



Title	解析算法ニ就イテ, I
Author(s)	近藤, 基吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 181, p. 272-286
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74723
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

792. 解析算法 = 就イテ, I

近 藤 基 吉 (北大)

F. Hausdorff. W. Sierpinski, L. Kantorowitch. E. Livensou 等 = ヨツテ + オレタ 解析算法 / 研究ハ未ダ極ク初期ノ状態デ注目スベキ結果ガ出テ居+イガ.

今後記述的集合論ヲ重要ナル位置ヲ占メルニ至ルト思フ。
 私ハ射影集合ヲ研究スル準備トシテコノ頃コノ方面ノ問題
 ヲ考ヘテ見タカラ今コデニ得ラレタ結果ヲ此処デ書キテ見タ
 イト思フ。

此ノ算法ノ研究ハ從來集合ノ場合ノミガ考察サレテ居タ
 ノデアルガ、コノ場合ヨリモ函数ノ場合ヲ先ニ考察スルノガ
 研究ノ順序デアルト思フノデ此処デハソノ方法ニヨリタイ。
 我々ハ先ヅ研究ノ目標ヲオカナケレバナラナイガ、最初ノ目
 標ヲ Baire ノ函数ニ関スル H. Lebesgue 氏ノ理論ノ
 解析算法ヘノ拡張ニオキタイト思フ。

1. 解析算法ノ定義 R ヲ空間トスル、 R デ定
 義サレタ一價實函数ノ列 $\{F_n(x)\}$ ($n=1, 2, \dots$) カラ R
 デ定義サレタ一價實函数ヲ構成スル算法至 $(F_n(x))$ ノ中デ
 R ノ各点 x_0 ニ於イテ至 $(F_n(x))$ ノ與ヘル値至 $(F_n(x_0))$
 カ $F_n(x)$ ガ $F_n(x)$ ノ点 x_0 ニ於ケル値 $F_n(x_0)$
 ノミデ決定サレルモノヲ (R デ定義サレタ) 解析算法ト云
 フ。

コノ場合算法至 $(F_n(x))$ ハ点 x_0 ニ於イテ実数列
 $\{F_n(x_0)\}$ ($n=1, 2, \dots$) カラ実数至 $(F_n(x); x_0)$ ヲ
 構成スル実数ニ関スル算法ト考ヘラレル。從ツテ点 x_0 ニ對
 シテ実数列 $\{y_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) カラ実数至 x_0 (y_n)ヲ構成
 スル算法ヲ適當ニ選ンデ

$$\Phi(F_n(x); x_0) = \Phi_{x_0}(F_n(x_0))$$

ガ成立スルヤリニ出來ル。今後記号ヲ尙單ニシテ至 $(F_n(x);$

x_0) を $\Phi(F_n(x_0))$ で示スコト = スル。此處で $\Phi(x)(y_n)$ ノコトヲ $\Phi(F_n(x))$ ノ点 x = 於ケル局所算法ト云フ。解析算法が映ヘラレルトキ = ハソノ局所算法ハ一義的 = 決定セラレ、逆 = R ノ各点 x = 実数 = 関スル算法 $\Phi(x)(y_n)$ ヲ任意 = 映ヘルトキ = 是ヲ局所算法トスル解析算法が一義的 = 決定サレル。

此處でニツノ場合が考ヘラレル、其ノ一ツハ $\Phi(F_n(x))$ ノ局所算法 $\Phi(x)(y_n)$ が R ノ各点 x = 関係シトイ場合デアリ、他ノ一ツハサウデナイ場合デアル。前ノ場合局所算法 $\Phi_n(y_n)$ ヲ簡單 = $\Phi(y_n)$ デ示シ、 $\Phi(F_n(x))$ ハ *homogène* デアルト云フ。

注意。コノ定義ハ L. Kantorowitch, E. Livenson 両氏ノ集合 = 関スル解析算法ノ定義ヲ函数ノ場合 = 移行シタモノデアル。但シ我々ノ解析算法ノ両氏ノ *quasi-analytic operation* = 相當シ、*homogène* + 解析算法カ *analytic operation* = 相當シテ居ル。

2. 局所算法ノ構造 此處で先ヅ問題トナルコ

トハ解析算法ノ構造デアル。シカルニ解析算法ハ其ノ局所算法 = ヨツテ一義的 = 決定セラレ、局所算法ハ実数 = 関スル算法デアルカラ、此ノ算法ノ構造ヲ研究スレバ我々ノ目的ハ達セラレル。実数 = 関スル算法ハ無限個ノ独立変数ヲ有スル函数デアルカラ、コレヲ函数トシテ取扱フコト = シヨウ。其處で R = 連続ノ概念ヲ導入スル。其ノ X = 実数列ノ空間 R ヲ考ヘル。 R ノ数列ノ関

