OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Birkhoff ergodic theorem ト Maximal ergodic theorem, II
Author(s)	吉田, 耕作; 角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 181, p. 287-291
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74724
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

793. Birkhoff ergodic theorem ト Maximal ergodic theorem, II

吉田 耕作，角谷 静夫（阪大）

I. 前談話カラ $f(x)\in L^1$ ナラバ殆ド全テノ点デ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i\cdot x)=f_1(x)$$

が存在スル。コノ $f_1(x)$ ニツイテ

(1) $\boxed{f_1(x)\in L^1}$

ガ云ヘル。$f\geq 0$ ノトキヲモレバ充分デアル。コノトキ

(2)
$$\boxed{\begin{cases}\displaystyle\int_S f_1(x)\,dx\leqq\int_S f(x)\,dx, & =\infty\ \text{ノトキ}\\ \displaystyle\int_S f_1(x)\,dx=\int_S f(x)\,dx & =\text{finite}\ \text{ノトキ}\end{cases}}$$

ヲ証明シヤウ。

（証明）任意ノ $0<\alpha<\beta$ ニツイテ

$$\begin{cases}\alpha\,mes(E(\alpha,\beta))\leqq\displaystyle\int_{E(\alpha,\beta)} f(x)\,dx\leqq\beta\,mes(E(\alpha,\beta))\\ E(\alpha,\beta)=E_x\{\alpha<f_1(x)<\beta\}\end{cases}$$

ガ前談話カラ成立ツ．従ツテ特ニ $mes(E(\alpha,\beta))=\text{finite}$ ナル故ニ積分ノ定義カラ

$$\int_{E(\alpha,\beta)} f_1(x)\,dx=\int_{E(\alpha,\beta)} f(x)\,dx,$$

縦ツテ

$$\int f_1(x)\,dx = \int_{E(0,\infty)} f_1(x)\,dx = \int_{E(0,\infty)} f(x)\,dx \leqq \int f(x)\,dx$$

若シモ $\underline{mes(S) = finite}$ ナラ $\int_S f_1(x)\,dx$

$= \int_S f(x)\,dx$ ガ成立ツ。何者，$f^{(n)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i x) \geqq 0$

且ツ $\int_S f^{(n)}(x)\,dx = \int_S f(x)\,dx$. 然シテ $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = f_1(x)$

almost everywhere ダカラ $\left\{\frac{f(x)+\cdots\cdots+f(T^n(x)}{n}\right\}$，equi-integrability ヲ用ヒ Egoroff，定理ヲ使フト直グワカル。

II. dominated ergodic theorem.

(3) $f \geqq 0$ ガ L^1 モ $L^p\ (p>1)$ モ属スルトスルト

$$f^*(x) = l.u.b._n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i x) \in L^p$$

(4) $f \geqq 0$ ガ L^1 モ Zygmund class モ属スルトスル[1]

然ラバ $f^*(x) \in L^1$

---

(1) Zygmund class ニ属スルト云フハ

$\int f(x)\log^+ f(x)\,dx < \infty$ ナルコト。

証. $E_x\{f^*(x)>\alpha\}$ ナル set ヲ $M^*(\alpha)$ ト置クト前談話カラ

$$(5)\qquad \int_{M^*(\alpha)} f(x)\,dx \geqq \alpha M^*(\alpha).$$

今

$$\begin{cases} h(x)=f(x) & \text{if} \quad f(x)>\dfrac{\alpha}{2} \\ =0 & \text{if} \quad f(x)\leqq\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

ト置ケバ

$$f^*(x)\leqq h^*(x)+\frac{\alpha}{2}$$

従ッテ (5) カラ

$$\begin{cases} mes\,E_x\{f^*(x)>\alpha\}\leqq mes\,E_x\{h^*(x)>\dfrac{\alpha}{2}\} \\ \leqq\dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int_{h^*(x)>\frac{\alpha}{2}} h(x)\,dx\leqq\frac{2}{\alpha}\int h(x)\,dx \\ =\dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int_{f(x)>\frac{\alpha}{2}} f(x)\,dx \end{cases}$$

即チ $M(\alpha)=E_x\{f(x)>\alpha\}$ トヲイテ

$$(6)\qquad \boxed{\alpha M^*(\alpha)\leqq 2\int_{f(x)>\frac{\alpha}{2}} f(x)\,dx=-2\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\infty} y\,d\,M(y).}$$

従ッテ形式的ニ $\nu>0$ トシテ

$$\int_0^\infty M^*(x)x^\nu dx\leqq -2\int_0^\infty x^{\nu-1}dx\left\{\int_{\frac{x}{2}}^\infty y\,d\,M(y)\right\}$$

$$= -2^{\nu+1}\int_0^\infty x^{\nu-1}dx\left\{\int_x^\infty y\,dM(y)\right\}$$

$$= -2^{\nu+1}\int_0^\infty y\,dM(y)\left\{\int_0^y x^{\nu-1}dx\right\}$$

$$= -\frac{2^{\nu+1}}{\nu}\int_0^\infty y^{\nu+1}dM(y)$$

故ニ $\int f(x)^p dx = -\int_0^\infty y^p dM(y) = finite\ (p>1)$ ナラ

(η) $\int_0^\infty M^*(x)\,x^{p-1}dx = finite$

部分積分デハ

$$\int_\eta^\xi M^*(x)\,x^{p-1}dx = \left[\frac{x^p}{p}M^*(x)\right]_\eta^\xi - \int_\eta^\xi \frac{x^p}{p}dM^*(x)$$

故ニ $\lim_{\eta\to 0}\eta^p M^*(\eta) = 0$ 且ツ $\lim_{\xi\to\infty}\xi^p M^*(\xi) = exist$ トス

レバ $-\int_0^\infty x^p dM^*(x) = \int\left\{f^*(x)\right\}^p dx$ exist スル。所

ガ $M^*(x)$ 単調減少カラ (η) ニヨリ

$$\int_{\frac{\xi}{2}}^\xi M^*(x)x^{p-1}dx \geqq M^*(\xi)\int_{\frac{\xi}{2}}^\xi x^{p-1}dx = \frac{\xi^p}{p}M^*(\xi)\left\{1-\frac{1}{2^p}\right\}$$

ヲ得ル。此ノ左辺ハ $\xi\to+\infty$ ノトキ $\to 0$。又同ジク

$\lim_{\eta\to 0}\eta^p M^*(\eta) = 0$ ヲ得レカラ結局

$$f^*(x)\in L^p.$$

次ニ上ト同様ニ<u>形式的ナ</u>方法デ

$$\int_1^\infty M^*(x)\,dx \fallingdotseq -const\int_1^\infty y\,dM(y)\int_1^y \frac{dx}{x}$$

$$= -\text{const} \int_1^\infty y \log y \, dM(y)$$

ヲ得ルカラ $mes(S) = finite$ ナラ $f \in L'$ 且ツ

$f \in$ Zygmund class カラ $-\int_1^\infty x \, dM^*(x) = finite$

即チ $f^*(x) \in L'$ ヲ得ル。