



Title	コンパクト群ノ連続表現ニツイテ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 182, p. 324-350
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74728
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1797. ユニタリ群ノ連続表現ニツイテ

河田 敬 義 (東大)

H. Weyl: "The classical groups." 及び
H. Weyl (山内氏譯) "群論ト量子力学" (夫々 W.I., W II
トシテ引用スル) ノ中デ群ノ表現ニ関シテニ三氣付イタコト
ヲ述ベタイト思ヒマス。色々ト教ヘテイタタイタ安倍君ニ厚
ク感謝致シマス。

1

n 次ノ unitary group U_n ノスベテノ連続既約表
現ヲモトメル問題ガアル。

(勿論 $A = (a_{ij})$ トスル時 $\text{Norm } \|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ デ
topology ヲ與ヘルモノトスル。)

full linear group GL_n / subgroup of GL_n - 對シ
テ

$GL_n^{\mathbb{C}} = GL_n \times \dots \times GL_n$ ($n=1, 2, \dots$) (Kronecker 積)

$\overline{GL_n}$ (complex conjugate)

$\widetilde{GL_n}$ (contragredient transformation

$$A \rightarrow (A^{-1})')$$

$|O_f|$ (determinant, $A \rightarrow |A|$)

或ハ之レ等ノ Kronecker 積ハ O_f ノ連続表現ヲ與ヘ
ル。

$O_f \subset \tilde{U}_n$ ナラバ $\overline{O_f} = \widetilde{O_f}$ トナラバ $\tilde{U}_n$ 下 O_f ハ closed subgroup = 限ル。 O_f ハ compact ナル故 O_f ノ連続表現ハ unitary 表現ト同値 ($\sim$ トカク) デアルカラ。(例ヘバ V. Heumann: "almost periodic functions in a group." Trans. Amer. 36. (N.I)) 完全可約
デアル。

O_f ノ unitary 表現 O_1, O_2 ガアツテ, O_1 ガ O_2 ヲ
分解シテ得ラレルトキ, 即チ

$$O_2 \sim \begin{pmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & O_1' \end{pmatrix}, \quad (\text{之レヲ } O_2 = O_1 + O_1' \text{ トカク})$$

ナルトキ, O_1 ヲ O_2 ノ因子ト呼ビ, $O_1 \subset O_2$ トカクコト=
スル。 O_1 ガ既約表現ナラ既約因子ト呼ブ。

明カニ $O_1 \subset O_2, O_1' \subset O_2'$ ナラバ $O_1 \times O_1' \subset O_2 \times O_2'$ デ
アル。

O_f ノスベテノ連続既約表現ヲモトメルコト= 難シク

[A] (Burnside) 『 O_f ガ有限群ナラバ, O_f ノスベ
テノ既約表現ハ O_f^n ($n=1, 2, \dots$)ノ因子トシテ得
ラレル。』

然シコノコトハ一般ニハ成立シナイ。

例: 円周ノ廻轉群ノトキ $|O_f|^{-1}$ ハ O_f^n ($n=1, 2, \dots$)ニ
ハ合マレナイ。

[B] (Weyl II. p. 345) 『 u_n / スベテノ連続既約表現ハ ϕ^r ($r=1, 2, \dots$) / 既約因子タビ 1 (identical + 表現) ト $|\phi|^{-m}$ ($m=1, 2, \dots$) トノ積トツテ得ラレル』
又一般ニ

[B'] 『(B) ハ u_n デナリ、ソノ closed subgroup of ニツイテモ成立スル』

[B] ノ証明ヲ Weyl II デハ 実際ニモトメルコトニヨリ 與ヘテキルガ、コノデハ [B], [B'] ヲ N.I. ノ理論ヲ用ヒテ 証明スル。ソレニハ先ヅ

[C] 『 ϕ / スベテノ連続既約表現ハ $\phi^l \times \overline{\phi}^m$ ($l, m = 0, 1, 2, \dots$) / 因子トシテモトメラレル』