= 距離ノ概念ヲ次ノヤリニ定義スル。即チ R ノニツノ数列 $\{x_n^{(k)}\}$ ($k=1, 2; n=1, 2, \dots$) = 對シテ

$$\text{dis}(\{x_n^{(1)}\}, \{x_n^{(2)}\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$$

トスル。但シ

$$\nu(x, y) = |\nu(x) - \nu(y)|;$$

$$\nu(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad (x \neq \pm\infty), \quad \nu(\pm\infty) = \pm 1$$

デアル。シカルトキ $= R$ ハ完備距離空間デアアル。シカシ可分デアハナイ。今実数ニ關スル算法 $\Phi(y_n)$ ノ定義域ヲ $D (\subset R)$ トスル。 $\Phi(y_n)$ カ D ノ数列 $\{y_n^{(0)}\}$ ($n=1, 2, \dots$) デ連続デアルト云フノハ $\varepsilon > 0$ = 對シテ $\delta > 0$ ヲ選ンテ

$$\text{dis}(\{y_n^{(0)}\}, \{y_n\}) < \delta, \quad \{y_n\} \in D$$

ノトキ $= \nu(\Phi(y_n^{(0)}), \Phi(y_n)) < \varepsilon$ トナシ得ルコトデアアル。 $\Phi(y_n)$ カ D ノ凡テノ数列デ連続デアルトキ $= \Phi(y_n)$ ハ連続デアルト云フ。

実数ニ關スル連続ナル算法ノ中デ特ニ重要ト思ハレヌモノハ *opération arithmétique* ト *opération topologique* デアル。此処デ *opération arithmétique* ト云フノハ次ノ六種類ノ算法

$$1^\circ. a+x, \quad 2^\circ. ax, \quad 3^\circ. x_1+x_2, \quad 4^\circ. x_1-x_2,$$

$$5^\circ. x_1 \times x_2, \quad 6^\circ. x_1 \div x_2 \quad (\text{但シ } a \neq 0 \text{ へ實数})$$

デアアル。次ニ *opération topologique* ノ定義ヲ與ヘテ置カウ。 R デ連続ナル算法 $\Phi(y_n)$ カ條件「任意ノ單調増加連続函数 $\pi(t)$ ($-\infty \leq t \leq +\infty$) = 對シテ

$$\chi(\overline{(y_n)}) = \overline{(\chi(y_n))}$$

が常ニ成立スル』ヲ満足スルトキ = *topologique* デアル

ト云フ。 *opération topologique* / 例トシテ

b. s. y_n ; b. i. y_n ; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 等ヲ上ゲルコト

が出来る。

此処デ *opération topologique* / 構造ヲ考ヘテ
置キタイ。其ノタメニ先ヅ定義ヲ與ヘル。

定義: $\mathcal{R}$ ヲ 0 ト 1 トノ間ニアル無理数カラナル空ナ
イ集合トスルトキ =

$$\overline{(y_n)} = \text{b. s. } \left\{ \text{b. i. } y_{n_k} \right\}_{(n_1, n_2, \dots) \in \mathcal{R}}$$

ヲ実数ニ関スル Hausdorff / 算法。 $\mathcal{R}$ ヲ其ノ底ト云
フ。

注意。ユノ定義ハ集合ニ関スル Hausdorff / 算法ヲ
実数ノ場合ニ移行シタモノデアル。

定理 1. $\mathcal{R}$ デ定義カレタ実数ニ関スル算法 $\overline{(y_n)}$
ガ *topologique* デアルガタメニ必要且ツ十分ナル條
件ハ $\overline{(y_n)}$ ガ実数ニ関スル Hausdorff / 算法デアル
事デアル。

証明: 十分條件ナルコト。 $\overline{(y_n)}$ ヲ 實数ニ関スル
Hausdorff / 算法。 $\mathcal{R}$ ヲソノ底トスル。

今單調増加連続函数 $\chi(t)$ ($-\infty \leq t \leq +\infty$) ヲ與ヘ
テ $\overline{(\chi(y_n))}$ ヲ考ヘル。

然ルトキニハ

$$\begin{aligned}\Phi(\chi(y_n)) &= \text{b. d. } \left\{ \text{b. i. } \chi(y_{n_k}) \right\} = \text{b. d. } \chi(\text{b. i. } y_{n_k}) \\ &= \chi(\text{b. d. } (\text{b. i. } y_{n_k})) = \chi(\Phi(y_n))\end{aligned}$$

