OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	コムパクト群ノ連續表現ニツイテ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 182, p. 324-350
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74728
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

797. コムパクト群ノ連続表現ニツイテ

河田 敬義（東大）

H. Weyl: "The classical groups." 及ビ H. Weyl（山内氏譯）"群論ト量子力学"（夫々W.I.・WⅡトシテ引用スル）ノ中デ群ノ表現ニ関シテ二三氣付イタコトヲ述ベタイト思ヒマス。色々ト教ヘテイタダイタ安倍君ニ厚ク感謝致シマス。

1

n 次ノ unitary group $\mathfrak{U}_n$ ノスベテノ連続既約表現ヲモトメル問題ガアル。

（勿論 $A=(a_{ij})$ トスル時 Norm $\|A\|=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$ デ topology ヲ與ヘルモノトスル。）

full linear group $\mathfrak{C}_n$ ノ subgroup $\mathfrak{A}$ ニ對シテ

$\mathfrak{A}^n=\mathfrak{A}\times\cdots\cdots\times\mathfrak{A}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$（Kronecker 積）

$\overline{\mathfrak{A}}$.（complex conjugate）

$\tilde{\mathfrak{A}}$（contragredient transformation $A\to(A^{-1})'$）

$|\mathfrak{o}_f|$ (determinant, $A \to |A|$)

或ハ之レ等ノ Kronecker 積ハ $\mathfrak{o}_f$ ノ連続表現ヲ與ヘル。

$\mathfrak{o}_f \subset \mathfrak{U}_n$ ナラバ $\overline{\mathfrak{o}_f} = \widetilde{\mathfrak{o}_f}$ トナル。以下 $\mathfrak{o}_f$ ハ $\mathfrak{U}_n$ ノ closed subgroup ニ限ル。$\mathfrak{o}_f$ ハ compact ナル故 $\mathfrak{o}_f$ ノ連続表現ハ unitary 表現ト同値（ヘトカク）デアルカラ、(例ヘバ v. Neumann: "almost periodic functions in a group." Trans. Amer. 36. (N.I)) 完全可約デアル。

$\mathfrak{o}_f$ ノ unitary 表現 $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ ガアッテ, $\mathfrak{O}_1$ ガ $\mathfrak{O}_2$ ヲ分解シテ得ラレルトキ，即チ

$$\mathfrak{O}_2 \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{O}_1' \end{pmatrix}, \quad (\text{之レヲ } \mathfrak{O}_2 = \mathfrak{O}_1 + \mathfrak{O}_1' \text{ トカク})$$

ナルトキ，$\mathfrak{O}_1$ ヲ $\mathfrak{O}_2$ ノ因子ト呼ビ、$\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ トカクコトニスル。$\mathfrak{O}_1$ ガ既約表現ナラ既約因子ト呼ブ。

明カニ $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$, $\mathfrak{O}_1' \subset \mathfrak{O}_2'$ ナラバ $\mathfrak{O}_1 \times \mathfrak{O}_1' \subset \mathfrak{O}_2 \times \mathfrak{O}_2'$ デアル。

$\mathfrak{o}_f$ ノスベテノ連続既約表現ヲモトメルコトニ對シテ

〔A〕 (Burnside) 『$\mathfrak{o}_f$ ガ有限群ナラバ，$\mathfrak{o}_f$ ノスベテノ既約表現ハ $\mathfrak{o}_f^n$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) ノ因子トシテ得ラレル。』

然シコノコトハ一般ニハ成立シナイ。

例：円周ノ廻轉群ノトキ $|\mathfrak{o}_f|^{-1}$ ハ $\mathfrak{o}_f^n$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) ニハ含マレナイ。

〔B〕 (Weyl II. p. 345.) 『u_nノスベテノ連続既約表現ハ $|g|^r$ ($r=1,2,\cdots\cdots$) ノ既約因子及ビ 1 (identical 十表現) ト $|g|^{-m}$ ($m=1,2,\cdots\cdots$) トノ積トシテ得ラレル』

又一般ニ

〔B'〕 『(B) ハ u_n デナク、ソノ closed subgroup ガニツイテモ成立スル』

〔B〕ノ証明ヲ Weyl II デハ実際ニモトメルコトニヨリ與ヘテヰルガ、コヽデハ〔B〕,〔B'〕ヲ N.I ノ理論ヲ用ヒテ証明スル。ソレニハ先ヅ

〔C〕 『g ノスベテノ連続規約表現ハ $g^l \times \bar{g}^m$ ($l,m=0,1,2,\cdots\cdots$) ノ因子トシテモトメラレル』

(証明) g ヲ $S=(u_{ij}(s))$ トスルト $g^l \times \bar{g}^m$ ノ組成分子トシテ、スベテノ $u_{ij}(s)$ ニツイテ l 次, $\bar{u}_{ij}(s)$ ニツイテ m 次ノ単項式ガ得ラレル。故ニ $g^l \times \bar{g}^m$ ヲ既約因子ノ和ニ分解シテ, 同値ノモノカラ一ツツヽ代表ヲトリ、$\vartheta^{(1)},\cdots\cdots\vartheta^{(r)}$ ヲ互ニ同値デナイ既約因子トスルト、ソノ組成分子 $D^{(i)}_{\rho\sigma}(s)$ ($i=1,\cdots\cdots,r$) ノ一次結合トシテ、スベテノ $u_{ij}(s)$ ニツイテ l 次, $\bar{u}_{ij}(s)$ ニツイテ m 次ノ homogeneous polynomial ハ得ラレル。

故ニ $g^l \times \bar{g}^m$, ($l,m=0,1,2,\cdots\cdots$) ノ既約因子中同値デナイモノヲ $\vartheta^{(1)},\vartheta^{(2)},\cdots\cdots$ トスレバ $D^{(i)}_{\rho\sigma}(s)$ ノ linear combination トシテスベテノ $u_{ij}(s)$, $\bar{u}_{ij}(s)$ ノ polynomial ハ得ラレル。

今 $f(s)$ ヲ g ノ任意ノ連続函数トスル。又ハ $f(s)=f(u_{11}(s),$

$\cdots\cdots, u_{nn}(s)$) トカケル $u_{11}(s), \cdots\cdots, u_{nn}(s)$ ノ連続函数ト見テモヨイ。

$$u_{ij}(s) = \alpha_{ij}(s) + \sqrt{-1}\,\beta_{ij}(s)$$

ト実部ト虚部ニ分ケルト $2n^2$ 個ノ $\alpha_{ij}(s)$, $\beta_{ij}(s)$ ノ連続函数トミナスレル。$2n^2$ 個ノ実独立変数 $\alpha_{ij}(s)$, $\beta_{ij}(s)$ ノ連続函数トミナスタメニハ、ソノ定義区域ガ $2n^2$ 次元ノユークリッド空間ノアル bounded closed set $\mathfrak{L}$ トナル。(例ヘバ $\mathfrak{o} = \mathfrak{u}_n$ ノ時ハ

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{ij}(s) + \sqrt{-1}\,\beta_{ij}(s)\right)\left(\alpha_{ik}(s) + \sqrt{-1}\,\beta_{ik}(s)\right) = \delta_{jk}$$

デ定義サレル closed set. bounded トルハ $|u_{ij}(s)| \leqq 1$ カラ ——).