(証明) $\phi \ni S = (u_{ij}(s))$ トスルト $\phi^l \times \overline{\phi}^m$ / 組成因子トシテ、スベテノ $u_{ij}(s) = \text{ツイテ } l \text{ 次}$, $\overline{u}_{ij}(s) = \text{ツイテ } m \text{ 次ノ單項式}$ ガ得ラレル。故ニ $\phi^l \times \overline{\phi}^m$ ヲ既約因子ノ和ニ分解シテ、同値ノカラーツツニ代表ヲトリ、 $\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(r)}$ ヲ互ニ同値デナリ既約因子トスルト、ソノ組成因子 $D_{\rho\sigma}^{(i)}(s)$ ($i=1, \dots, r$) / 一次結合トシテ、スベテノ $u_{ij}(s) = \text{ツイテ } l \text{ 次}$, $\overline{u}_{ij}(s) = \text{ツイテ } m \text{ 次ノ homogeneous polynomial}$ ハ得ラレル、

故ニ $\phi^l \times \overline{\phi}^m$, ($l, m=0, 1, 2, \dots$) / 既約因子中同値デナリモノヲ $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots$ トスレバ $D_{\rho\sigma}^{(i)}(s)$ / linear combination トシテスベテノ $u_{ij}(s)$, $\overline{u}_{ij}(s)$ / polynomial ハ得ラレル。

今 $f(s)$ ヲ ϕ / 任意ノ連続函数トスル。又ハ $f(s) = f(u_{ij}(s))$

-----, $u_{nn}(s)$) トカケル $u_{11}(s), \dots, u_{nn}(s)$ / 連続
 函数ト見テ可イ。

$$u_{ij}(s) = d_{ij}(s) + \sqrt{-1} \beta_{ij}(s)$$

ト実部ト虚部 = 分ケルト $2n^2$ 箇ノ $d_{ij}(s), \beta_{ij}(s)$ / 連続
 函数トミラレル。 $2n^2$ 箇ノ実独立変数 $d_{ij}(s), \beta_{ij}(s)$ / 連
 続函数トミナス $\mathcal{M} = \mathcal{H}, \mathcal{V}$ / 定義区域ガ $2n^2$ 次元ノユーク
 リッド空間ノ $\mathcal{M}$ 内 bounded closed set $\mathcal{L}$ トナル。
 (例ヘバ $\mathcal{M} = \mathcal{U}_n$ / 時ハ

$$\sum_{i,j=1}^n (d_{ij}(s) + \sqrt{-1} \beta_{ij}(s)) (d_{ik}(s) + \sqrt{-1} \beta_{ik}(s)) \\ = \delta_{jk}$$

デ定義サレル closed set. bounded ナルハ $|u_{ij}(s)| \leq 1$ ナラ。

故ニ実変数ノ複素係数ノ polynomial $P = \sum f$ ハ
 $\mathcal{L}$ 上デ同様ニ近似出来ル。(Weierstrassノ定理):

$$|f(s) - P(d_{11}(s), \dots, \beta_{nn}(s))| < \varepsilon \quad \forall s \in \mathcal{L}$$

$$\text{又ハ} \quad d_{ij}(s) = \frac{1}{2} (u_{ij}(s) + \bar{u}_{ij}(s)),$$

$$\beta_{ij}(s) = \frac{1}{2i} (u_{ij}(s) - \bar{u}_{ij}(s)),$$

ヲ代入シテ

$$|f(s) - P_1(u_{11}(s), \dots, u_{nn}(s), \overline{u_{11}(s)}, \dots, \overline{u_{nn}(s)})| < \varepsilon, \quad s \in \mathcal{M}.$$

サテ今 $\mathcal{M}^{(1)}, \mathcal{M}^{(2)}, \dots$ デ $\mathcal{M}$ ノスベテノ連続規約表現ヲマ
 クシテナイトスレバ、ソレ等ト同値ナイ $\mathcal{M}$ ヲトリ

$f(s) = \chi(s)$ (χ の指標) トスレバ $f(s)$ ハスベテ、
 $D_{\rho}^{(i)}(s)$ ($i=1, 2, \dots$) ト直交スル。故ニ χ ノ一次結合デ
 アル $P_1(u_1(s), \dots, \overline{u_n}(s))$ トモ直交スル。

$$\begin{aligned} \therefore \chi(1) &= \sum_s \overline{f(s)} \cdot f(s) \\ &= \sum_s \overline{f(s)} \cdot (f(s) - P_1(u_1(s), \dots, \overline{u_n}(s))) \\ &\leq \text{Max} |f(s)| \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