デアル。他方面デ実数列 $\{y_n^{(0)}\}$ ($n=1, 2, \dots$) ト $\varepsilon > 0$ トヲ
 與ヘテ $\text{dis}(\langle y_n^{(0)}, (y_n) \rangle) < \varepsilon$ ノ成立スル実数列 $\{y_n\}$
 ($n=1, 2, \dots$) ヲ考ヘル。 $\nu(y_n^{(0)}, y_n) < \varepsilon$ ($n=1, 2, \dots$)
 デアルカテ $\nu(y_n^{(0)}) < \nu(y_n) + \varepsilon$ ($n=1, 2, \dots$) デアル。
 故ニ $\Phi(\nu(y_n^{(0)})) \leq \Phi(\nu(y_n) + \varepsilon)$ デアル。然ルニ $\nu(t)$ 、
 $\nu(t) + \varepsilon$ ハ共ニ單調増加連続デアルカテ今証明シタ結果ニ
 依ツテ $\nu(\Phi(y_n^{(0)})) \leq \nu(\Phi(y_n)) + \varepsilon$ 。同様ニ $\nu(\Phi(y_n))$
 $\leq \nu(\Phi(y_n^{(0)})) + \varepsilon$ カ得テ $\nu(\Phi(y_n^{(0)}), \Phi(y_n)) \leq \varepsilon$ デ
 アル。故ニ $\Phi(y_n)$ ハ連続デ從ツテ *topologique* デ
 アル。

必要條件ナルコト。 $\Phi(y_n)$ ヲ *opération topologique*
 トスル。無理数 $(n_1, n_2, \dots)$ デ條件『実数列 $\{y_n^{(0)}\}$
 ($n=1, 2, \dots$) ト実数 μ トヲ適當ニ選ンデ $\Phi(y_n^{(0)}) > \mu$ 、
 $y_{n_k}^{(0)} > \mu$ ($k=1, 2, \dots$) 及ビ $y_n^{(0)} \leq \mu$ ($n \neq n_k$) トナシ
 得ル』ヲ満足スルモノノ集合ヲ $\mathcal{N}$ トスル。然ルニ $\mu \neq 0$
 デアル。何トナレバ、 $y_n^{(0)} = 0$ ($n=1, 2, \dots$)。 $\chi(t) = 2t$
 トナレバ $\chi(\Phi(y_n^{(0)})) = \Phi(\chi(y_n^{(0)}))$ 、或ハ $2\Phi(y_n^{(0)})$
 $= \Phi(y_n^{(0)})$ カ成立シ $\Phi(y_n^{(0)}) = 0$ デアル。故ニ $y_n^{(0)} > -1$
 ($n=1, 2, \dots$)、 $\Phi(y_n^{(0)}) > -1$ カ成立シテ $(1, 2, 3, \dots) \in \mathcal{N}$
 デアル。即チ $\mathcal{N} \neq \emptyset$ デアル。

其他デ実数ニ關スル算法 $\Phi(y_n)$ ヲ次ノヤウニ定義スル。

即ち、実数列 $\{y_n\} (n=1, 2, \dots) =$ 對シテ $y_{n_k} > \epsilon (k=1, 2, \dots)$, $y_n \leq \epsilon (n \neq n_k) (n_1, n_2, \dots) \in \mathcal{N}$, 成立スル実数 ϵ / 存在シナイトキ $= \wedge \varpi(y_n) = -\infty$, 然ラザルトキ $= \wedge$

$$(1) \quad \varpi(y_n) = \epsilon_{\mathcal{N}}. \left\{ y_{n_k} > \epsilon (k=1, 2, \dots), y_n \leq \epsilon (n \neq n_k), (n_1, n_2, \dots) \in \mathcal{N} \right\}$$

トスル。然ルトキ $= \wedge \varpi(y_n) \equiv \varpi(y_n)$ が成立スル。之ヲ証明スルタメニ先ヅ $\varpi(y_n) \geq \varpi(y_n)$ ヲ証明スル。