故ニ実変数ノ複素係数ノ polynomial P ニヨリ f ハ上デ一様ニ近似出来ル。(Weierstrass ノ定理):

$$|f(s) - P(\alpha_{11}(s), \cdots\cdots, \beta_{nn}(s))| < \varepsilon \quad \text{on } \mathfrak{L}$$

又ハ $\alpha_{ij}(s) = \frac{1}{2}\left(u_{ij}(s) + \bar{u}_{ij}(s)\right)$,

$$\beta_{ij}(s) = \frac{1}{2i}\left(u_{ij}(s) - \bar{u}_{ij}(s)\right),$$

ヲ代入シテ

$$|f(s) - P_1(u_{11}(s), \cdots\cdots, u_{nn}(s), \overline{u_{11}(s)}, \cdots\cdots \cdots, \overline{u_{nn}(s)})| < \varepsilon, \quad s \in \mathfrak{o}.$$

サテ今 $\mathfrak{o}^{(1)}, \mathfrak{o}^{(2)}, \cdots\cdots$ デ $\mathfrak{o}$ ノスベテノ連続規約表現ヲツシテナイトスレバ、ソレ等ト同値デナイ $\mathfrak{u}$ ヲトリ

$f(s)=\chi(s)$ ($\mathfrak{g}$ ノ指標) トスレバ $f(s)$ ハスベテノ $D^{(i)}_{\mathfrak{g}}(s)$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$ ト直交スル。故ニソノ一次結合デアル $P_1(u_{11}(s),\cdots\cdots,\overline{u_{nn}}(s))$ トモ直交スル。

$$\therefore\quad \chi(1)=\underset{S}{M}\,\overline{f(s)}\cdot f(s)$$

$$=\underset{S}{M}\,\overline{f(s)}\cdot\left(f(s)-P_1(u_{11}(s),\cdots\cdots,\overline{u_{nn}}(s))\right)$$

$$\leqq \mathrm{Max}\,|f(s)|\cdot\varepsilon$$

故ニ $\varepsilon\to 0$ トスレバ $\chi(1)=0$ トナリ矛盾ヲ生ズル。故ニ〔C〕ハ証明セラレタ。

〔C〕カラ〔B′〕ヲ出スニハ

$\overline{\mathfrak{g}}=\widetilde{\mathfrak{g}}$ カラ $(u_{ij}(s))'=(u_{ij}(s))^{-1}=|u_{ij}(s)|^{-1}(p_{ij}(s))$, $p_{ij}(s)$ ハ $u_{ij}(s)$ ノ $n-1$ 次ノ homogeneous polynomial カラ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ既約因子 $\mathfrak{H}$ ハ

$$\mathfrak{H}\subset|\mathfrak{g}|^{-1}\times\mathfrak{g}^{n-1}$$

故ニ $\mathfrak{g}^l\times\overline{\mathfrak{g}}^m$ ノ既約因子 $\mathfrak{H}_1$ ハ

$$\mathfrak{H}_1\subset|\mathfrak{g}|^{-m}\times\mathfrak{g}^{l+m(n-1)}$$

トナル。即チ〔B′〕——

$\mathfrak{g}$ ノ例トシテ orthogonal group, unimodular unitary group ガアル。

兼等デハ夫々 $|\mathfrak{g}|^{-1}=|\mathfrak{g}|$, $|\mathfrak{g}|=1$ ナル故

〔B″〕『orthogonal group 及ビ unimodular group ノスベテノ連続既約表現ハ 1 及ビ $\mathfrak{g}^n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ノ因子デアル』

又，$\mathfrak{g}$ ガ有限群デ、ソノ order ガ n ナリトスレバ

$|\mathfrak{A}|^n=1$, 又ハ $|\mathfrak{A}|^{-1}=|\mathfrak{A}|^{n-1}$

故ニ〔B'〕カラ〔A〕モ出ル。

〔A〕ハ又 A. Weil ノ定理（紙上談話会，浅野氏 164号 p. 404 参照）ト関係アル。

C_n ノ subgroup h_y が整係数多項式 $f(h_y)=0$ ヲ満足スルトスレバ h_y ノ subcyclic group $\{s\}$ モ $f(\{s\})=0$ ヲ満足スル。f ノ次数ヲ m トスレバ，ユノコトハ $\{s\}^{m+r}$ ノ既約表現ハ $1, \{s\}, \cdots\cdots \{s\}^m$ ノドレカノ因子ナルコトヲ意味スル。故ニ〔A〕カラ $\{s\}$ ノスベテノ既約表現ハ $1, \{s\}, \cdots\cdots, \{s\}^m$ ノ中カラ得ラレルカラ，同値デナイモノハ高々 $1+n+\cdots\cdots+n^m=N$ 箇シカナイ。

s ハ h_y ノ任意ノ元トスルト，之ノコトハ s ノ order ハ高々 N ナルコトヲ示ス。

故ニ Burnside ノ定理（A 上 p. 398）ニ帰着サレル。

2

〔C〕ハ又 Van. Kampen: "Almost periodic functions and compact groups" Annals of Math. 37. (1936) (K) ト関係アル。

〔C〕ヲイヒカヘレバ

〔C'〕「Separabel compact group $\mathfrak{G}$ ノ有限箇ノ連続既約表現 $\mathfrak{A}^{(1)}, \cdots\cdots \mathfrak{A}^{(r)}$ ニ対シテ $\mathfrak{A}^{(i)}(s)=E$ ($i=1, \cdots\cdots r$) ナラベ $S=$ ノトナルナラベ，$\mathfrak{G}$ ノスベテノ連続

既約表現ハ $\mathfrak{D}^{(i)}$ 及ビ $\overline{\mathfrak{D}}^{(i)}$ ノ中ノ Kronecker 積ノ因子トシテ得ラレル。』

即チ $\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{D}^{(r)} \end{pmatrix}$ ト考ヘレバヨイノデアル。

之レヲ一般ニシテ

〔C″〕 (K. § IV, Theo i. Cor.). 『separabel compact group $\mathfrak{G}$ ノスベテノ連続既約表現ハ，$\mathfrak{G}$ ノ既約表現ノアル集リ $\mathfrak{D}^{(1)}, \mathfrak{D}^{(2)}, \cdots\cdots$ ガアッテ、$\mathfrak{D}^{(i)}(S) = E$ ナラ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ $S = I$ トナル時ハ，$\mathfrak{D}^{(1)}, \mathfrak{D}^{(2)}, \cdots\cdots, \overline{\mathfrak{D}}^{(1)}, \overline{\mathfrak{D}}^{(2)}, \cdots\cdots$ ノ中ノ Kronecker 積ノ因子トシテ含マレル。』

