



Title	Eigenwertproblem ノー証明 (續)
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 182, p. 292-305
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74725
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

794. Eigenwertproblem / 一証明(續)

中野 秀五郎

§6. Measure Operator の性質ヲ研究スル前ニ互ニ commutative + Projective Operator ノ計算ヲ擴張シテ置ク。

以下 Operator ハ總テ互ニ commutative + Projective Operator トス。

$P_1, P_2 =$ 對シ $P_1 \dot{+} P_2$ トハ P_1, P_2 ノ表ハス closed linear Mannifold ノ和カラ作ラレ closed linear manifold, Projective Operator ヲ表ハスモトス。即チ P_1 ト P_2 ガ commutative + レヲ以テ

$$P_1 \dot{+} P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_2$$

又

$$P_1 \dot{+} P_2 \dot{+} \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_1 \dot{+} \dots \dot{+} P_n)$$

トス。

$$P_1, P_2, \dots = \text{對シ}$$

$$P'_n = P_n \dot{+} P_{n+1} \dot{+} \dots$$

ト置ケバ

$$P'_1 \geq P'_2 \geq \dots$$

$= \bar{\tau}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P'_n$$

が存在スル。此レヲ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P'_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n}$$

ト定義スル。同様ニ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n P_{n+1} \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

ト定メル。然ル時ハ

定理。Lノ任意ノ element f ニ對シ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|P_n f\| \leq \|\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n f\|$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|P_n f\| \geq \|\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n f\|$$

從ツテ

トキハ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n f\| = \|\lim_{n \rightarrow \infty} P_n f\|$$

$$+ \text{リ。從ツテ } \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n f) = (\lim_{n \rightarrow \infty} P_n) f + \text{リ、}$$

証明

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n + P_{n+1} + \dots)$$

又

$$P_n + P_{n+1} + \dots \geq P_n$$

$$\therefore \|(P_n + P_{n+1} + \dots) f\| \geq \|P_n f\|$$

$$\therefore \|\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n f\| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|P_n f\|$$

同様ニシテ

$$\|\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n f\| \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|P_n f\|$$

§2 = 於テ hyper maximal normal operator

H = 對シ measure Operator $E(X)$ が定義デキ此 $E(X)$

= 對シ

$$(Hf, g) = \int z d(E(X)f, g)$$

ナルコトヲ §3 = テ 証明シタ。此、 $E(X)$ ハ 次ノ 性質ヲ 有ス。

1°. $E(X_1) E(X_2) = E(X_2) E(X_1)$ commutative

2°. X_1, X_2 が 共有 点ナケレバ

$$E(X_1) E(X_2) = 0$$

3°. $X_1, X_2, \dots$ '何レノニヤ' E 共有 点ナケレバ

$$E(X_1 + X_2 + \dots) = E(X_1) + E(X_2) + \dots$$

4°. $E(X)$ 1 manifold X $\supset$ 空 open set $G =$
對スル $E(G)$ 1 manifold, durchsch-
nitt ナリ。

以上ノ X ハ 總テ total additive + open set $\supset$ 空
set class $\{X\} =$ 属スルトス。又、 $E(X)$ ガ hyper
maximal ナルヲ以テ X ガ Gaussian plane 全体
ナリ。即チ $E = I$ ナリ。

3°ヨリ $X_1 \subset X_2$ ナラバ $E(X_1) \subseteq E(X_2)$

ナルコトガワカル。又 X_1, X_2 が 共有 点ナレバ

$$E(X_1 \dot{+} X_2) \supseteq E(X_1), E(X_1 \dot{+} X_2) \supseteq E(X_2)$$

$$\therefore E(X_1 \dot{+} X_2) \supseteq E(X_1) \dot{+} E(X_2)$$

一方 $E(X_1 \dot{+} X_2) = E(X_1) + E(X_2 - X_1, X_2)$
 $\subseteq E(X_1) \dot{+} E(X_2)$

$$\therefore E(X_1 \dot{+} X_2) = E(X_1) \dot{+} E(X_2)$$

一般 =

$$E(X_1 + X_2 + \dots) = E(X_1) + E(X_2) + \dots$$

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) - E(X_1, X_2)$$

$$E(X_1) + E(X_2) = E(X_1) + E(X_2) - E(X_1, X_2)$$

$$\begin{aligned} E(X_1, X_2) &= E(X_1) + E(X_2) - (E(X_1) + E(X_2)) \\ &= E(X_1)E(X_2) \end{aligned}$$

