



Title	Eigenwertproblem ノー証明 (訂正)
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 182, p. 306-311
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74726
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

795. Eigenwertproblem 1 - 証明 (訂正)

中野 秀五郎

(1°) §7ノ訂正, §7 = Te Heumannノ定理トシ, 可
附番個ノ互 = commutative + normal opera-
tor $H_1, H_2, \dots$ ハ適當ナル一ツノ normal operator
ノ函数デアレ所ノ可附番個ハ不必要デアイル。如何
トナレバ Commutative Ring ハ常 = separable
ナルコトガ次ノ如クニシテ証明サレイル。

今 $\{F\}$ ノ Projective Operator, Com-
mutative Ring トスル。 $f_1, f_2, \dots$ ノ
Hilbertspace $\mathcal{H}$ = Te überall dicht ナリト
ス。然シテ $\{F\}$ ノ從テ $F =$ 對シテ

$$(\|Ff_1\|^2, \dots, \|Ff_n\|^2)$$

ナル n 次元空間ノ点集合ヲ考ヘルト, n 次元空間
ハ separable ナルヲ以テ, 可附デ überall
dicht ナル様ナ $F_{n,1}, F_{n,2}, \dots$ ガ存在ス。然
ルトキハ

$$F_{i,j} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots \\ j=1,2,\dots \end{pmatrix}$$

ナル Operator ガ $\{F\} =$ Te überall dicht デ
アル。如何トナレバ $\{F\} =$ 属ナル任意ノ $F =$ 對シ

$$|\|F_{m,j}f_i\|^2 - \|Ff_i\|^2| < \varepsilon_n \quad (i=1,2,\dots,n)$$

ニシテ, 且ツ

$$\|Ff_i - f_{h_i}\| < \varepsilon_n \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ナル $f_1, f_2, \dots$ 内、 f_{h_i} 一対シテモ

$$|\|F_{m,j} f_{h_i}\|^2 - \|Ff_{h_i}\|^2| < \varepsilon_n$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

ナルが如キ $F_{m,j}$ ガ存在ス。此、 $F_{m,j}$ ヲ $F^{(n)}$ ト記セバ、上ノ三ツノ不等式ヨリ

$$|\|F^{(n)} f_i\|^2 - \|Ff_i\|^2| < \varepsilon_n$$

$$|F^{(n)} Ff_i - F^{(n)} f_{h_i}| < \varepsilon_n, \quad |Ff_i - Ff_{h_i}| < \varepsilon_n$$

$$|\|F^{(n)} f_{h_i}\|^2 - \|Ff_{h_i}\|^2| < \varepsilon_n$$

従ツテ

$$|\|F^{(n)} Ff_i\|^2 - \|F^{(n)} f_{h_i}\|^2| < \varepsilon_n$$

$$|\|Ff_i\|^2 - \|Ff_{h_i}\|^2| < \varepsilon_n$$

故ニ

$$|\|F^{(n)} Ff_i\|^2 - \|Ff_i\|^2| < 3\varepsilon_n$$

又

$$\|F^{(n)} Ff_i\|^2 > \|Ff_i\|^2 - 3\varepsilon_n$$

$$\therefore \|F^{(n+1)} Ff_i\|^2 > \|Ff_i\|^2 - 3\varepsilon_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|F^{(n)} Ff_i\|^2 + \|F^{(n+1)} Ff_i\|^2 &> 2\|Ff_i\|^2 \\ &\quad - 3(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) \end{aligned}$$

即チ、

$$\begin{aligned} &| (F^{(n)} - F^{(n)} F^{(n+1)}) Ff_i \|^2 + \| (F^{(n+1)} - F^{(n)} F^{(n+1)}) Ff_i \|^2 \\ &\quad + 2\|F^{(n)} F^{(n+1)} Ff_i\|^2 \geq 2\|Ff_i\|^2 \\ &\quad \quad \quad - 3(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) \end{aligned}$$

然ルニ

$$\| (F^{(n)} - F^{(n)} F^{(n+1)}) F f_i \|^2 + \| (F^{(n+1)} - F^{(n)} F^{(n+1)}) \|^2 \\ + \| F^{(n)} F^{(n+1)} F f_i \|^2 \leq \| F f_i \|^2$$

$$\therefore \| F^{(n)} F^{(n+1)} F f_i \|^2 \geq \| F f_i \|^2 - 3 (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1})$$

同様ニシテ

$$\| (F^{(n)} F^{(n+1)} \dots) F f_i \|^2 \geq \| F f_i \|^2 - 3 (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \dots)$$

$$\therefore \| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} \right) F f_i \|^2 \geq \| F f_i \|^2 - 3 (\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \dots)$$

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots$ 7 収斂スル如ク取レバ

$$\| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} \right) F f_i \|^2 \geq \| F f_i \|^2 \quad (i=1, 2, \dots)$$

然レバ

$$\| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} \right) f_i \|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \| F^{(n)} f_i \|^2 = \| F f_i \|^2$$