(証明) $\mathfrak{D}^{(1)}(S) = E, \cdots\cdots, \mathfrak{D}^{(n)}(S) = E$ ナル S ノ全体ノナス closed invariant subgroup ヲ $\mathfrak{N}_n$ トスルト $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_n$ ハ [C′] ノ性質ヲ有ス。$\mathfrak{G}$ ノ compact ナルコトカラ

I ノ任意ノ近傍 $\mathfrak{U}$ ヲトルト $\mathfrak{U}$ ニ $\mathfrak{N}_n$, $n > n_0$ ナル n_0 ガアルカラ、今任意ノ $\mathfrak{G}$ ノ上ノ連続函数 $f(S)$ ニ対シテ $|f(x) - f(xt)| < \varepsilon$, $t \in \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ ヲトルト

$$f_n(S) = \underset{t \in \mathfrak{N}_n}{M} f(St) \quad \text{ヲ作レバ} \qquad (K.\ \S X)$$

(イ) $|f(S) - f_n(S)| < \varepsilon$ トナル。

$f_n(S)$ ハ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_n$ ノ連続函数ナルニヨリ [C′] カラ

(ロ) $\left| f_n(S) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i D^{*(i)}_{\rho\sigma}(S) \right| < \varepsilon$ ナル $\mathfrak{D}^{*(i)}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_n$ ノ

既約表現，即チ $\mathfrak{D}^{(1)}, \cdots\cdots, \mathfrak{D}^{(m)}, \overline{\mathfrak{D}}^{(1)}, \cdots\cdots \overline{\mathfrak{D}}^{(m)}$ ノ中ノ Kronecker 積ノ因子）ガアル。(1)(2)ヲ組合セテ〔C〕ノ証明ト同様ニ〔C″〕ガ証明サレル。——

（以上ノ証明中一般論ハ compact group ニオケル mean value ノ存在ト同値デナイ既約表現向ノ直交性丈ヲ用ヒタ丈デアル。）

Neumann, Kampen ハ abelien group ノ Character group ニ対シテ compact group ノ尻テノ連続既約表現全体 Γ ノ中デ

$\Gamma \ni \mathfrak{D}$ ノ逆ニ対応シテ $\overline{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$ ノ既約因子全体ヲ Character ノ積ニ対応シテ取ルコトニシテ Character group ノ Subgroup ニ対応シテ Modul ヲ定義シタ。

Def.『Γ ノ Modul Δ トハ Γ ノ subset デ

$\Delta \ni \mathfrak{D}$ ナラ $\Delta \ni \overline{\mathfrak{D}}$, $\Delta \ni \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ ナラ $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$ ノ既約因子モ $\in \Delta$ ヲ満足スルモノヲイフ。』

特ニ Δ ガ $\mathfrak{D}^{(1)}\ \mathfrak{D}^{(2)}, \cdots\cdots, \overline{\mathfrak{D}}^{(1)}, \overline{\mathfrak{D}}^{(2)}, \cdots\cdots$ ノ中ノ Kronecker 積ノ因子ノ全体トシテ得ラレルトキニ $\Delta(\mathfrak{D}^{(1)}, \mathfrak{D}^{(2)}$ ヲ生ニ-)トカキ"erzeugen"サレルトイフ。〔C'〕ヲイヒカヘレバ

〔D〕『compact group $\mathfrak{G}$ ガ unitary group ノ Subgroup ナルタメノ必要充分條件ハ Γ ガ有限個ノ"Erzeugende"ガアルコトデアル』

又〔C″〕カラ（K. § VIII）

〔E〕『sep. compact group $\mathfrak{G}$ ノ closed invariant

subgroup $\mathfrak{N}$ ト Γ ノ modul Δ トハ

$\mathfrak{N}$ ヲ乗ヘタ時ニハ $\mathfrak{N}\ni S$ = 對シテ $\mathcal{O}(S)=E$ トナル

$\mathcal{O}$ ノ全体トシテ Δ ヲ,

Δ ヲ乗ヘタ時ニハ Δ ヲ $\mathcal{O}$ = 對シテ $\mathcal{O}(S)=E$ トナル

S ノ全体トシテ $\mathfrak{N}$ ヲ

對應サレルト可逆的ニ一對一ニ對應スル』

compact abeliengroup ノ構造ガソノ character group カラロケッタ様ニ sep. compact group ノ構造モソノ既約表現全体 Γ カラ知ルコトガ出来ル。

character ノ order ガ有限ナルコトニ對應シテ A. Weil ノ定理カラ Γ ヨ $\mathcal{O}$ ガ代數方程式ヲ満足スルコトガ對應スル。即チ Γ ノスベテノ finite order ノ $\mathcal{O}$ 全体ハ Γ ノ modul Γ_0 ヲナス。

[F] 『$\mathfrak{o}_f$ ガ zero dimensional ナルコトト $\Gamma=\Gamma_0$ トハ對等デアル』

(証明) $\Gamma=\Gamma_0$ ナラ $\mathfrak{o}_f$ ヨ a, b, $a\neq b$ ナラ $\mathcal{O}(a)\neq\mathcal{O}(b)$ ナル $\mathcal{O}\in\Gamma$ アリ。

$\mathcal{O}(S)=E$ ナル S ノ全体ヲ $\mathfrak{N}$ トスレバ $\mathfrak{o}_f/\mathfrak{N}$ ハ有限群トナルカラ $\mathfrak{N}$ ハ open デ closed トナル。

故ニ a, b ハ異ナル component ニ入ル。

逆ニ $\mathfrak{o}_f$ ガ zero-dimensional ナラ $\mathfrak{N}_n\to 1$ ナル open デ closed + invariant subgroup $\mathfrak{N}_n$ ガアル。$\mathfrak{o}_f/\mathfrak{N}_n$ ハ有限群ナル故既約表現ハ finite order デアル。

トコロガ〔C''〕ノ証明ト同様ニソレデスベテノ連続既約表現ヲツクシテオル。故ニ $\Gamma=\Gamma_0$,

同様ニ

(F') 『$\mathfrak{G}$ガconnected ナルコトト $\Gamma_0=1$ ナルコトトハ對當デアル』

(F'') 『$\mathfrak{G}$ガ單純群ナルコト. $\Gamma=(\delta)$, (ϑ ハ Γ ノ1デナイ勝手ノ元)トハ對當デアル。又ハ$\mathfrak{G}$ノスベテノ連続既約表現ガ faithful デアルコトト對當デアル』

例.○ $\mathfrak{U}_n$ノスベテノ一次連続既約表現ハ

$$\mathfrak{U}_n \longrightarrow |\mathfrak{U}_n|^e, \quad (e=0,\pm1,\cdots\cdots)$$