故ニ $\varepsilon \rightarrow 0$ トスレバ $\chi(1) = 0$ トナリ矛盾ヲ生ズル。故ニ
 [C] ハ証明セラレタ。

[C] カラ [B'] ヲ出スルハ

$\overline{\phi_j} = \widetilde{\phi_j}$ カラ $(u_{ij}(s))' = (u_{ij}(s))^{-1} = |u_{ij}(s)|^{-1} (p_{ij}(s))$,
 $p_{ij}(s)$ ハ $u_{ij}(s)$ ノ $n-1$ 次ノ homogeneous polynomial
 カラ ϕ_j ノ既約因子 ϕ_j ハ

$$\phi_j \subset |\phi_j|^{-1} \times \phi_j^{n-1}$$

故ニ $\phi_j^L \times \overline{\phi_j}^m$ ノ既約因子 ϕ_j ハ

$$\phi_j \subset |\phi_j|^{-m} \times \phi_j^{L+m(n-1)}$$

トナル。即チ [B'] ——

ϕ_j ノ例トシテ orthogonal group, unimodular
 unitary group ガアル。

其等デハ夫々 $|\phi_j|^{-1} = |\phi_j|$, $|\phi_j| = 1$ ナル故

[B''] 『orthogonal group 及ビ unimodular group
 ノスベテ、連続既約表現ハ / 及ビ ϕ_j^n ($n=1, 2, \dots$) ノ
 因子デアール』

又、 ϕ_j ガ有限群デ、ソノ order ガ n ナリ トスレバ

$$|\sigma|^n = 1, \text{ 又ハ } |\sigma|^{-1} = |\sigma|^{n-1}$$

故 = [B'] カラ [A] へ出ル。

[A] ハ又 A. Weil の定理 (紙上談話会, 浅野氏 164号 p. 404 参照) ト関係ガアル。

C_n / subgroup h_y が整係数多項式 $f(h_y) = 0$ ヲ満足スルトスレバ h_y / subcyclic group $\{s\}$ へ $f(\{s\}) = 0$ ヲ満足スル。 f / 次数ヲ m トスレバ, y / コトハ $\{s\}^{m+r}$ / 既約表現ハ $1, \{s\}, \dots, \{s\}^m$ / ドレカノ因子ナルコトヲ意味スル。 故 = [A] カラ $\{s\}$ / スベテノ既約表現ハ $1, \{s\}, \dots, \{s\}^m$ / 中カラ得ラレルカラ, 同値デタイ $\in$ / ハ 高々 $1 + n + \dots + n^m = N$ 箇シカタイ。

S ハ h_y / 任意ノ元トスルト, y / コトハ S / orderハ高々 N ナルコトヲ示ス。

故 = Burnside / 定理 (同上 p. 398) = 帰着サレル。

2

[C] ハ又 Van. Kampen: "Almost periodic functions and compact groups" *Annals of Math.* 37. (1936) (K) ト関係ガアル。

[C] タイヒカヘレバ

[C'] 『Separable compact group of / 有限箇ノ連続既約表現 $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(r)} = \sigma^{(i)}$ (S) = E ($i = 1, \dots, r$) ナラバ $S = I$ トナルナラバ, σ / スベテノ連続

既約表現 $\psi^{(i)}$ 及 $\bar{\psi}^{(i)}$, 中 / Kronecker 積 / 因子トシテ得ラレル。』

即ち $\psi = \begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \vdots \\ \psi^{(r)} \end{pmatrix}$ ト考ヘレバヨイノデアル。

之レヲ一般ニシテ

[C''] (K. § IV, Theor. i. Cor.). 『separable compact group G ノスヅテ、連続既約表現 ψ , 既約表現ノアル集リ $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots$ ガアツテ、 $\psi^{(i)}(s) = E + \tau$ ($i = 1, 2, \dots$) $s = 1$ トナル時ハ、 $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots, \bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(2)}, \dots$ } 中 / Kronecker 積 / 因子トシテ得ラレル。』

(証明) $\psi^{(1)}(s) = E, \dots, \psi^{(n)}(s) = E + \tau s$, 全体ノトス closed invariant subgroup $\mathcal{H}_n$ トスルト $G/\mathcal{H}_n \wedge [C']$, 性質ヲ有ス。 G ; compact + ν コトカラ

