



Title	Eigenwertproblem ノー証明 (續)
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 182, p. 311-324
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74727
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

796. Eigenwertproblem, — 証明 (續)

中 野 秀 五 郎

§ 8. Normal operator, 函数. J. v. Neumann
の Über Funktion von Funktionaloperator
(Annals of. Math. 32) = τ bounded normal
operator, 有限個或ハ可附番個, 函数ヲ define シタ。
此処デハ其レトハ全然異ナル方法 = τ Massoperator,
考ヘ = τ 高々可附番個, hypermaximal normal
operator, 函数ヲ define シテ見ル。

有限或ハ可附番個, hypermaximal normal

operator $\gamma N_1, N_2, \dots$ トシ其 Massoperator γ
 夫々 $E_1(z_1), E_2(z_2), \dots$ トス。 $z_1, z_2, \dots$ ハ夫々
 Gaussian plane G 上 measurable set γ 表
 スルナルモ、此処ニテハ $G =$ 無限遠迄ヲ加ヘ G γ Rie-
 mann 球ト考ヘル。然シテ有限或ハ無限個 Riemann
 球 $G_1, G_2, \dots$ 上ノ点ヲ夫々 $z_1, z_2, \dots$ トシ $(z_1, z_2,$
 $\dots)$ ナル点ノ全体即チ torus space $\mathcal{T}$ γ 考ヘ、
 $\mathcal{T}$ ノ点集合 = Massoperator γ 次ノ如ク define
 スル。

$G_1, G_2, \dots$ 上ノ任意ノ円 $C_1, C_2, \dots$ トシ。
 $C(C_1, C_2, \dots, C_n, G_{n+1}, G_{n+2}, \dots)$ ナル $\mathcal{T}$ 上
 ノ点集合 γ $\mathcal{T}$ ノ円ト呼アコトシ、此ノ如キ円 = ハ
 $E(C) = E_1(C_1) E_2(C_2) \dots E_n(C_n)$ ナル Projective
 operator γ 對應セシムル。然シテ $\mathcal{T}$ 上ノ任意ノ集合 M
 = ハ M γ 高々可附番個ノ円 $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots$ = テ覆
 ヒ、

$$E(C^{(1)}) + E(C^{(2)}) + \dots$$

ナル Projective operator 総テ Durchschnitt
 $E^*(M) \gamma M =$ 對應セシムル。然ルトキハ円 $C(C_1, C_2, \dots,$
 $C_n, G_{n+1}, \dots)$ = 對シテハ

$$E^*(C) = E(C)$$

ナリ。如何トナレバ、今円 C $\gamma C^{(1)}, C^{(2)}, \dots$ = 覆ヒ
 タリトシ、又 $G_1, G_2, \dots$ 上ノ円 $C_1, C_2, \dots$ = 對シ、
 同一中心ノ半径ガヨリ小ナル開円 $\overline{C_1}, \overline{C_2}, \dots$ = 對シ

$$\overline{C}(\overline{C}_1', \overline{C}_2', \dots, \overline{C}_n', G_{n+1}, \dots)$$

ハ $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots$ / 有限個ニテ覆ハレル。 (如何トナ
レバ Leine - Borel / 定理ガ Euclid 空間 / 場合ト
全然同様ニシテ証明シ得レバナリ。) 今 $\overline{C}$ ガ

$$C^{(1)}(C_1^{(1)}, C_2^{(2)}, \dots, C_{m_1}^{(1)}, G_{m+1}, \dots)$$

$$C^{(2)}(C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \dots, \dots)$$

$$C^{(m)}(C_1^{(m)}, C_2^{(m)}, \dots, \dots)$$

ニテ覆ハレタトスル。 $\{C_1^{(1)}, \dots, C_1^{(m)}, \overline{C}_1'\}$ / Menge
ヨリタル Ring / Minimal set $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, \dots$ ト
スレバ。 $C_1^{(1)}, \dots, C_1^{(m)}, \overline{C}_1' \supset M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, \dots$ /
有限個ノ和トシ表ハサレ、 $\dots$ ハ何レノ $\in$