即ち

$$E(X_1, X_2) = E(X_1)E(X_2)$$

一般に

$$E(X_1, X_2, \dots) = E(X_1)E(X_2)\dots$$

故に

$$E\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n\right) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E(X_n)$$

$$E\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n\right) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E(X_n)$$

本節及び次節にて $\mathcal{H}$ separable space 即ち Hilbert.

空間 $\mathcal{F}$ を考へル。

hyper maximal normal Operator H ,
measure Operator に從つて次の性質ヲ有ス。

1° $E(\mathcal{Z})$ は $\mathcal{Z}$ = commutative

2° $E(\mathcal{Z}_1), E(\mathcal{Z}_2)$ = 對シ $E(\mathcal{Z}_1) + E(\mathcal{Z}_2)$ が存在
ス。

3° $E(\mathcal{Z}_1)$ = 對シ $1 - E(\mathcal{Z}_1)$ が存在ス。

4° 從つて $E(\mathcal{Z}_1), E(\mathcal{Z}_2)$ = 對シ $E(\mathcal{Z}_1) \cdot E(\mathcal{Z}_2)$ が
存在ス。

5° $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E(\mathcal{Z}_n), \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E(\mathcal{Z}_n)$ が存在ス。

此ノ如キ性質ヲ有スル Projective Operator $\rightarrow$ Rink
ト云フコト = スル。従ツテ measure Operator ハ
Rinkヲナス。然レモ $\mathcal{G}$ ノ場合ニハ尚次ノ性質ガアル。
今任意ノ measurable set Z = 對シ、 $\mathcal{G}$ 内ノ überal
dicht Element $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ ト
スレバ $\|E(Z)f_n\|$ ハ Z ヲ含ム終テ、open set G = 對
スル $\|E(G)f_n\|$, lower limit = 等シイコトガ容
易ニ証明サレル。従ツテ

$$\|E(G_{n,m})f_n\| < \|E(Z)f_n\| + \frac{1}{m}$$

ナルガ如キ Z ヲ含ム open set $G_{n,m}$ ガ存在スル。
今

$$G_n = G_{1,1}; G_{2,1} \cdot G_{2,2} \cdot G_{3,1} \cdot G_{3,2} \dots G_{n,n}$$

トスレバ

$$G_1 \supset G_2 \supset \dots \rightarrow G_\delta$$

ナルヲ以テ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(G_n) = E(G_\delta)$$

トナル。然ルニ一方

$$\|E(G_n)f_i\| < \|E(Z)f_i\| + \frac{1}{n} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ナルヲ以テ

$$\|E(G_\delta)f_i\| \leq \|E(Z)f_i\| \quad (i=1, 2, \dots)$$

又、 $G_\delta \supset Z$ ヲ

$$E(G_\delta) \geq E(Z)$$

$f_1, f_2, \dots$ ハ überal dicht ナルニヨリ

$$E(G_\delta) = E(Z)$$

ナリ。今 Gaussian plane 上 有理数座標ノ点ヲ
中心トシ、有理数半径ノ円ヲ考フレバ此レハ可附番個ナリ。
従ツテ此等ノ有限個ノ和ヨリナル点集合モ可附番個。其
レヲ

$$C_1, C_2, \dots$$

トス。然ルトキハ G_δ ハ常ニ

$$\overline{\lim_{i \rightarrow \infty} C_{n_i}} = G_\delta$$

ナル如クニ表シ得ルヲ以テ

$$E(\Sigma) = \overline{\lim_{i \rightarrow \infty} E(C_{n_i})}$$

ナリ。即チ measure operator

$$E(C_1), E(C_2), \dots$$

ヲ可附番個適當ニ定ムレバ、他ノ任意ノ measure Operator
 $E(\Sigma)$ ハ其ノ部分別ヲ適當ニトレバ

$$\overline{\lim_{i \rightarrow \infty} E(C_{n_i})} = E(\Sigma)$$

ナラシメ得ル。コノ如キ性質ヲ有スル Rink ヲ separable
ト云フコトヲスル。然ル時ハ

6° measure operator ハ separable Rink
ナリト云フコトヲ得ル。

逆ニ又如何ナル separable Rink モ或ルニツテ、
hyper maximal normal operator, mea-
sure Operator ナルコトハ次ノ如クニシテ証明
サル。