I , 任意ノ近傍 $\mathcal{U}$ ヲトルト $\mathcal{U} \supset \mathcal{H}_n$, $n > n_0 + \nu$ n_0 カアルカラ、今任意ノ G , 上ノ連続函数 $f(s) =$ 對シテ $|f(x) - f(xy)| < \varepsilon$, $y \in \mathcal{U} = \mathcal{U}$ ヲトルト

$$f_n(s) = M_{t \in \mathcal{H}_n} f(st) \text{ ヲ作レバ } (K. § V)$$

$$(1) |f(s) - f_n(s)| < \varepsilon \text{ トナル。}$$

$f_n(s)$ $\wedge G/\mathcal{H}_n$, 連続函数ナルニヨリ [C'] カラ

$$(2) \left| f_n(s) - \sum_{i=1}^N \alpha_i D_{\rho\sigma}^{*(i)}(s) \right| < \varepsilon + \nu \quad \psi^{*(i)}(G/\mathcal{H}_n)$$

既約表現, 即ち $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(m)}, \bar{\psi}^{(1)}, \dots, \bar{\psi}^{(m)}$, 中,
Kronecker 積ノ因子) ガアル。(1)(2)ヲ組合セテ [C]ノ
証明ト同様ニ [C']ガ証明サレル。——

(以上ノ証明中一般論ハ compact group = オケル
mean valueノ存在ト同値デナイ既約表現間ノ直交性
大ヲ用ヒタ大デアアル。)

Neumann, Kampen, 1. abelian group,
Character group = 對シテ Compact group,
凡テノ連続既約表現全体 Γ , 中ヲ

$\Gamma \ni \psi$, 逆ニ對應シテ $\bar{\psi}$, $\psi_1 \times \psi_2$, 既約因子全体
ヲ Characterノ積 = 對應シテ取ルコトニシテ Character
group, subgroup = 對應シテ Modulヲ定義
シタ。

Def. 『 Γ , Modul Δ トハ Γ , subset デ

$\Delta \ni \psi$ ナラ $\Delta \ni \bar{\psi}$, $\Delta \ni \psi_1, \psi_2$ ナラ $\Delta \ni \psi_1 \times \psi_2$, 既
約因子 $\psi \in \Delta$ ヲ満足スルモノヲイフ。』

特ニ Δ ガ $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots, \bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(2)}, \dots$, 中ノ
Kronecker 積ノ因子ノ全体トシテ得ラレルトキニ $\Delta(\psi^{(1)}, \psi^{(2)},$
 $\bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(2)}, \dots)$ トカキ "erzeugen" サレルトイフ。[C']ヲイヒカヘレバ

[D] 『compact group G ガ unitary group
ノ subgroup ナルタメノ必要充分條件ハ Γ ガ有限個ノ
"Erzeugende" ガアルコトデアアル』

又 [C'] カラ (K. § VIII)

[E] 『sep. compact group of, closed invariant

subgroup $\mathcal{H}$ of Γ , modul Δ to Δ

$\mathcal{H}$ is normal in Γ if and only if $\mathcal{H} \ni s = \text{對して } \sigma(s) = E \text{ to } \Gamma$

Γ is the whole of Δ ,

Δ is normal in Γ if and only if $\Delta \ni \sigma = \text{對して } \sigma(s) = E \text{ to } \Gamma$

Γ is the whole of Δ

對應される可逆的 = 一對一 = 對應スル

compact abeliangroup の構造が、character group からわかる様 = sep. compact group of の構造も、その既約表現全体 Γ から知ることが出来る。

Character の order が有限ナルコト = 對應して

A. Weil の定理から $\Gamma \ni \sigma$ が代数方程式を満足スルコトが對應スル。明 = Γ の、スベテ、finite order、 σ 全体は Γ の modul Γ_0 となる。

[F] Γ が zero dimensional ナルコトは $\Gamma = \Gamma_0$ となるに對等である。

(証明) $\Gamma = \Gamma_0$ となる $\Gamma \ni a, b, a \neq b$ となる $\sigma(a) \neq \sigma(b)$ となる $\sigma \in \Gamma$ あり。

$\sigma(s) = E$ ナル s の全体を $\mathcal{H}$ とスレバ $\Gamma/\mathcal{H}$ は有限群となるから $\mathcal{H}$ は open $\neq$ closed となる。

故 = a, b は異なる component に入る。

逆 = Γ が zero-dimensional となる $\mathcal{H}_n \rightarrow 1$ となる open $\neq$ closed + invariant subgroup $\mathcal{H}_n$ が有る。 $\Gamma/\mathcal{H}_n$ は有限群となる故既約表現は finite order である。