デアル。(Weyl I. p.26, P.128). コノ Modul Δ ニ對應スル invariant subgroup 群 $\mathfrak{U}_n$ノ commutatorgroup ハ unimodular unitary group $\mathfrak{U}_n^0$ デアル。

○ $\mathfrak{U}_n$ノ centre ヲハ diagonal unitary matrix ノ全体ヲアル。

ソレニ對應スル Modul Δ ハ $|\mathfrak{U}_n|^{-r}\times\mathfrak{U}_n^{nr}$ ノ既約因子ノ全体デアル。

$\mathfrak{U}_n=\mathfrak{U}_n^0\cup\mathfrak{z}$, ナル故 $\mathfrak{U}_n^0$ ハ $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_0$ トスレバ

$$\mathfrak{U}_n/\mathfrak{z}\cong\mathfrak{U}_n^0/\mathfrak{z}_0.$$

$\therefore$ $\mathfrak{U}_n^0/\mathfrak{z}_0$ ノスベテノ連続既約表現ハ $|\mathfrak{U}_n^0|^{-r}\times\mathfrak{U}_n^{0nr}$ ノ因子トナル。

signature ディヘバ (W. I. p.132)

$$(f_1,\cdots\cdots,f_n),\quad f_1\geqq f_2\geqq\cdots\cdots\geqq f_n.$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = 0 \text{ トナル。}$$

○ 特ニ $n=2$ ノ時ハ $(f, -f)$ デアル．又ハ $|\tilde{\omega}_n^0| = 1$ カラ $(2f, 0)$ トイッテモヨイ。即チ $\tilde{\omega}_2^0/\mathfrak{z}_0$ ノスベテノ連続既約表現ハ covariant symmetry tensor ニヨル表現デアル。(W. II. p. 151)

○ $\tilde{\omega}_2^0/\mathfrak{z}_0$ ハ単純デアルコトガワカル。$\tilde{\omega}_2 \ni s = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ トシテ covariantvector (x, y) ヲトレバ $2r$ 階 cov. symmetry tensor space ノ base ハ $(x^{2r}, x^{2r-1}y, \cdots\cdots, y^{2r})$ トナル $2r+1$ 次元ノ space トナル。

$\mathfrak{H} = \langle P(2f, 0) \rangle$ (W. I. p. 130) デ $\mathfrak{H}(s) = E$ トナル ナラバ

$$x^{2r} = (x')^{2r} = (\alpha x + \beta y)^{2r} \quad \therefore \alpha^{2r} = 1, \ \beta = 0$$

$$y^{2r} = (y')^{2r} = (\gamma x + \delta y)^{2r} \quad \therefore \gamma = 0, \ \delta^{2r} = 1$$

$$x^{2r-1}y = (x')^{2r-1} \cdot y' = \alpha^{2r-1}\delta x^{2r-1} \cdot y \quad \therefore \alpha = \delta$$

$$\therefore \ s \in \mathfrak{z} \text{ トナル。}$$

即チ F'' カラ $\tilde{\omega}_2^0/\mathfrak{z}_0$ ハ単純デアル。

3.

有限群 $\mathfrak{H}$ トソノ subgroup $\mathfrak{h}$ トニ対シテ

$$\mathfrak{H} = \rho_1 \mathfrak{h} + \rho_2 \mathfrak{h} + \cdots\cdots + \rho_r \mathfrak{h}$$

ト分解シテ

$$\sigma \to \begin{pmatrix} P_1 h_y, \cdots\cdots, P_r h_y \\ \sigma P_1 h_y, \cdots\cdots, P_r h_y \end{pmatrix}$$

ナルσノ表現ヲ考ヘル時ニ，h_y が invariant subgroup ノ時ニ對應スル一般ノ compact group ノ場合ガ〔C″〕デ（更ニ可算ニ K ニ）決ヘラレテヰル。

ソレニ對應シテ h_y が invariant デナイ時ニ對應スル理論ガ Weyl：“Harmonics on homogeneous manifolds,” Annals of Math. 35 (1934) (W. III) ガ與ヘラレテヰル。ソレハ後ニ見ル樣ニ球函數ノ理論ノ一般化デアル。コレデハ Neumann ノ理論（N）カラ導イテヰル。

抽象群 $\mathfrak{G}$ トソレヲ transitive transformation group トシテモツ集合 $\mathfrak{M}$ トガ與ヘラレテヰルトスル

$\mathfrak{M}$ ノ函數 $f(P)$ カラ P_0 ヲ固定シテ $f(S) = f(SP_0)$ ト定義シテ $\mathfrak{G}$ ノ函數ヲ作ル。$tP_0 = P_0$ ナル t ノ全体ヲ h_y トスルト、$\mathfrak{G}$ ノ函數 $f(S)$ ガ $\mathfrak{M}$ ノ函數カラ導カレルタメノ條件ハ

$$f(St) = f(S), \quad t \in h_y$$

ナルコトデアル。

$\mathfrak{M}$ ノ函數 $f(P)$ ガ almost periodic トハ $f(SP) = f(P)^S$ ガ S ニ關シテ一樣收斂ノ topology デ totally bounded ナルコトヽスレバ $f(S) = f(SP_0)$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ上デ a.p. ナルコトヽ同ジ定義ニナル。

$$f(St) - f(S), \quad t \in h_y$$

ナル a. p. function ノ全体ヲ $\gamma(fy)$ ト書クコトニスル。

初メニ $\mathfrak{o}$ ノ n 次ノ unitary 表現 $\mathfrak{D}$ ノ表現加群ニツイテシラベテミル。

今 $\gamma(fy)$ ノ元ヨリナル $\mathfrak{o}$ ノ表現加群 $\mathfrak{m}$, ソノ base ヲ $f_1(s), \cdots\cdots, f_n(s)$ トスル。即チ

$$\begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} f_1(ts) \\ \vdots \\ f_n(ts) \end{pmatrix} = \mathfrak{D}(t) \begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix}$$

トスル。

表現 $\mathfrak{o}$ ヲ與フル $\gamma(fy)$ ノ表現加群 $\mathfrak{m}$ ノ全体ヲ $\{\mathfrak{m}\}_{\mathfrak{o}}$ トスル。

$\{\mathfrak{m}\}_{\mathfrak{o}}$ カラ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ ヲトリ $\mathfrak{o}$ ヲ得ル base ヲ

$$(f_1(s), \cdots\cdots, f_n(s)), \quad (f_1'(s), \cdots\cdots, f_n'(s))$$

トスルト

$\alpha\mathfrak{m} + \beta\mathfrak{m}'$ ヲ $(\alpha f_1(s) + \beta f_1'(s), \cdots\cdots, \alpha f_n(s) + \beta f_n'(s))$ ノ張ル表現加群トスレバ, 又 $\{\mathfrak{m}\}_{\mathfrak{o}}$ = 属スル。