ナルベキニ至ル

$$\| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} \right) f_i \|^2 = \| F f_i \|^2$$

f_i は überall dicht ナルニ至ル

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} = F$$

故ニ、 $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots$ ハ $\{F\}$ 内ニ überall dicht

ナル。

2°. §6ニ於テ Ring $\{E\}$ ト Commutative ニシテ $\{E\}$

ニ含マレザル F ニ對シテハ $\{E\}$ ト Commutative

ニシテ F ト Commutative ナラザル P ガ存在スル。

トイフ定理ノ証明中ニテ、 F / manifold 内ノ

element f_i , $1-F$ / manifold 内ノ element

g_i ニ對シ、 $E \in \{E\}$ ノ總テニシタ時ニ $E(f_i + g_i)$

ヨリ作ラレル closed linear manifold ト F トガ
commutative ナル時ニハ

$$F(f_i + g_i) = E_{i,j}(f_i + g_j)$$

ナル $E_{i,j}$ ガ存在ストセシガ此レハ正シカラズ。故ニ次
ノ如クニ改ム。 $\{E\}$ ノ §7 ノ定理ニテ bounded
Hermitian, measure operator $E(x)$ トス
レバ (normal) ノ場合ヲ証明セシガ用ノカハリニ実
軸上ノ線分ヲ取レバ Hermitian トナル)

Stone ノ定理ヨリ、 $E(x)(f_i + g_i) =$ テ作
ラレル closed linear manifold 内ノ任意ノ
element f ハ

$$(f, g) = \int \Phi_f(x) d(E(x)(f_i + g_i), g)$$

ニテ與ヘラレムガ如キ measurable function
 $\Phi_f(x)$ ガ存在ス。コノ定理ヨリ、 F ト $E(x)(f_i + g_i)$
ヨリ作ラレル closed linear manifold, Pro-
jective Operator ガ Commutative ナラバ (後
者ガ $\{E\}$ ト Commutative ナコトハ明カ)

$$(F(f_i + g_i), g) = \int \Phi(x) d(E(x)(f_i + g_i), g)$$

ナル $\Phi(x)$ ガ存在ス。故ニ

$$\begin{aligned} \|F(f_i + g_i)\|^2 &= \int \|\Phi(x)\|^2 d\|E(x)(f_i + g_i)\|^2 \\ &= \int \|\Phi(x)\|^2 d\|E(x)f_i\|^2 + \int \|\Phi(x)\|^2 d\|E(x)g_i\|^2 \end{aligned}$$

然ルニ、 $F(f_i + g_i) = Ff_i$. g ノ所ハ Fg ヲ入レ
テ

$$(Ff_i, g) = \int |\Phi(z)|^2 d(E(z)f_i, g)$$

従ツテ

$$\|Ff_i\|^2 = \int |\Phi(z)|^2 d\|E(z)f_i\|^2$$

故ニ

$$\int |\Phi(z)|^2 d\|E(z)g_i\|^2 = 0$$

$|\Phi(z)|^2 > 0$ ナル z ノ 集合ヲ Z_0 トスレバ、従ツテ

$$\|E(Z_0)f_i\|^2 = 0 \quad \therefore E(Z_0)f_i = 0$$

又

$$((1-E(Z_0))Ff_i, g) = \int_{Z_0 \text{ Complement}} |\Phi(z)|^2 d(E(z)f_i, g) = 0$$

$$\therefore (1-E(Z_0))Ff_i = 0$$

$$\therefore E(Z_0)f_i = f_i \quad (\because Ff_i = f_i)$$

此ノ $E(Z_0)$ ヲ $E_{i,j}$ トスレバ

$$E_{i,j}f_i = f_i, \quad E_{i,j}g_j = 0$$

トナリテ、後ハ前ノ証明ニテ可ナリ。

§6, §7ニテハ Hilbert spaceノミニテ考ヘシニ、

一般 Euclid spaceニ對シテハ Ringノ separabilityヲ次ノ如クニ定義スレバ、§6, §7ノ大部分ハ同様ニシテ拡張ヲヤル。

定義. Ring $\{E\}$ ガ separableトハ $\{E\}$ ノ

中ニテ高々可附番個ノ $E_1, E_2, \dots$, ヲ取ルトキ, $E_1, E_2, \dots$ ヲ含ム最小 Ring が $\{E\}$ ト一致スルコトナリ。

measure operator $E(\Sigma)$ が separable ナ
レコトハ中心, 半径ガ有理数ナルガ如キ円ヲ考フレバ明
カナリ。又 Ring $\{E\}$ ハ必ズシテ separable ナ
イコトハ, orthogonal system $\{f\}$ ガ可附以上
ナルトキ此等ヨリ作ラレル Ring ハ明カニ separable
ナラズ。

又此処ニテ訂正セル定理ノ証明ハ, ウマク行カズ
目下研究中ナリ。