実数列 $\{y_n^{(0)}\} (n=1, 2, \dots) =$ 對シテ $\varpi(y_n^{(0)}) = -\infty$ / 時 $= \wedge$ 明カニ $\varpi(y_n^{(0)}) \geq \varpi(y_n^{(0)})$ が成立スル。次ニ $\varpi(y_n^{(0)}) > -\infty$ / トキヲ考ヘル、コノ場合 $= \wedge \varpi(y_n)$ ハ (1)ニ定義サレテ居ル。其処ニ $y_{n_k}^{(0)} > \epsilon$, $y_n^{(0)} \leq \epsilon (n \neq n_k)$, $(n_1, n_2, \dots) \in \mathcal{N}$ / 成立スル任意ノ実数 ϵ ヲ取ル。 $\mathcal{N}$ / 定義ニヨリテ実数列 $\{Z_n^{(0)}\} (n=1, 2, \dots)$ ト実数 δ トヲ選ンテ $Z_{n_k}^{(0)} > \delta (k=1, 2, \dots)$, $Z_n^{(0)} \leq \delta (n \neq n_k)$, $\varpi(Z_n^{(0)}) > \delta$ / 成立スル様ニ出來ル。一般性ヲ失ハズニ $\delta = \epsilon$ ト假定スルコトが出來ル。何ントナレバ、定義ニ依リテ実数列 $\{Z_n^{(0)} + (\epsilon - \delta)\} (n=1, 2, \dots) =$ 對シテ $Z_{n_k}^{(0)} + (\epsilon - \delta) > \epsilon (k=1, 2, \dots)$, $Z_n^{(0)} + (\epsilon - \delta) \leq \epsilon (n \neq n_k)$, $\varpi(Z_n^{(0)} + (\epsilon - \delta)) = \varpi(Z_n^{(0)}) + (\epsilon - \delta) > \epsilon$ が成立スルカラデアル。

其処ニ数列

$$Z_n^{(1)} = y_n^{(0)} (n \neq n_k) \quad Z_{n_k}^{(1)} = Z_{n_k}^{(0)} (k=1, 2, \dots)$$

ヲ映ヘテ單調増加連続函数 $\chi_1(x) = \max(x, \epsilon)$ ヲ考ヘル。
 假定 = ヲツテ $y_n^{(0)} \leq \epsilon, z_n^{(0)} \leq \epsilon$ ($n \neq n_k$) デアルカラ
 $\chi_1(z_n^{(1)}) = \chi_1(z_n^{(0)})$ ($n = 1, 2, \dots$) デアル。ソレ故 =

$$\begin{aligned}\chi_1(\psi(z_n^{(0)})) &= \psi(\chi_1(z_n^{(0)})) = \psi(\chi_1(z_n^{(1)})) \\ &= \chi_1(\psi(z_n^{(1)}))\end{aligned}$$

が得ラレル。然ル = $\psi(z_n^{(1)}) > \epsilon$ デアルカラ $\chi_1(\psi(z_n^{(1)})) > \epsilon$
 が成立シ従ツテ又 $\chi_1(\psi(z_n^{(0)})) > \epsilon$ デアル、ソレ故 = $\psi(z_n^{(1)}) > \epsilon$
 が成立スル。

次 = 單調増加連続函数 $\chi_2(x) = \min(x, \epsilon)$ ヲ考ヘ
 ル。

假定 = ヲツテ $y_{n_k}^{(0)} \geq \epsilon, z_{n_k}^{(1)} \geq \epsilon$ ($k = 1, 2, \dots$)
 デアルカラ $\chi_2(y_n^{(0)}) = \chi_2(z_n^{(0)})$ ($n = 1, 2, \dots$) デアル。
 ソレ故 =

$$\begin{aligned}\chi_2(\psi(y_n^{(0)})) &= \psi(\chi_2(y_n^{(0)})) = \psi(\chi_2(z_n^{(1)})) \\ &= \chi_2(\psi(z_n^{(1)}))\end{aligned}$$

が成立スル。然ル = $\psi(z_n^{(1)}) > \epsilon$ デアルカラ $\chi_2(\psi(z_n^{(1)}))$
 $= \chi_2(\epsilon)$ が得ラレ $\chi_2(\psi(y_n^{(0)})) = \chi_2(\epsilon)$ デアル。之 =
 依ツテ $\psi(y_n^{(0)}) \geq \epsilon$ ナルコトが知ラレル。然ル = ϵ ハ
 $\psi(y_n^{(0)}) \geq \epsilon$ ノ成立スル実数デ $\psi(y_n^{(0)})$ ハコノ様ト ϵ ノ
 上端トシテ定義サレルカラ $\psi(y_n^{(0)}) \geq \psi(y_n^{(0)})$ デアル。故
 = 任意ノ実数列 $\{y_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) = 對シテ $\psi(y_n) \geq \psi(y_n)$
 デアル。