カクシテ $\{\mathfrak{m}\}_{\mathfrak{o}}$ ハ Modul トナッタ。(但シコヲ附ケ加ヘテ)

$$\begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix} = \mathfrak{D}(s) \begin{pmatrix} f_1(1) \\ \vdots \\ f_n(1) \end{pmatrix}$$

カテ $(f_1(1), \cdots\cdots, f_n(1))$ ハ 0-vector = ハナラナイ。
故=

$$\{m\}_0 \ni m = (f_1(s), \cdots\cdots, f_n(s)) \longleftrightarrow (f_1(1), \cdots\cdots, f_n(1)) \in V_n(k)$$

+ル complex number ノ n 次ノ vector トノ對應ハ isomorphic トナル。

故=ソノ張ル linear space ヲ M トスルト complex Euclidespace $E^{(n)} = M + M'$ ト直交セル M, M' = 分ケテ，M ヲ r 次元トスルト M ノ中 = $(1, 0, \cdots\cdots 0), \cdots\cdots (\underbrace{0, \cdots\cdots 0}_{r-1個}, 1, 0 \cdots\cdots 0)$ ナル座標軸ヲ取ッテ unitary orthog. transf. P デ座標変換ヲ行ヘバ

$$\begin{pmatrix} f_1'(s) \\ \vdots \\ f_n'(s) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix},$$

ト m ノ base ヲトリカヘレバ，ソレハ $\Omega' = P\Omega P^{-1}$ ナル表現ヲ與ヘル。

$\{m\}_0$ ノ中カラ

$$m^{(i)} = (f_1'^{(i)}(s), \cdots\cdots, f_n'^{(i)}(s)), \quad i = 1, \cdots\cdots, r$$

$$(f_1'^{(i)}(1), \cdots\cdots, f_n'^{(i)}(s)) = (\underbrace{0, \cdots\cdots 0}_{i個}, 1, 0 \cdots 0)$$

ナル表現加群 $m^{(1)} \cdots\cdots m^{(r)}$ ヲ取レコトガ出來ル。コレガ丁度 $\{m\}_0$ ノ base トナル。

ソウスレバ

$$\begin{pmatrix} f_1'^{(i)}(s) \\ \vdots \\ f_n'^{(i)}(s) \end{pmatrix} = \mathcal{D}'(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D'_{1i}(s) \\ \vdots \\ D'_{ni}(s) \end{pmatrix}$$

即チ $m^{(i)}$ ハ $\mathcal{D}'$ ノ第 i 列ヨリ作ル加群トナル。

[定義] G ノ unitary (irreducible) rep. $\mathcal{D}$ = 對シテ上ノ如ク $\mathcal{D}'$ ヲ同値ニ取リ $\mathcal{D}'$ ヲ $\gamma(h_\gamma)$ = 對シテ normal ト呼ブコトニスル。

[G] 『G ノ normal unitary (irreducible) rep. $\mathcal{D}$ = 對シテハ，ソノ組成分子 $D_{ij}(s)$, $i=1,\cdots\cdots,n$; $j=1,\cdots\cdots,\gamma(\mathcal{D})$ ハ $\gamma(h_\gamma)$ = 屬スル。且ツ $m^{(i)}-(D_{1i}(s),\cdots\cdots,D_{ni}(s))$ $(i=1,\cdots\cdots,\gamma)$ ハ $\{m\}_{\mathcal{D}}$ ノ base トスル。

$\gamma(\mathcal{D})$ ハ又 $\mathcal{D}$ ヲ h_γ ノ表現トシタ時ニ identical rep. ノ現ハレル回数デアル。』

$\gamma(\mathcal{D})$ = 關スル後半ノ詳細ハレベヨイ。

$\mathcal{D}$ ヲ $\gamma(h_\gamma)$ = 對シテ normal トスルト $\mathcal{D}(st)=\mathcal{D}(s)$; $\mathcal{D}(t)$ カラ $t\in h_\gamma$ トスレバ $D_{ij}(st)=D_{ij}(s)$ $(i=1,\cdots,n,$ $j=1,\cdots\cdots,\gamma)$ ヲ用ヒレバ

$$\mathcal{D}(t)=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \underbrace{0}_{\gamma} & & & \end{pmatrix}$$

即チ $\mathcal{D}(t)$ ハ unitary ナル故

$$\mathcal{D}(t)=\begin{pmatrix} E_\gamma & 0 \\ 0 & \mathcal{D}'(t) \end{pmatrix}$$

ト分割サレル。故ニ $\mathfrak{D}(t)$, $t \in \mathfrak{h}$ ハ少トクモ $\gamma(\mathfrak{D})$ 回 identical rep. ヲ含ム。

逆ニ S 回含ムトスレバ $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}^\circ$ ヲトリ

$$\mathfrak{D}^\circ(t) = \begin{pmatrix} E_S & 0 \\ 0 & \mathfrak{D}_1^\circ(t) \end{pmatrix}$$ ナラシムレバ

$m^{(1)} = (D_{11}^\circ(S), \cdots\cdots, D_{n_1 1}^\circ(S)), \cdots\cdots, m^{(S)} = (D_{1S}^\circ(S), \cdots D_{n_S S}^\circ)$

ハ $\{m\}_{\mathfrak{D}}$ ノ一次独立ノ表現加群ニナル。$\therefore S \leqq \gamma(\mathfrak{D})$. ——

V. Neumann (N) ノ若ヘニヨリ

def. a.p. function ノ集リ γ ガ l-closed family ヲナストハ

1) $\gamma \ni f, g$ ナラ $\gamma \ni \alpha f + \beta g$. α, β ハ Complex number.

2) $\gamma \ni f(x)$ ナラ $\gamma \ni f(ax)$.

3) $\gamma \ni f_n$, f_n ガ uniformly ニ f ニ conv. スレバ $f \in \gamma$.

明ニ $\gamma(\mathfrak{h})$ ハ l-closed family トナル。

$\gamma(\mathfrak{h})$ ガ次ヘラレル時ニ

[H] 『$\mathfrak{G}$ ノスベテノ unitary irreducible rep. ヲ normal ニ直シテオク。ソレヲ $\mathfrak{D}^{(1)}$ ……トス。

$\gamma(\mathfrak{h}) \ni D_{\rho\sigma}^{(i)}(S)$, $(\rho = 1, \cdots\cdots, S_i, \cdot \sigma = 1, \cdots\cdots \gamma(\mathfrak{D}^{(i)}))$

(S_i ハ $\mathfrak{D}^{(i)}$ ノ次数)ノ全体 $\{D\}_{\gamma(\mathfrak{h})}$ ハ $\gamma(\mathfrak{h})$ ノ完全直交系ヲナス。

即チ $f(S) \in \gamma(\mathfrak{h})$ トスレバ

$$\alpha_{\rho\sigma}^{(i)} = \underset{s}{M} f(s) D_{\rho\sigma}^{(i)}(s), \quad (i=1,2,\cdots\cdots, \rho=1,\cdots, s_i, \sigma=1,\cdots, \gamma(\mathfrak{G}^{(i)}))$$