$\{P\}$ $\rightarrow$ Projective operator, separable
Rink トレ

$$P_1, P_2, \dots$$

$\rightarrow$ liberal dicht, 可附番個, operator トスル。

今, $P_1, \dots, P_n$ 有り 和, 積, 差. Complement =
有りテ得ル最小 operator $\rightarrow$

$$P_{n1}, P_{n2}, \dots, P_{nm_n}$$

トス。即チ、此等ハ互 = orthogonal $\Rightarrow \dots \Rightarrow$
及び其ノ Complement ハ $P_{n1}, \dots, P_{nm_n}$ ノ幾ヤカ
ノ和トシテ表ハサル。故ニ當然

$$P_{n1} + P_{n2} + \dots + P_{nm_n} = 1$$

ナリ。備、先ヅ $P_{11} = P_1$ = 対シ Gaussian plane 上,
半径 1 ナル円 C_1 $\rightarrow$ 對應セシムル。

$P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2m_2} =$
對シテハ、夫々半径 $\frac{1}{2}$ ノ円
 $\rightarrow$ 若シ、 $P_{11} =$ 含マレバ内
部 = 含マレガレバ外部 = アル
如ク = シテ円ヲ對應セシムル。

以下同様ニシテ、円

$$C_{11}, C_{2,1}, C_{22}, C_{23}, \dots$$

ヲ得ル。此等ハ何レモ交ハルコトナク、半径 $\frac{1}{2^n}$ ノ円 = 對
シテハ常ニ

$$P(C_{n+1,1}) + P(C_{n+2,2}) + \dots = 1$$

ナリ。次ニ任意ノ open set G = 對シテハ、 G = 含マレ

ル以上ノ内ニ舞スル P ノ和ヨリ作ラレ closed linear manifold / Projective operator $E(G)$ ノ對應セシムル。然ルトキハ

$$1^\circ \quad E(G_1)E(G_2) = E(G_2)E(G_1) = E(G_1 \cdot G_2)$$

$$2^\circ \quad E(G_1 + G_2 + \dots) = E(G_1) + E(G_2) + \dots$$

$$3^\circ \quad E(C_{n,m}) = P_{n,m}$$

ナルコトガ容易ニ証明サレル。又 §1 ト同様ニシテ 一般 measurable set Σ = 拡張スルコトニヨリ measure operator ヲ得ル。コノ measure operator ガ與ヘラレタ Rink ヲ含ムコトハ $P_{n,m}$ ヲ含ムコトヨリ明カナリ。又 measure operator $E(\Sigma)$ ハ

$$E(\Sigma) = E(G_\delta)$$

ナル G_δ ガ存在シ、open set / measure operator ハ Rink = 含マレルヲ以テ其ノ極限 operator ナル $E(G_\delta)$ モ亦 Rink = 含マレル。

故ニ與ヘラレタル Rink ハ

$$(Hf, g) = \int \lambda d(E(\Sigma)f, g)$$

ナル normal operator / measure operator ト一致スル。

然カモ内ヲ有界ノ所ニ作レバ、 H ハ bounded ナリ。

故ニ

定理. Projective Operator / separable Rink = 對シテハ其レヲ measure operator ニスル

hyper maximal normal operator が無限=多
ク存在ス。

次ノ定理ハ重要ナリ。

定理. $\text{Rink } \{P\}$ ノ各々ト commutative =シ
テ $\{P\} =$ 含マレザル Projective Operator $F =$ 對
シテハ、常ニ $\{P\}$ ノ各々ト commutative =シテ F
ト commutative ナラザル Projective Operator
が存在ス。從ツテ $\{P\}$ 各々ト Commutative ナ総
ベテノ Projective operator = commutative
ナ Projective Operator ハ $\{P\} =$ 含マレ
ル。