次 = $\psi(y_n) \geq \psi(y_n)$ ヲ証明スル。実数列 $\{y_n^{(0)}\}$ ($n = 1,$
 $2, \dots$) = 對シテ $\psi(y_n^{(0)}) = -\infty$ ノ特 = ハ $\psi(y_n^{(0)}) \geq \psi(y_n^{(0)})$

成立スルコトハ明カデア。其処ヲ重($y_n^{(0)}$) $> -\infty$ ノ場合ヲ考ヘル。重($y_n^{(0)}$) $> \eta > -\infty$ ノ成立スル任意ノ実数 η ニ對シテ無理数($n_1, n_2, \dots$)ヲ選ンテ $y_{n_k}^{(0)} > \eta$ ($k=1, 2, \dots$)、 $y_n^{(0)} \leq \eta$ ($n \neq n_k$)ノ成立スル α ヲ出來ル。何ソトナレバ、此ノ α ヲ無理数ノ存在シナイトキニハ $y_n^{(0)} \leq \eta$ ($n=1, 2, \dots$)デアアル。故ニ單調増加連続函数 $\chi(t)$ ヲ定義シテ $t \leq \eta$ ノトキニ $\chi(t) = t$ 、 $t > \eta$ ノ時ニ $\chi(t) = 2t - \eta$ トスレバ、 $\chi(y_n^{(0)}) = y_n^{(0)}$ デアアルカラ $\chi(\text{重}(y_n^{(0)})) = \text{重}(\chi(y_n^{(0)})) = \chi(\text{重}(y_n^{(0)}))$ ノ成立スル。然ルニ $\chi(\text{重}(y_n^{(0)})) > \eta$ デアアルカラ $\chi(\text{重}(y_n^{(0)})) = 2\text{重}(y_n^{(0)}) - \eta$ ノ得ラレ $\text{重}(y_n^{(0)}) = \eta$ トナル。コレハ假定ト矛盾スル。ソレ故ニ要求ヲ滿タス無理数ノ存在スル。夫レ故ニ定義ニ依ツテ $\text{重}(y_n^{(0)}) \geq \eta$ デアアル。從ツテ $\text{重}(y_n^{(0)}) \geq \text{重}(y_n^{(0)})$ ノ得ラレ常ニ $\text{重}(y_n) \geq \text{重}(y_n)$ ノ成立スルコトが判ル。

夫レ故ニ以上ノ結果ヲ綜合シテ $\text{重}(y_n) \equiv \text{重}(y_n)$ ノ導カレル。コノ結果ニ依ツテ $\text{重}(y_n)$ ハ Hausdorff ノ算法デアアルコトヲ証明スルニハ $\text{重}(y_n) = \text{對シテ其ノコトヲ証明スレバヨイコトが判ル。}$

其処ア η ニ對シテ実数ニ關スル算法 $\text{重}^*(y_n)$ ヲ定義シテ $y_{n_k} > \eta$ ($k=1, 2, \dots$) ($n_1, n_2, \dots$) $\in \mathcal{N}$ ノ成立スル実数 η ノ存在シナイトキニハ $\text{重}^*(y_n) = -\infty$ 、然ラザル時ニハ

$$(2) \quad \text{重}^*(y_n) = \sup_{\eta} \{ y_{n_k} > \eta \text{ } (k=1, 2, \dots), (n_1, n_2, \dots) \in \mathcal{N} \}$$

トスル。然ルトキニハ $\Psi(y_n) \equiv \Psi^*(y_n)$ デアル。定義ニ
 依ツテ $\Psi^*(y_n) \geq \Psi(y_n)$ ナルコトハ明カデアル。次ニ
 $\Psi(y_n) \geq \Psi^*(y_n)$ テ証明スル。若シコレが成立シナイト
 スレバ適當ナル実数列 $\{y_n^{(0)}\} (n=1, 2, \dots)$ ニ對シテ
 $\Psi^*(y_n^{(0)}) > \Psi(y_n^{(0)})$ デアル。然ルトキニハ實數九ト無
 理數 $(n_1, n_2, \dots)$ トヲ選ンデ $\Psi^*(y_{n_k}^{(0)}) > \epsilon > \Psi(y_{n_k}^{(0)})$,
 $(n_1, n_2, \dots) \in \mathcal{N}$, $y_{n_k}^{(0)} > \epsilon$ トナシ得ル。其他デ $y_{m_k}^{(0)} > \epsilon$
 $(k=1, 2, \dots)$ $y_m^{(0)} \leq \epsilon (m \neq m_k)$ ノ成立スル無理數
 $(m_1, m_2, \dots)$ ヲ考ヘル。コノ無理數ガ $n_k (k=1, 2, \dots)$
 ヲ含ンデシカモ $\mathcal{N}$ ニ屬サナイコトハ定義ヨリ明ラカデアル。
 今 $\{m_{\nu_k}\} (k=1, 2, \dots)$ デ $(n_1, n_2, \dots)$ ニ含マレナ
 イ m_k ヲ示ス。(コノ様ナ m_k ノ個數ニツイテハ有限個カ可
 附幾個カ判ラナイガ存在スルコトハ確カデアル) 其他デ實數
 列 $\{x_n^{(p)}\} (n=1, 2, \dots; p=0, 1, 2, \dots)$ テ次ノ様ニ定義
 スル。即チ