トスレバ

$$\underset{s}{M} f(s)\overline{f(s)} = \sum_{i,\rho,\sigma} |\alpha_{\rho\sigma}^{(i)}|^2$$

ナル Parseval's equation ガ成立スル。

又 Approximation theorem モ成立スル。即チ $f(s) \in \gamma(\mathfrak{k})$ ニ対シテ

$$\left| f(s) - \sum a. D_{\rho\sigma}^{(i)}(s) \right| < \varepsilon$$

ニナルヤウニ有限個ノ $D_{\rho\sigma}^{(i)}(s)$ ヲ $\{D\}_{\gamma(\mathfrak{k})}$ カラ取リ出スコトガ出来ル。』

(証明) (N. p. 416) ト同様ニ

(i) $f \in \gamma(\mathfrak{M})$ ナラ $g \times f \in \gamma(\mathfrak{M})$ トナル。

(ii) $D_{\rho\sigma}(s) \in \gamma(\mathfrak{M})$ ナラ $D_{\rho'\sigma}(s) \in \gamma(\mathfrak{M})$

(iii) $f(s) \in \gamma(\mathfrak{M})$ ヲスベテノ a.p. function ニ対スル完全直交系 $D_{\rho\sigma}^{(i)}$ ニヨリ展開スルトキ

$$\alpha_{\rho\sigma}^{(i)} = \underset{s}{M} f(s) D_{\rho\sigma}^{(i)}(s) \neq 0 \text{ ナラ}$$

$$D_{\rho\sigma}^{(i)}(s) \in \{D\}_{\gamma(\mathfrak{k})} \text{ トナル。}$$

コニ $\gamma(\mathfrak{M})$ ガ単ナル l-closed family デナイ点ガアラハレテ来ル。即チ

$\alpha_{\rho\sigma}^{(i)} \neq 0$ トスレバ

$$D_{\rho'\rho}^{(i)} \times f(s) = \sum_{\tau=1}^{s_i} \alpha_{\rho\tau} D_{\rho'\tau}^{(i)}(s) \in \gamma(\mathfrak{M}), \quad \rho'=1,\cdots, n$$

$\therefore \left(\sum_{\tau}\alpha_{\rho\tau}D^{(i)}_{1\tau}(S),\cdots\cdots,\sum_{\tau}\alpha_{\rho\tau}D^{(i)}_{n\tau}(S)\right)=m$ ハ

$\{m\}_{\mathfrak{O}}$ =属シ丁度コノ base ガ表現 $\mathfrak{O}^{(i)}$ ヲ與ヘルの假定ヨリ

$m^{(i)}=(D_{1i}(S),\cdots\cdots,D_{ni}(S))\ (i=1,\cdots\cdots,r(\mathfrak{O}^{(i)}))$

ガ $\{m\}_{\mathfrak{O}}$ ノ base トナルカラ m ハソノ一次結合トシテハナレル。故ニ $\alpha_{\rho\tau}=0,\ \tau>r(\mathfrak{O}^{(i)})$ トナル。

$\therefore\ \alpha^{(i)}_{\rho\sigma}\neq 0$ ナラ $\sigma\leqq r(\mathfrak{O}^{(i)})$,

即チ $D^{(i)}_{\rho\sigma}(S)\in\{D\}_{r(\mathfrak{h})}$

トナル。

即チスベテノ $D^{(i)}_{\rho\sigma}(S)$ デ Parseval's eq. ノナリタツコトカラ $\{D\}_{r(\mathfrak{h})}$ 丈デ Parseval's eq. ガ成立スル。

Approximation theorem ハ（N. p.475）カラ

$$|f(S)-\phi\times g\times f(S)|<\varepsilon,\qquad \phi\times\phi=\phi$$

ニトレル。(i)・(iii) カラ $\phi\times g\times f(S)$ ハ $\{D\}_{r(\mathfrak{h})}$ ノ linear combination トナル。故ニ (App. theo. ハ成立スル。

特ニ $\mathfrak{O}$ = topology ノ入ッテ compact ナルトキハ $\mathfrak{h}$ closed in $\mathfrak{O}$ デアル。故ニ $\mathfrak{M}$ = top. ヲ $\mathfrak{O}$ ヲ $\mathfrak{h}$ ニヨル Nebengruppe ニヨル Zerlegungsraum トシテ導入スレバ $\mathfrak{M}$ ハ又 compact トナリ，$\mathfrak{M}$ ノ上ノ連続函

数ハ a. p. function トナル。 $\gamma(m)$ ノカハリニ，スベテノ m ノ上ノ連続函数 $\overline{\gamma}(m)$ ヲ考ヘテモ全ク同様ニ〔H〕ハ成立スル。

$\overline{\gamma}(m)$ ノ表現加群ニヨッテ生ズルスベテノ $\mathfrak{o}$ ノ連続既約表現ヲ $\mathfrak{O}^{(1)}, \mathfrak{O}^{(2)}, \cdots\cdots$ ノ全体 $\{\mathfrak{O}\}_{\overline{\gamma}(m)}$ ハ〔G〕ニヨリ by ノ identical rep. デ induce サレタ表現デアル。

コレハ一般ニ modul ヲ作ラナイ。N. Theo. 33 ニ相当シテ

〔I〕『$\{\mathfrak{O}\}_{\overline{\gamma}(m)}$ デ"erzeugen"サレタ modul Δ ハ by ニ含マレル maximal invariant subgroup $\mathfrak{N}$ ト〔E〕ノ意味デ對應スル。』

（証明）ソレハ $\{\mathfrak{O}\}_{\overline{\gamma}(m)}$ ヲ $\mathfrak{O}$ ニ対シテ $\mathfrak{O}(a)=E$ トナル a ノ全体デアル。

ソレハ〔G〕ノ後半ノ証明同様 $D^{(i)}_{p\sigma}(a)=D^{(i)}_{p\sigma}(1)$，$D^{(i)}_{p\sigma}(s)\in\{D\}_{\overline{\gamma}(m)}$ トナルカラ Approximation theorem カラ

スベテノ $\overline{\gamma}(m)$ ヲ $f(s)$ ニツイテ $f(a)=f(1)$ トナル。故ニ $a\in by$ トナル。

∴ a ハ by ニ含マレル invariant subgroup $\mathfrak{N}$ ニハル。逆モ真。 ———

4.