共有スル。然ルモ $E_1(\Sigma_1) = \text{閉シ measurable}$ タルコ
トモ明カナリ。同様ニシテ $C_1^{(1)}, \dots, C_2^{(m)}, \overline{C}_2'$ / 又其ノ
以下 $\in$ 夫ノ Minimal set $M_2^{(1)}, M_2^{(2)}, \dots$ / 作ル
モノトスレバ

$$\begin{aligned} & E(C^{(1)}) + E(C^{(2)}) + \dots + E(C^{(m)}) \\ &= E_1(C_1^{(1)}) E_2(C_2^{(1)}) \dots E_{m_1}(C_{m_1}^{(1)}) + \dots \\ &= E_1\left(\sum_i M_1^{(i)}\right) E_2\left(\sum_i M_2^{(i)}\right) \dots E_{m_1}\left(\sum_i C_{m_1}^{(i)}\right) + \dots \\ &= \left(\sum_i E(M_1^{(i)})\right) \left(\sum E_2(M_2^{(i)})\right) \dots \left(\sum_i E_{m_1}(C_{m_1}^{(i)})\right) + \dots \\ &\geq E_1(\overline{C}_1') E_2(\overline{C}_2') \dots E_n(\overline{C}_n') \end{aligned}$$

故ニ $\overline{C}_1' \rightarrow C_1, \overline{C}_2' \rightarrow C_2, \dots, \overline{C}_n' \rightarrow C_n$ ナリシ

ムレバ

$$E(C^{(1)}) + E(C^{(2)}) + \dots$$

$$\geq E_1(C_1) E_2(C_2) \dots E_n(C_n) = E(C)$$

$$\therefore E^*(C) \geq E(C)$$

又定義ヨリ當然 $E^*(C) \leq E(C)$ ナルヲ以テ

$$E^*(C) = E(C)$$

然レモ上ノ証明ヨリ円 C ヲ円 $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots$ デ被フ時

ハ、常ニ

$$E(C) \leq E(C^{(1)}) + E(C^{(2)}) + \dots$$

ナリ。高々可附番個ノ円ノ和ヨリナル集合ヲ open set ト名ヅケルトキハ、円自身ハ open set ナリ。

然ルトキハ高々可附番個ノ open set $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots$ ノ和 $G^{(1)} + G^{(2)} + \dots$ モ亦 open set ニシテ、上ノ性質ヨリ

$$E^*(G^{(1)} + G^{(2)} + \dots) \leq E^*(G^{(1)}) + \dots$$

又一方, definition ヨリ

$$E^*(G^{(1)} + \dots) \geq E^*(G^{(1)})$$

$$E^*(G^{(1)} + \dots) \geq E^*(G^{(2)})$$

$$\therefore E^*(G^{(1)} + \dots) \geq E^*(G^{(1)}) + \dots$$

$$\therefore E^*(G^{(1)} + \dots) = E^*(G^{(1)}) + E^*(G^{(2)}) + \dots$$

$$E(C^{(1)}) E(C^{(2)}) = E_1(C_1^{(1)} C_1^{(2)}) E_2(C_2^{(1)} C_2^{(2)}) \dots$$

$$= 0$$

故 = open set $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ が共有点ナレバ

$$E(G^{(1)})E(G^{(2)}) = 0$$

open set $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ / durchschnitt $G^{(1)}G^{(2)}$

ハ又 open set ナリ。如何トナレバ = 用

$$C^{(1)} = (C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_n^{(1)}, G_{n+1}, \dots)$$

$$C^{(2)} = (C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \dots, C_m^{(2)}, G_{m+1}, \dots)$$