$$x_{n_k}^{(p)} = 1, \quad x_{m_{\nu_k}}^{(p)} = \frac{p}{p+1} \quad (k, p=1, 2, \dots),$$

$$x_n^{(p)} = 0 \quad (n \neq m_k, p=0, 1, 2, \dots)$$

$$x_{m_k}^{(0)} = 1 \quad (k=1, 2, \dots)$$

然ルトキニハ空間 $\mathcal{R}$ ノ定義ニ依ツテ $\{x_n^{(p)}\} (p=1, 2, \dots)$
 ハ $\{x_n^{(0)}\}$ ニ收斂スル。ソレ故ニ又 $\Psi(x_n^{(p)}) (p=1, 2, \dots)$ ハ
 $\Psi(x_n^{(0)})$ ニ收斂スル。然ルニ $\{x_n^{(p)}\} (p=0, 1, 2, \dots)$ ノ定
 義ニヨツテ $\Psi(x_n^{(p)}) = \Psi(x_n^{(0)}) = 1 (p=1, 2, \dots)$ デ且ツ

$\Phi(x_n^{(0)}) = \Psi(x_n^{(0)}) = 0$ デアル。此ノ事實ハ前ノ結果ト矛盾スル、ソレ故ニ $\Psi(y_n) \geq \Psi^*(y_n)$ が常ニ成立シ、従ツテ $\Psi(y_n) = \Psi^*(y_n)$ デアル、然ルニ $\Psi^*(y_n)$ カモヲ底トスル Hausdorff ノ算法デアルコトが証明サレル。今 $\Psi^{**}(y_n)$ デモヲ底トスル Hausdorff ノ算法トスル。然ルトキニ n ノ任意ノ無理数 $(n_1, n_2, \dots)$ ニ對シテ $y_{n_k} \geq b_{n_k}$ 、 y_{n_k} ($k=1, 2, \dots$) デアルカラ $\Psi^*(y_n) \geq b_{n_k}$ が成立シ、従ツテ $\Psi^*(y_n) \geq \Psi^{**}(y_n)$ デアル。他方面ニテ $\Psi^*(y_n) > \epsilon$ ノ成立スル任意ノ実数 ϵ ニ對シテ $y_{n_k} > \epsilon$ ($k=1, 2, \dots$) ノ成立スル無理数 $(n_1, n_2, \dots)$ カモノ中ニ存在スル。ソレ故ニ $\epsilon \leq b_{n_k} \dots y_{n_k} \leq \Psi^{**}(y_n)$ が得ラレル。 $\Psi^*(y)$ ハコノ様ナ ϵ ノ上端デアルカラ $\Psi^*(y_n) \leq \Psi^{**}(y_n)$ が成立シテ $\Psi^*(y_n) = \Psi^{**}(y_n)$ ナルコトが判ル。故ニ $\Psi^{**}(y_n) = \Psi^*(y_n) = \Psi(y_n) = \Phi(y_n)$ ニ依ツテ $\Phi(y_n)$ ハ Hausdorff ノ算法デアル。 — (証明了) —

次ニ一般ノ実数ニ関スル算法ノ構造ヲ考察シヨウ。 $\Phi(y_n)$ ヲ R ノ部分集合 D デ定義サレタ実数ニ関スル算法トスル。今 $\Phi(y_n)$ ヲ R 全体ニ拡張セテ $R-D$ ノ数列 $\{y_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) ニ對シテ 0 カ對應スル様ニスル。此ノ新シキ算法ヲ $\Phi^*(y_n)$ デ示ス。

任意ノ自然数 p ニ對シテ集合

$$E_n^{(p)} = E_{n0} \{ \Phi^*(y_n) \geq \frac{n}{p} \} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$E_{-\infty}^{(p)} = E_{n0} \{ \Phi^*(y_n) = -\infty \}$$

