1} R^*$$

$$\therefore U^*U = H_1^{-1} R^* R H_1^{-1} = H_1^{-1} H_1 H_1 H_1^{-1} = I$$

然カモ H_1 / rang ハ $\mathcal{G} = \tau$ überall dicht, 故 $= H_1^{-1}$
 / $\text{definitionsbereich}$ ハ $\mathcal{G} = \tau$ überall dicht.

故 $= U$ ハ Unitär + リ、從テ

$$R^{-1} = H_1^{-1} U^*$$

又

$$(ARf, ARg) + (Rf, Rg) = (f, g)$$

ヨリ

$$\begin{aligned}
 (Af, Ag) + (f, g) &= (R^{-1}f, R^{-1}g) \\
 &= (H_1^{-1} U^* f, H_1^{-1} U^* g) \\
 &= (U H_1^{-2} U^* f, f)
 \end{aligned}$$

$U H_1^{-2} U^*$ は Hermitian かつ正定値

$$(Af, Ag) = (R_1 f, g)$$

かつ $\mathcal{D} = \mathcal{D}$ 定義域をなす Hermitian が存在する。

然るに

$$\|Af\|^2 = (R_1 f, f)$$

より R_1 は positive definite = して、 $R_1 f = 0$ は $f = 0$

に他なし。故に R_1 は hypermaximal = して、其の

Eigenwertdarstellung あり

$$R_1 = H^2$$

かつ positive definite Hermitian H が存在する。故に

$$(Af, Ag) = (Hf, Hg)$$

$$\text{今 } g = Af \quad \psi = Hf$$

と置けば

$$\|g\| = \|\psi\|$$

となり、 $g = U\psi$ かつ linear operator U は

längentreu. 然るに A 及び H の rang は $\mathcal{D} =$

に überall dicht かつ正定値、 U は Unitär. 故に

$$A = UH$$

を得たり。又これは一通りなり。若し他に Unitär U_1

positive definite Hermitian H_1 = 對し

$$U H = U_1 H, \quad U_1 U H = H, \quad U_1 U = H_1 H^{-1}$$

$$U, U_1 \wedge \text{Unitär} + \text{レバ} \quad H_1 H^{-1} \cdot H^{-1} H_1 = I. \quad \therefore H_1^2 = H^2.$$

$$H, H_1 \wedge \text{positive definite} + \text{レバ} \text{ 以て } H_1 = H.$$

$$\therefore U = U_1$$

如何トレバ

$$(H^2 f, g) = \int \lambda d(E(\lambda) f, g)$$

$$(H f, g) = \int \lambda d(F(\lambda) f, g)$$

31)

$$(H^2 f, g) = \int \lambda^2 d(F(\lambda) f, g) = \int \lambda d(F(\sqrt{\lambda}) f, g)$$

$$\therefore F(\sqrt{\lambda}) = E(\lambda)$$

$$\begin{aligned} \therefore (H f, g) &= \int \lambda d(E(\lambda^2) f, g) \\ &= \int \sqrt{\lambda} d(E(\lambda) f, g) \end{aligned}$$

トレバ + 1)。