= 對シ、 $n+m$ 次元 komplex Euclid 空間 = τ =

用

$$C^{(1)} = (C_1^{(1)}, \dots, C_n^{(1)}, G_{n+1}, \dots, G_{n+m})$$

$$C^{(2)} = (C_1^{(2)}, \dots, G_{n+m})$$

= 對シ $C^{(1)}C^{(2)}$ が高々可附番個ノ用ノ和トシテ表ハサレ、

此等ノ用 = $G_{n+m+1}, \dots$ ヲ附加スレバ、 $C^{(1)}C^{(2)}$ が $\mathcal{G}$ =

open set ナルコトガワカル。open set ヲ用ヒレバ

任意ノ集合 M = 對シテ、 $E^*(M)$ トハ M ヲ含ム總テノ open

set G / $E^*(G)$ / durchschnitt ナリトイフコト

が出来る。コノ場合 f が Hilbert space / element

ナルトキハ $\|E^*(M)f\| \wedge \|E^*(G)f\|$ / lower

limit ナルコトガ容易ニ証明サレル。故ニ = 集合 $M^{(1)}, M^{(2)}$

及ビ任意ノ f = 對シテ

$$\|E^*(M^{(1)})f\|^2 + \varepsilon_1 \geq \|E^*(G^{(1)})f\|^2 \quad (\varepsilon_1 > 0)$$

$$\|E^*(M^{(2)})f\|^2 + \varepsilon_2 \geq \|E^*(G^{(2)})f\|^2 \quad (\varepsilon_2 > 0)$$

ナル $M^{(1)}$ 、及ビ $M^{(2)}$ ヲ夫々含ム open set $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ が

存在ス。又 open set $G^{(1)} \div G^{(2)} \wedge M_1 \div M_2$ ヲ含

ムヲ以テ

$$\begin{aligned}
\|E^*(M^{(1)} + M^{(2)})f\|^2 &\leq \|E^*(G^{(1)} + G^{(2)})f\|^2 \\
&= \|(E^*(G^{(1)}) + E^*(G^{(2)}))f\|^2 \\
&\leq \|E^*(G^{(1)})f\|^2 + \|E^*(G^{(2)})f\|^2 \\
&\leq \|E^*(M^{(1)})f\|^2 + \|E^*(M^{(2)})f\|^2 \\
&\quad + \varepsilon_1 + \varepsilon_2
\end{aligned}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は任意に与えられる

$$\begin{aligned}
\|E^*(M^{(1)} + M^{(2)})f\|^2 &\leq \|E^*(M^{(1)})f\|^2 + \|E^*(M^{(2)})f\|^2 \\
&= \|(E^*(M^{(1)}) + E^*(M^{(2)}))f\|^2 \\
&\quad + \|E^*(M^{(1)})E^*(M^{(2)})f\|^2 \\
\therefore \|(E^*(M^{(1)} + M^{(2)}) - E^*(M^{(1)})E^*(M^{(2)}))f\|^2 \\
&\leq \|(E^*(M^{(1)}) + E^*(M^{(2)}))f\|^2
\end{aligned}$$

f は任意に与えられる

$$(\#) \quad E^*(M^{(1)} + M^{(2)}) - E^*(M^{(1)})E^*(M^{(2)}) \leq E^*(M^{(1)}) + E^*(M^{(2)})$$

又、定義より直ちに

$$E^*(M^{(1)} + M^{(2)}) \geq E^*(M^{(1)}) + E^*(M^{(2)})$$

$$(\#) \quad E^*(M^{(1)}M^{(2)}) \leq E^*(M^{(1)})E^*(M^{(2)})$$

集合 M , Complement, $M' = \bar{M}$ 表はるコトスル。

$$E^*(M)E^*(M') = 0$$

とルガ如き集合 M を measurable set と定義シ、

$E^*(M) = E(M)$ と記スコトスル。又 $\mathcal{T}$ は measurable

トスル。 M が measurable とルトキハ (#) 有り

$$E(\mathcal{T}) = E^*(M + M') \leq E(M) + E(M')$$

故に

$$1 = E(\mathcal{T}) = E(M) + E(M')$$

又 $M \neq \text{measurable}$ $M^{(1)} \neq M M^{(1)} = 0$ + ν 任意ノ集合ト
スレバ

$$M' \supset M^{(1)}$$

ヨリ

$$E(M') \geq E^*(M^{(1)})$$

$$\therefore E^*(M^{(1)}) \cdot E(M) = 0$$

故ニ (#) ヨリ

$$E^*(M^{(1)} + M) = E^*(M^{(1)}) + E(M)$$

$M^{(1)}$ $\neq$ 任意ノ集合トスレバ

$$\begin{aligned} E^*(M^{(1)} \dot{+} M) &= E^*((M^{(1)} - M^{(1)}M) + M) \\ &= E^*(M^{(1)} - M^{(1)}M) + E(M) \\ &\leq E^*(M^{(1)}) \dot{+} E(M) \end{aligned}$$