証明. F ノ manifold 内ノ überal dicht
ナ element $\Rightarrow f_1, f_2, \dots, 1-F$ ノ manifold
内ノ überal dicht ナ element $\Rightarrow g_1, g_2, \dots$
トスル。

然ルトキ、一定ノ $f_i, g_j =$ 對シ、 $P \in \{P\}$ ノ總
テニ動カシテ得ル element

$$P(f_i + g_j)$$

ノ總ベテヨリ作ラレル closed linear manifold
 $\Rightarrow M_{i,j}$ トシ、其ノ Projective Operator $\Rightarrow E_{i,j}$
トスレバ $E_{i,j}$ ハ P ト Commutative ナル。如何
トナレバ $P_1, P_2 \in \{P\}$ ナレバ又 $P_1 \cdot P_2 \in \{P\}$ トナルヲ
以テトリ。 F ガ若シ $E_{i,j}$ ノ總テ ($i=1, 2, \dots, j=1, 2, \dots$) ト
Commutative ナルトスレバ

$$F(f_i + g_j) = P_{i,j}(f_i + g_j) \quad P_{i,j} \in \{P\}$$

＋ $\cup$ $P_{i,j}$ が存在ス。故 $\Rightarrow Fg_j = 0 \exists \cup$

$$Ff_i = P_{i,j}(f_i + g_j)$$

$$\therefore Ff_i = FP_{i,j}(f_i + g_j) = FP_{i,j}f_i = P_{i,j}Ff_i$$

$$Ff_i = f_i \quad + \cup = \exists \cup$$

$$f_i = P_{i,j}f_i$$

$$\therefore Ff_i = f_i + P_{i,j}g_j \quad \therefore P_{i,j}g_j = 0$$

△

$$P_j = P_{1,j} + P_{2,j} + \dots$$

トスレバ $P_j \in \{P\} = \exists \tau$

$$P_j g_j = 0$$

$$P_j f_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$f_1, f_2, \dots$ ハ F 1 manifold 内 $=\tau$ überall
dicht + $\cup \tau$ 以 τ

$$P_j F = F$$

＋ $\cup$ 。

又 $P_0 = P_1 P_2 \dots$ トスレバ $P_0 \in \{P\} = \exists \tau$

$$P_0 F = F$$

$$P_0 g_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

g_j ハ $1-F$ 1 manifold 内 $=\tau$ überall dicht +
 $\cup = \exists \cup$

$$P_0(1-F) = 0$$

$$\therefore P_0 = P_0 F = F$$

従 τ F が $\{P\} = \cup$ フレ $\cup$ コトトナル。

§7. §5 = 於テ一ツノ hyper maximal + measure Operator $E(z)$ = 對シ、 $f(z)$ ヲ殆速連続函数トスル
トキハ

$$(Hf, g) = \int f(z) d(E(z)f, g)$$

= ヨリ一ツノ hyper maximal normal operator
ガ與ヘテレルコトヲ述ベヌ。此処デハ如何ナル場合 = hyper-
maximal normal operator H ガ上ノ如キ積分
= テ表ハサレルカヲ考ヘル。

定理. hyper maximal normal operator
 H ガ measure operator $E(z)$ = 關シ、以上ノ如キ
積分形 = テ表ハサレルタメノ必要且ツ充分ノ條件ハ H ノ
measure Operator $F(z)$ ノ Rink が $E(z)$ ノ Rink
= 含マレルコトトデアル。

証明. 今

$$(Hf, g) = \int f(z) d(E(z)f, g)$$

ナル形 = 表ハサレタリトスル。然ルトキハ $H^k f$ ガ linear off
ナル f = 對シテハ

$$\left\| \left(\frac{H - z_0}{r_0} \right)^k f \right\|^2 \int \left| \frac{f(z) - z_0}{r_0} \right|^{2k} d\|E(z)f\|^2$$