. 此ノ様ニ 数ヲ夫々 $\Phi_n^{(p)}(y_n)$ トスル時ニハ

$\Phi^{(p)}(y_n) = \text{b. d.} \left\{ \frac{n}{p} \Phi_n^{(p)}(y_n), \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n}{n \rightarrow \infty} - n \Phi_{-\infty}^{(p)}(y_n) \right\}$
 $= \text{對シテ } \Phi^*(y_n) = \overline{\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi^{(p)}(y_n)}$ が得ラレル。然ル=
 $\text{b. d. } y_n, \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{n \rightarrow \infty}$ は opération topologique
 ナアルカラ、 $\Phi^*(y_n) \wedge \Phi_n^{(p)}(y_n)$ 上 = opération
 arithmétique と opération topologique とヲ施
 シテ得ラレル。故ニ $\Phi^*(y_n)$ ノ構造ハ $\Phi_n^{(p)}(y_n)$ ノ構造
 ニ依ツテ知ラレル。然ルニ $\Phi_n^{(p)}(x_n)$ ハ R ノ部分集合ノ特
 性函数ナアルカラ、我々ノ問題ハ R ノ部分集合ノ特性函数
 ノ構造ヲ知ルコトニ帰着サレル。

先ヅ R 上ニアル矩形ノ特性函数ヲ考ヘル。此処ヲ矩形ト
 云フハニツノ実数 $a_k, b_k (a_k \leq b_k)$ と自然数 n_k とノ
 組ノ有限列 $\{(a_k, b_k; n_k)\} (k=1, 2, \dots, \eta)$ = 對シ
 テ $a_k \leq y_{n_k} \leq b_k (k=1, 2, \dots, \eta)$ ヲ満足スル数列
 $\{y_n\} (n=1, 2, \dots)$ ノ集合ノコトナアル。 $\eta=1$ ノ場合
 ニハ矩形ハ $a_1 \leq y_n \leq b_1$ ヲ満足スル数列 $\{y_n\} (n=1, 2, \dots)$
 ノ集合ナアルカラ、其ノ特性函数 $\Phi(y_n; a_1, b_1; n_1)$ ハ
 y_{n_1} 上ニ opération arithmétique と opération
 topologique とヲ施シテ得ラレル。ソシテ一般ノ矩形ノ
 特性函数ハ

$$\prod_{k=1}^{\eta} \Phi(y_n; a_k, b_k; n_k)$$

ナ與ヘラレルカラ、矩形ノ特性函数ハ実数 $y_1, y_2, \dots$ =
 opération arithmétique と opération topologique

トヲ施シテ得ラレル。

次 $= R$ ノ任意ノ部分集合 E 、特性函数 $\chi(y_n)$ ヲ考ヘル。
 $-1 \leq a_k \leq +1$ ($k=1, 2, \dots, n$) ヲ満足スル有理数 a_k ($k=1, 2, \dots, n$) = 對シテ $|\nu(y_k) - a_k| \leq \frac{1}{n}$ ($k=1, 2, \dots, n$) ヲ満足スル矩形ヲ $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$ デ示ス。コレ等ノ矩形ノ集合ハ可附着デアルカラ、夫等ヲ列ニ置クコトが出来ル。ソノ一ツヲ $\{R_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) トスル。然ル
 $= R$ ノ任意ノ一点 p = 對シテ無理数 $(n_1, n_2, \dots)$ ヲ選
 ンデ $(p) = \prod_{k=1}^{\infty} R_{n_k}$ ノ成立スル様ニナシ得ル。コノ $\times$ ウチ無
 理数ノ全体ノ集合ヲ $\mathcal{R}_p$ トスル。然ルトキニハ R ノ部分集合
 E = 對シテ

$$\mathcal{R} = \sum_{p \in E} \mathcal{R}_p$$

トスレバ、 $E = \sum_{\mathcal{R}} \prod_{k=1}^{\infty} R_{n_k}$ デアルカラ、 R_n ノ特性函数

$\chi_n(y_n) =$ 對シテ

$$\chi(y_n) = b. i. \left\{ b. i. \chi_{n_k}(y_n) \right\}$$

が成立スル。即チ $\chi(y_n)$ ハ $\chi_{n_k}(y_n)$ ノ上ニ *opération arithmétique* ト *opération topologique* トヲ施シテ得ラレル。ソレ故ニ以上ノ結果ヲ綜合シテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 2. $\chi(y_n)$ ヲ R ノ部分集合 D デ定義サレタ実数ニ閉スル算法トスル時ニハ R デ定義サレタ実数ニ閉スル算法 $\chi^*(y_n)$ デ次ノ條件ヲ満足スルモノが存在スル。