故ニ (#) ヨリ

$$E^*(M^{(1)} \dot{+} M) = E^*(M^{(1)}) \dot{+} E(M)$$

$M^{(1)} \neq \text{measurable}$ トスレバ

$$E^*(M^{(1)} \dot{+} M) = E(M^{(1)}) \dot{+} E(M)$$

$$E^*(M^{(1)'} M') \leq E(M^{(1)'}) \cdot E(M') = 1 - (E(M^{(1)}) \dot{+} E(M))$$

$$\therefore E^*(M^{(1)} \dot{+} M) \cdot E^*(M^{(1)'} M') = 0$$

$$\text{然レ } (M^{(1)} \dot{+} M)' = M^{(1)'} M' + \nu \neq \text{測度}$$

$$M^{(1)} \dot{+} M, M^{(1)'} M' \neq \text{measurable} = \nu \neq$$

$$E(M^{(1)} \dot{+} M) = E(M^{(1)}) \dot{+} E(M)$$

$$E(M^{(1)} M) = E(M^{(1)}) E(M)$$

又 $M^{(1)} \supset M$ が $\neq \text{measurable}$ + $\nu \neq$, $M^{(1)} M'$ 即チ

$M^{(1)} - M \in \text{measurable} = \nu \neq$

$$E(M^{(1)} - M) = E(M^{(1)}) - E(M)$$

又 $M^{(1)}, M^{(2)}, \dots$ が悉く measurable $\Rightarrow$ 何れノ
ニツモ共有点ナキ $\epsilon / \text{ト入}$,

$$M = M^{(1)} + M^{(2)} + \dots$$

ト置ケバ、定義ヨリ直チ =

$$E^*(M) \geq E(M^{(1)}) + E(M^{(2)}) + \dots$$

又任意ノ $f =$ 対シテ

$$\|E(M^{(n)})f\|^2 + \varepsilon_n > \|E^*(G^{(n)})f\|^2$$

($\varepsilon_n > 0$)

ナルカ如キ M^n 中 $\text{open set } G^{(n)}$ が存在スルヲ以
テ

$$\begin{aligned} \|E^*(M)f\|^2 &\leq \|E^*(G^{(1)} \dot{+} G^{(2)} \dot{+} \dots)f\|^2 \\ &= \|(E^*(G^{(1)}) \dot{+} E^*(G^{(2)}) \dot{+} \dots)f\|^2 \\ &\leq \|E^*(G^{(1)})f\|^2 + \|E^*(G^{(2)})f\|^2 + \dots \\ &\leq \|E(M)f\|^2 + \|E(M^{(2)})f\|^2 + \dots \\ &\quad + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots) \end{aligned}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ ハ任意ナルヲ以テ

$$\|E^*(M)f\|^2 \leq \|(E(M^{(1)}) + E(M^{(2)}) + \dots)f\|^2$$

f ハ任意ナルヲ以テ

$$E^*(M) \leq E(M^{(1)}) + E(M^{(2)}) + \dots$$

故 =

$$E^*(M) = E(M^{(1)}) + E(M^{(2)}) + \dots$$

又

$$E^*(M') \leq E(M^{(1)'}) + E(M^{(2)'}) + \dots = 1 - E^*(M)$$

$$\therefore E^*(M') E^*(M) = 0 \quad \text{即ち } M \text{ は measurable}$$

故 = 又

$$E(M') = E(M^{(1)'}) E(M^{(2)'}) \dots$$

次 = 用 $(C_1, C_2, \dots, C_n, G_{n+1}, \dots)$ が measurable なるコトヲ証明スル。 $C_1, C_2, \dots, C_n =$ 各マレ用 $K_1, K_2, \dots, K_n$ 其ノ閉用 $\overline{K_1}, \overline{K_2}, \dots$ トスレバ, Complement $\overline{K_1}', \overline{K_2}', \dots$ ハ又用ナリ、然カニ