3ノ Weyl ノ理論ノ一番手近イ應用ハ球函数ヘノ應用

デアル。

O_n ヲ n 次ノ real orthogonal group O_n トシ、$\mathfrak{M}$ ヲ n-dim. Spere:

$$x_1^2 + \cdots\cdots + x_m^2 = 1$$

トスル。

O_n, $\mathfrak{M}$ ヘノ topology ノ入レ方ハ普通ニ入レレバ 3 ノ終リノ入レ方ト一致スル。又 $\mathfrak{M}$ ノ上ノ函数カラ作ッタ $f(S) = f(SP_0)$ ノ O_n ノ上ノ平均値ト $\mathfrak{M}$ ノ上ノ普通ノ積分ニヨル平均値ト一致スル。

一点 $P_0 = (1, 0, \cdots\cdots, 0)$ トスレバ

$$h_y = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ \cdots \\ 0 & \boxed{O_{n-1}} \end{pmatrix} \cong O_{n-1}$$

デアル。

今、$x_1 \cdots\cdots x_n$ ノ m 次 homogeneous polynomial 全体ヲ $\mathfrak{M}$ 上デ考ヘルト O_n デ invariant + space $\mathfrak{M}_m$ ヲ作ル。($m = 0, 1, 2, \cdots\cdots$)

先ヅ補助定理トシテ

『$f(x_1 \cdots\cdots x_n)$ ナル polynomial ガ $\mathfrak{M}$ 上デ恒ニ 0 ナル値ヲトレバ

$$f(x_1 \cdots\cdots x_n) = (x_1^2 + \cdots\cdots + x_n^2 - 1)\, g(x_1 \cdots\cdots x_n)$$

トナル。

特ニ f ガ homogeneous ナラ $f = 0$ トナル』

何トナレバ f ガ先ヅ homogeneous ナラバ $r^2 = x_1^2 + \cdots\cdots + x_n^2$ トスレバ

$$f(x_1,\cdots\cdots x_n)=r^n f\left(\frac{x_1}{r},\cdots\cdots,\frac{x_n}{r}\right)=0 \text{ ヨリ } f=0$$

トナル。

f が homogeneous ニナイ時ニハ

$$f\equiv f_1+f_2 \pmod{x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2-1}$$

f_1, f_2 ハ夫々 $m, m-1$ 次ノ homogeneous polynomial ニ成ル。

今, $f_1+f_2=f_0=0$ ヲ証明スレバヨイ。$f_0\neq 0$ トスルト

$$0=f_0\left(\frac{x_1}{r}\cdots\cdots,\frac{x_n}{r}\right)=r^{-m}f_1(x_1\cdots x_n)+r^{(m-1)}$$
$$f_2(x_1\cdots\cdots x_n)$$

$$\therefore\quad r=\frac{f_1(x_1\cdots x_n)}{f_2(x_1\cdots x_n)}$$ トナリ矛盾ヲ生ズル。——

「故ニ $\mathfrak{M}_m$ ノ rank ハ ${}_nH_m={}_{n+m-1}C_{m-1}=h_m$ トナル。」

「尚々 $m-1$ 次ノ polynomial $f(x_1\cdots\cdots x_n)$ 全体ノ作ル module ヲ S_{m-1} トスルト

$$S_{m-1}\cap\mathfrak{M}_m=\mathfrak{M}_{m-2} \text{ or } 0$$

トナル。」

何トナレバ $f(x_1\cdots\cdots x_n)=g(x_1\cdots\cdots x_n)$, $f\in\mathfrak{M}_m$, $g\in S_{m-1}$ トスレバ

$$f-g=(x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2-1)\cdot h,$$

$h=h_1+h_2$, $h_1\in\mathfrak{M}_{m-2}$, $h_2\in S_{m-3}$ ト分解スレバ

$$f=(x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2)h_1$$

トナル。

$\therefore\ f\in M_{m-2}$ ナル。 ————

M_1 ヨル表現ハ O_n ソノマヽデアル。故ニ M_1 ノ元トノトハ直交スル。

以下 S_{m-1} ノ中ニ互ニ直交スル base ヲトルトキ $S_m=(S_{m-1},M_m)$ ノ中ニ更ニ S_{m-1} ノ base ヲソノマヽトリ，ソレニ直交シテ S_m ノ base ヲ作ルトキ

$$\text{rank } S_m=\text{rank } S_{m-1}+(h_m-h_{m-2})$$

故ニ S_m 中 M_m ニ含マレ S_{m-1} ニ直交スル (h_m-h_{m-2}) 次ノ lin. sub space M'_m ヲ得ル。S_m, S_{m-1} ハ O_n ヲ invariant ナル故 M'_m ハ又 invariant space トナル。

〔J〕『M'_m ノ base $f_1^{(m)}(x_1,\cdots\cdots x_n),\cdots\cdots,f_{l_m}^{(m)}(x_1,\cdots\cdots x_n)$ $(l_m=h_m-h_{m-2},\ m=0,1,\cdots\cdots)$ ハ球面上ノ連続函数全体ノ系ニ対シテ完全直交系ヲナス』

（証明） 球面上ノ任意ノ連続函数 $f(S)$ ハ

$$|f-p(x_1,\cdots x_n)|<\varepsilon$$

（Weierstrass ノ近似定理）トナル polynomial p ガ存在スル。

故ニ〔C〕ノ証明ト同様デアル。

更ニ

〔K〕『$\mathfrak{u}'_m$ ($m=0,1,\cdots\cdots$) ニヨル O_n ノ表現ハ既約表現デアル。』

即チ〔J〕〔K〕ニヨリ〔I〕ニ示サレタスベテノ $\{\mathfrak{D}\}_{\Gamma(m)}$ ト $\{D\}_{\Gamma(m)}$ トガ今ノ場合ニ完全ニモトマッタ譯デアル。又 $\gamma(\mathfrak{D}^{(i)})=1$ ガ $\gamma\neq 0$ ナラ成立スルコトニナル。

〔K〕ノ O_n ノ精シイ理論ヲ用フレバ簡単ニ得ラレルガ、コヽニ初等的ニ証明ヲ與ヘヨウ。

先ヅ

『polynomial $f(x_1\cdots\cdots x_n)$ ガ $(x'_1,\cdots\cdots x'_n)=O_n(x_1,\cdots\cdots x_n)$ ナル置換ヲシテモカハラナケレバ，即チ f ガ O_n ノ vector invariant トラベ

$$f=F(x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2)$$

トナル。』

ソレニハ f ガ homogeneous ノトキダケ考ヘレバ充分デアル。

$f(x_1,\cdots\cdots x_n)=f(x'_1,\cdots\cdots x'_n)$ カラ f ハ $\mathfrak{M}$ 上デ const. デアル。

故ニ $f(x_1\cdots\cdots x_n)=r^m f\left(\frac{x_1}{r}\cdots\cdots\frac{x_n}{r}\right)=r^m\times\text{const.}$

f ハ poly. ナル故 $m=2s$，即チ $f=(x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2)^3$ トナル。———

『$\mathfrak{D}$ ノ unitary rep. $\mathfrak{D}$ ガ $\gamma(h_\gamma)$ ノ表現加群ヲ有スルトキ，$\mathfrak{D}$ ガ h_γ ノ表現トシテ identical rep. ヲ只一度シカ含マナケレバ $\mathfrak{D}$ ハ既約デアル。』

何トナレバ，$\mathcal{O}$ が可約ナラ

$$\mathcal{O}=\begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{O}_r \end{pmatrix}$$