1°. D ノ凡テノ数列 $\{y_n\} (n=1, 2, \dots)$ = 對シテ
 $\Phi(y_n) \equiv \Phi^*(y_n)$ が成立スル。

2°. $\Phi^*(y_n)$ ハ実数 $y_n (n=1, 2, \dots)$ = opération arithmétique ト opération topologique トヲ施シテ得ラレル。

3. 解析算法ノ構造 前節ノ結果ニ依ツテ解析算法ノ構造ヲ考ヘテ置カウ。先ヅ定義ヲ與ヘル。空間 R デ定義サレタル解析算法 $\Phi(F_n(x))$ ノ中デ次ノ Φ ヲ opération arithmétique ト云フ。

1°. $A(x) + F(x),$

2°. $A(x) \times F(x),$

3°. $F_1(x) + F_2(x),$

4°. $F_1(x) - F_2(x),$

5°. $F_1(x) \times F_2(x),$

6°. $F_1(x) \div F_2(x),$

(但シ、 $A(x)$ ハ R デ定義サレタル一定ノ函数ヲ示ス)
 R デ定義サレタル解析算法ヲ凡テノ局所算法ガ topologique ナルモノヲ opération topologique ト云フ。
 然ルトキニ次ノ結果が得ラレル。

定理 3. 空間 R デ定義サレタル解析算法 $\Phi(F_n(x))$ ハ $F_n(x) (n=1, 2, \dots)$ = opération arithmétique ト opération topologique トヲ施シテ得ラレル。

追記 実数ニ関スル算法 $\Phi(y_n)$ ガ條件

1°. $\Phi(y_n)$ ハ R デ連続ナル。

2°. $\chi(t)$ ヲ $-\infty \leq t \leq +\infty$ デ單調増加連続ナル函数トスルトキニ $\chi(\Phi(y_n)) = \Phi(\chi(y_n))$ ナル。

ヲ満足スルトキ = *topologique* デアルト定義シタガ此処
デ 1° ノ オハ 2° ノ オカラ導クコトが出来ル。

定理 1 ノ証明デ *opération topologique* $\Psi(y_n)$
ガ Hausdorff ノ算術デアルコトヲ示シタガ、ソノ中デ
 $\Psi(y_n)$ ガ R デ連続デアルコトヲ使ツタノハ $\Psi(y_n) \equiv \Psi^*(y_n)$
ノ証明ノ所デアツタ、(記号ハ定理 1, 証明中 $1 \in I$ = 依ル)
併シナガラ、コノ部分ノ証明モ 2° ノミデ出来ル。之レヲ証
明スルニハ $(n_1, n_2, \dots) \in \mathcal{N}$ ノトキ $n_k (k=1, 2, \dots)$
ヲ含ム任意ノ無理数 $(m_1, m_2, \dots)$ (此ノ意味ハ $n_k = m_{\nu_k}$
($k=1, 2, \dots$) ノ成立スル $\nu_k (k=1, 2, \dots)$ ノ存
在スレコトデアル) ガ $\mathcal{N}$ = 含マレルコトヲ示セバ十分デア
ル。今實数列 $\{y_n^{(0)}\} (n=1, 2, \dots)$ ヲ選ンデ次ノ様ニ
スル。

$$m_{\nu_k} = 1 \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$m_j = \frac{1}{2} \quad (j \neq \nu_k, k=1, 2, \dots)$$

$$n = 0 \quad (n \neq m_k, k=1, 2, \dots)$$

然ルトキニハ $(n_1, n_2, \dots) \in \mathcal{N}$ カラ $\Psi(y_n^{(0)}) = 1$ デ
アル。今單調増加連続函数ヲ定義シテ $t \geq \frac{1}{2}$ ノトキ =
 $\chi(t) = 1$, $\chi(0) = 0$ トスレバ $\Psi(\chi(y_n^{(0)})) = \chi(\Psi(y_n^{(0)}))$
= 1 デアル。然ルニ $\Psi(y_n) \equiv \Psi(y_n)$ デアルカラ $\Psi(\chi(y_n^{(0)})) = 1$
ガ成立シ、且ツ

$$\chi(y_{m_k}^{(0)}) = 1 \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\chi(y_n^{(0)}) = 0 \quad (n \neq m_k)$$

デアルカラ、 $\mathcal{N}$ ノ定義ニヨツテ $(m_1, m_2, \dots) \in \mathcal{N}$ デアル。