$$(C_1, C_2, \dots, C_n, G_{n+1}, \dots)'$$

$$\subset (\overline{K_1}', G_2, G_3, \dots) \dot{+} (G_1, \overline{K_2}', G_3, \dots) \dot{+} \dots$$

故 =

$$E^*((C_1, C_2, \dots, C_n, G_{n+1}, \dots)')$$

$$\leq E^*((\overline{K_1}', G_2, \dots) \dot{+} \dots)$$

$$= E_1(\overline{K_1}') \dot{+} E_2(\overline{K_2}') \dot{+} \dots$$

$$= 1 - E_1(\overline{K_1}) E_2(\overline{K_2}) \dots E_n(\overline{K_n})$$

$K_1 \rightarrow C_1, K_2 \rightarrow C_2, \dots, K_n \rightarrow C_n$ ナラシムレバ

$$E^*((C_1, C_2, \dots, C_n, G_{n+1}, \dots)')$$

$$\leq 1 - E((C_1, C_2, \dots, C_n, G_{n+1}, \dots))$$

故 = 用ハ measurable ナリ。故 = 又其ノ和タル open set ハ measurable ナリ。 $\mathcal{T}$, measurable set , class $\mathcal{T} \{ \Sigma \} =$ テ表ハスコト = スレバコレハ total additive ナリ。次 = $\{ \Sigma \} =$ 用ニ measurable + function $\mathcal{T}$ 次, 如ク定義スル。

函数 $\alpha(z_1, z_2, \dots)$ が measurable たりトハ
任意ノ正数 r 及ビ complex number $a =$ 對シ

$$|\alpha - a| < r$$

ナル点集合が $\{Z\} =$ 開シ measurable ナルコトナリ。

故ニ、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ が measurable ニテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$$

ナルトキハ又 α が measurable ナリ。如何トナレバ

$$|\alpha_n - a| < r$$

ナル点集合ヲ Z_n トスレバ

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n}$$

$=$ 属スル点 $=$ テハ

$$|\alpha - a| < r$$

ナリ。故ニ $|\alpha - a| < r$ ナル点集合ヲ Z_0 トスレバ

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n} \subset Z_0$$

Z_0 ノ点 $=$ 對シテハ、 n ヲ充分大ニスレバ

$$|\alpha_n - a| < r$$

故ニ

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n} \supset Z_0$$

従ツテ

$$Z_0 = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n}$$

故ニ Z_0 ハ measurable 即チ α ハ measurable ナリ。

又次ノ定理が成立スル。

定理. α が measurable + α の必要且つ充分
ノ條件ハ正數 $\varepsilon =$ 對シテ 次ノ如キ高々可附個ノ
measurable sets $Z_1, Z_2, \dots =$ 分割可能ナル
コトナリ。即チ $Z_n = \tau \alpha$ ノ Schwankung が ε より
小ナルが如シ。

証明. Gaussian plane $L a_1, a_2, \dots$ が
überal dicht トス。若シ α が measurable +
レバ

$$|\alpha - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ナル点集合ヲ Z_n トスレバ、 α ハ $Z_n = \tau$ Schwankung
ハ ε より小ナリ。又

$$W_1 = Z_1,$$

$$W_2 = Z_2 - Z_1 Z_2$$

$$W_3 = Z_3 - (Z_1 + Z_2) Z_3$$

ト置ケバ、 $W_1, W_2, W_3, \dots$ が求ムル分割ナリ、又逆=
任意ノ $\varepsilon =$ 對シテ = 此ノ如キ分割が可能ナレバ、今 ε_n
= 對スル分割 $W_1^{(n)}, W_2^{(n)}, \dots$ ノ中ニテ