トナルトスレバ $\mathcal{O}_1 \cdots\cdots \mathcal{O}_r$ モ $\gamma(h_f)$ ノ表現加群ヲモツ。故ニ〔G〕カラ $\mathcal{O}$ ヲ h_f ノ表現トミレバ identical rep. ヲ少クトモ r 回含コネバナラナイ。——

コノ Lemma ヲ用ヒテ u'_m ニヨル表現 $\mathcal{O}_m$ ヲ h_f ノ表現トミテ identical rep. ガ二ツナイコトヲイヘベヨイ。二ツアルトスレバ、ソノ表現加群ヲ $\{f\}$, $\{f\}$ トスルト $f \cdot f'$ ハ一次独立デアル。

$x_1 = x_1$ $(x'_2 \cdots\cdots x'_n) = \mathcal{O}_{n-1}(x_2 \cdots\cdots x_n)$ トル h_f ノ交換デカヘヲナイカラ

$$f(x_1 \cdots\cdots x_n) = f(x_1, x_2' \cdots\cdots x'_n),$$
$$f'(x_1 \cdots\cdots x_n) = f'(x_1, x_2' \cdots\cdots x'_n)$$

トナル。

又ハ $f=\sum_{i=0}^{m} a_i x_1^i g_i(x_2 \cdots\cdots x_n)$ トスレバ $g_i(x_2 \cdots\cdots x_n)$ ハ $\mathcal{O}_{n-1}$ ノ vector invariant トナル。故ニ

$$g_i(x_2 \cdots\cdots x_n) = g'_i\left((x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2)\right)$$
$$= g'_i\left((1 - x_1^2)\right) \quad \text{on } \mathfrak{M},$$

即チ $f = \bar{f}(x_1)$ on $\mathfrak{M}$ トナル。

同様ニ $f' = \bar{f}'(x_1)$ on $\mathfrak{M}$.

且ツ x_1 ノ poly. トシテ次数ハ丁度 m 次デアル。（何故ナラ $m-1$ 次以下ニナルト $S_{m-1} = 入1$. $u'_m \wedge S_{m-1} = 0$ ニ

反スル)。

故ニ α, β ヲ適當ニトレバ。$\alpha f - \beta f' \in S_{m-1}$ ニ出來ル。$\alpha f - \beta f' \in \mathfrak{u}'_m$ カラ

$$\alpha f = \beta f'$$

コレハ f, f' 一次独立トナルコトニ反スル。———

普通ノ球函数ノ時ニハ $\mathfrak{u}'_m$ ハ harmonic function ノ中カラ エラブコトが出來タ。コノコトハ一般ニ成立スル。

〔L.〕『$\mathfrak{u}'_m$ ハ m 次ノ homogeneous polynomial 中 $\Delta f = 0$ トナル全体デアル』

(証明) $\Delta f = 0$ ヲ満足スル m 次ノ hom. poly ノ全体ヲ $\overline{\mathfrak{u}}_m$ トスル。

$\overline{\mathfrak{u}}_m$ ハ明カニ O_n- invariant space トナル。

明カニ $m_0 = m'_0$, $\mathfrak{u}'_1 = \overline{\mathfrak{u}}_1$ トナル故帰納法ヲ用ヒル。

今 $\overline{\mathfrak{u}}_r = \mathfrak{u}'_r$, $r \leqq m-1$ マデ成立スルトスル。

$\mathfrak{u}_m = \mathfrak{u}'_m + \mathfrak{u}_{m-2}$ ハ orthogonal ニ分解デアル。一方 $\overline{\mathfrak{u}}_m$ ニ属スル f ト $\mathfrak{u}_{m-2} = \overline{\mathfrak{u}}_{m-2} + \overline{\mathfrak{u}}_{m-4} + \cdots\cdots =$ 属スル g トハ orthogonal トナルコトハ Gauss ノ定理ヲ用ヒテ $\Delta f = \Delta g = 0$ カラ普通ノ球函数ノトキト同ジデアル。

$\therefore \overline{\mathfrak{u}}_m \subset \mathfrak{u}'_m$. シカシ $= \overline{\mathfrak{u}}_m$ ハ O_n- invariant subspace デ $\mathfrak{u}'_m$ ハ irreducible トナル故 $\mathfrak{u}'_m - \overline{\mathfrak{u}}_m$ トナル。———

若シモ orthogonal group ノ詳シイ表現論ヲ用ヒルナラバ(W. I. p. 157)

〔M〕『u'_m ハ P^0_m ノ irreducible subspace $P_0(m,0,\cdots\cdots,0)$ ニ等シイ』

(証明) $P_0(m,0,\cdots\cdots,0)=\sum_{\substack{v\equiv m(2)\\ 0\leq v\leq m}} P^0_v \wedge P_0(m,0,\cdots 0)$

ナル故

一方 $u_m=\sum_{\substack{v\equiv m(2)\\ 0\leq v\leq m}} u'_v$, ト $P_0(u,0,\cdots\cdots 0)=u_m$

トカラ $m=0,1$ ノ時ハ明カニ〔M〕ハ成立スル故帰納法ニヨリ $P^0_v\wedge P_0(m,0,\cdots\cdots 0)$ ノ既約性カラ K ト独立ニ u'_m ノ既約性ト〔M〕トガ得ラレル。

以上ノスベテハ O_n ノカハリニ proper orthogonal group O^+_n ヲ用ヒテモヨイ。

特ニ $n=3$ ノ場合ニハ

$P^0_m\wedge P_0(m,0,\cdots\cdots,0)$ ハスベテノ O^+_n ノ連続既約表現ヲツクス。(W. I. p. 157, 164, Theo. 5.9.A)

コレハ W. II. p. 151 ノ character ヲ用ヒテ証明シタコトデアル。

シカシ $n>3$ ノ時ニハ symmetric case 丈デハスベテノ O^+_n ノ連続既約表現ヲツクシテヰナイ。(W. I. p. 164). 故ニ

〔N〕『一般球函数 $u'_m=\overline{u}_m$ ニヨル表現ガスベテノ O^+_n ノ連続既約表現ヲツクスノハ $n=3$ ノ場合ニ限リ、$n>3$ ノ時ニハ他ニモ存在スル』

猶 $n=3$ ノ時ハ $O^+_n\cong u^0_2/\mathfrak{z}_0$ ヲ用ヒレバ u'_m ノ

rank ハ $2H_m - 2H_{m-2} = 2m+1$ $(m=0,1,\cdots\cdots)$ ナル故、一方2ノ最後ニ $\mathcal{U}^{\circ}_{2l/3}$ ノスベテノ連続既約表現ハ $1, 3, \cdots\cdots, 2l+1, \cdots\cdots$ 次ノ表現ガノッゾツアルコトヲ知ルカラ．此ノ方法デモ O_3^+ ノ時ニツクシテキルコトガワカル。————