故 =

$$\left\| \left(\frac{H - z_0}{r_0} \right)^k f \right\| \leq \|f\| \quad (k=1, 2, \dots)$$

ナル f ハ

$$\left| \frac{f(z) - z_0}{r_0} \right| \leq 1$$

ナル点 z_0 ノ 場合也。 (此レハ $f(z)$ が殆速統ナルヲ以テ
 Lousin の定理ヨリ $\|E(z)f\|^2 =$ 関シ measurable)

從ツテ z_0 ノ 中心, 半径 r_0 ノ 円 $\overline{C}_0 =$ 對シテハ

$$F(\overline{C}_0) \subseteq E(z_0)$$

又, $E(z_0)f = f$ + element ノ 明カ = 條件 = 通スル
 ヲ以テ

$$F(\overline{C}_0) = E(z_0)$$

然ルニ $F(z)$ ハ $F(\overline{C}_0)$ ノ 部分列ノ 極限ナルヲ以テ Rink
 $\{F(z)\}$ ハ $\{E(z)\} =$ 含マレル。

逆 = $\{F(z)\}$ が $\{E(z)\} =$ 含マレタス。

$$(Hf, g) = \int z d(F(z)f, g)$$

充分大ナル円ヲ C トスルニ

$$\begin{aligned} (HF(C)f, g) &= \int_C z d(F(z)f, g) \\ &= \lim \sum_{i=1}^n z_i (F(z_i)f, g) \end{aligned}$$

$$\{F(z)\} \subset \{E(z)\} \text{ ヲリ}$$

$$F(z_i) = E(W_i)$$

ナル $E(W_i)$ が存在スル。

$$f_n(z) = z_i \quad \text{in } W_i \\ = 0 \quad \text{他ノ点ニテハ}$$

ナル函数ニ對シテ、 $f_n(z)$ ハ明カニ measurable 有界。
從ツテ殆速統ニシテ

$$\sum_{i=1}^n z_i (F(z_i) f, g) = \int f_n(z) d(E(W) f, g)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f_c(z)$$

トスレバ

$$(H F(c) f, g) = \int f_c(z) d(E(W) f, g)$$

$c \rightarrow \infty$ ナラシムレバ $f_c(z) \rightarrow f(z)$ ナル $f(z)$ 存在
スルヲ以テ

$$(H f, g) = \int f(z) d(E(W) f, g)$$

又 definitionsbereich カ

$$\|H f\|^2 = \int |f(z)|^2 d\|E(W) f\|$$

ヨリ定マル。

此ノ定理ヨリ次ノ *Freumann* ノ定理カ直チニ得ラ
レル。

定理. hyper maximal^d Operator $H_1, H_2, \dots$ カ互ニ commutative (commutative,
定義ハ如何ナル方法ニヨルモ結局ハ其ノ measure

Operator同志が commutative + ルコト = 帰着スル) + ルトキハーツノ measure Operator $E(z)$ が存在シテ

$$(H_i f, g) = \int f_i(z) d(E(z) f, g)$$

+ ル形 = 表ハサレル。

証明. $H_1, H_2, \dots$ ノ measure Operator + ルヲ以テ結局其レ等ノ全体ニテ作ル Ring π separable + リ, 其ノ Ring ヲ

定理. hyper maximal Operator H が N ノ函数トシテ表ハサレルタメノ必要且ツ充分ノ條件ハ H が N ト commutative + 終ベテ Projective Operator ト commutative + ルコトナリ。

証明. 前節ノ定理 = ヨリ H ノ measure operator ノ Ring が N ノ其レ = 含コレルコト + ルカラデアアル。此ノ定理 Neumann, Riess, ≡ 桂氏等 = ヨリテ証明サレテナル。

§6, §7 = 於テハ §7ノ最初ノ定理以外ハ separable + シテハ今ノ所未ダ出来マセン。之レハ Ringノ separable ヲ用ヒテ居リマスノデ。若シ之レ = 換レモノガ考ヘラレバ一般ノ場合 = モ出来マス。目下研究中。