$$|\alpha - a| < \gamma$$

ノ集合 $Z_0 =$ 含マレルモノノ和集合ヲ $W^{(n)}$ トスレバ $\varepsilon_n \rightarrow 0$
トシタ時 $W^{(1)} + W^{(2)} + \dots$ ハ measurable = シテ

$$W^{(1)} + W^{(2)} + \dots \subset Z_0$$

又 Z_0 ノ任意ノ点 = 對シテ α が α_0 トスレバ $\varepsilon_n < \gamma - |\alpha_0 - \alpha|$

ナル $\varepsilon_n =$ 對シテハ、コノ点ハ $W^{(n)} =$ 含まレル。故 =
 $W^{(1)} \dot{+} W^{(2)} \dot{+} \dots = Z_0$

即チ Z_0 ハ measurable ナリ。

此ノ定理ヨリ ニツノ measurable function
ノ和、差、積ガ measurable ナルコトモ容易ニ証明サレル。

$\alpha(z_1, z_2, \dots)$ ガ measurable ナルトキ、 ε_n
 $=$ 對スル分割 $z_1, z_2, \dots =$ 對シ、 f ノ Hilbertspace
ノ任意ノ element トスレバ

$$\sum |\alpha(z_1, z_2, \dots)|^2 \|E(z_n) f\|^2$$

 $((z_1, z_2, \dots)$ ハ Z_n 内ノ一点) ハ $\varepsilon_n \rightarrow 0 =$ 對シテ常 =
同一極限值ヲ有ス。此レヲ

$$\int_{\mathcal{J}} |\alpha|^2 d\|E(z) f\|^2$$

ト記ス、此レガ finite ナル f ノ α ノ simvoll² ナ
element ト定義スル。 α ノ simvoll ナ element f
 $=$ 對シテハ

$$\sum \alpha(z_1, z_2, \dots) (E(z_n) f, g)$$

ハ Schwarz ノ不等式ヨリ $\varepsilon_n \rightarrow 0 =$ 對シテ常 = 一定
極限值ヲ有スルコトガ証明サレル。此レヲ

$$\int_{\mathcal{J}} \alpha(z_1, z_2, \dots) d(E(z) f, g)$$

ト記ス。又

$$(Nf, g) = \int_{\mathcal{J}} \alpha(z_1, z_2, \dots) d(E(z) f, g)$$

ヨリ *Hypermaksimal normal operator* N が定義
サレルコトモ一変数ノ場合ト同様ナリ。此ノ N ヲ $(N_1,$
 $N_2, \dots)$ ト記ス。

函数 $\phi(N_1, N_2, \dots)$ = 對シテハーツノ *normal*
operator ノ函数ノ場合ト全然同様ニシテ次ノ諸定理が
証明サレル。

定理. *Hypermaksimal normal operator*
 N が $N_1, N_2, \dots$

$\wedge N$ ノ *measure operator* ノ *ring* が $(N_1, N_2,$
 $\dots)$ ノ *measure operator* ノ *ring* = 含まレル
コトナリ。

定理. *Hypermaksimal normal operator*
 N ノ *measure operator* ノ *ring* が $(N_1, N_2, \dots)$
ノ *measure operator* ノ *ring* ト一致スレバ $N_1,$
 $N_2, \dots \wedge N$ ノ函数ナリ。

定理. *Hypermaksimal normal operator*
 N が $(N_1, N_2, \dots)$ ノ函数ナルタトノ必要且ツ充分ノ條
件ハ N が $N_1, N_2, \dots$ ノ各ト *commutative* ナルニ
テ *Projective operator* ト *commutative* ナ
ルコトナリ。

(注意) 以上ノ理論ニテハ *space* が *separable* ナル

コトヲ使用セズ。従ツテ一般 *Euclid 空間* =
テ成立ス。又 *Torus space* ノ *measure* ノ
construction ノ *methode* ハ § 1 ノ定理

ノ証明ニ其ノマヽ應用サレル。