トココが $[C^n]$, 証明ト同様ニソレデスベテノ連続既約表現ヲツクシテキル。故ニ $\Gamma = \Gamma_0$,

同様ニ

(F') 『 $\mathcal{O}_f$ が connected ナルコトト $\Gamma_0 = 1$ ナルコトトハ對當デアアル』

(F'') 『 $\mathcal{O}_f$ が 單純群ナルコト. $\Gamma = (d)$, ($\mathcal{O}$ ハ Γ ノ / デタイ勝手ノ元) トハ對當デアアル。又ハ $\mathcal{O}_f$ ノスベテノ連続既約表現が faithful デアルコトト對當デアアル』

例. 0 $\tilde{u}_n$ ノスベテノ一次連続既約表現ハ

$$\tilde{u}_n \rightarrow |\tilde{u}_n|^e, \quad (e = 0, \pm 1, \dots)$$

デアアル。(Weyl I. p. 26, p. 128). コノ modul

Δ = 對應スル invariant subgroup 群^o $\tilde{u}_n$ / commutator group ハ unimodular unitary group $\tilde{u}_n^0$ デアル。

0 $\tilde{u}_n$ / centre $\mathcal{Z}$ ハ diagonal unitary matrix ノ全体デアアル。

$\gamma \in$ 對應スル modul Δ ハ $|\tilde{u}_n|^{-\gamma} \times \tilde{u}_n^{\gamma}$, 既約因子ノ全体デアアル。

$$\tilde{u}_n = \tilde{u}_n^0 \vee \mathcal{Z}, \text{ ナル故 } \tilde{u}_n^0 \cap \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \text{ トスレバ}$$

$$\tilde{u}_n / \mathcal{Z} \cong \tilde{u}_n^0 / \mathcal{Z}_0$$

$\therefore \tilde{u}_n^0 / \mathcal{Z}_0$ ノスベテノ連続既約表現ハ $|\tilde{u}_n^0|^{-\gamma} \times \tilde{u}_n^0$ ノ因子トナル。

signature デイヘバ (W. I. p. 132)

$$(f_1, \dots, f_n), \quad f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n,$$

$$\sum_{i=1}^n f_i = 0 \text{ t + v.}$$

○ 特 = $n=2$ の時 $(f, -f)$ デアル。又 $|\tilde{u}_n^0| = 1$ カラ $(2f, 0)$ トイッテモヨイ。即チ $\tilde{u}_2^0/\mathfrak{z}_0$ 1 スベテノ連続既約表現ハ covariant symmetry tensor = ヨル表現デアル。(W. II. p. 151)

○ $\tilde{u}_2^0/\mathfrak{z}_0$ ハ單純デアルコトガワカル。 $\tilde{u}_2 \ni s = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ トレテ covariant vector (x, y) フトレハ $2r$ 階 cov. symmetry tensor space, base ハ $(x^{2r}, x^{2r-1}y, \dots, y^{2r})$ t + v $2r+1$ 次元, space t + v.

$\mathcal{O} = \langle P(2f, 0) \rangle$ (W. I. p. 130) デ $\mathcal{O}(s) = E$ t + v + r

$$x^{2r} = (x')^{2r} = (\alpha x + \beta y)^{2r} \quad \therefore \alpha^{2r} = 1, \beta = 0$$

$$y^{2r} = (y')^{2r} = (\gamma x + \delta y)^{2r} \quad \therefore \gamma = 0, \delta^{2r} = 1$$

$$x^{2r-1}y = (x')^{2r-1} \cdot y' = \alpha^{2r-1} \delta x^{2r-1} \cdot y \quad \therefore \alpha = \delta$$

$$\therefore s \in \mathfrak{z}_0 \text{ t + v.}$$

即チ F'' カラ $\tilde{u}_2^0/\mathfrak{z}_0$ ハ單純デアル。

3.

有限群 $\mathcal{O}$ の t の subgroup h_y t = 對シテ

$$\mathcal{O} = p_1 h_y + p_2 h_y + \dots + p_r h_y$$

t 分解シテ

$$\sigma \rightarrow \begin{pmatrix} p_1 h_y, \dots, p_r h_y \\ \sigma p_1 h_y, \dots, \sigma p_r h_y \end{pmatrix}$$

↑ の表現ヲ考ヘル時 = , h_y が invariant subgroup
ノ時 = 對應スル一般ノ compact group ; 場合ガ [C'] デ
(更 = 可等 = K =) 與ヘラレテキル。

此レ = 對應シテ h_y が invariant デ + イ 持 = 對應ス
ル理論ガ Weyl: "Harmonics on homogeneous
manifolds," *Annals of Math.* 35 (1934)
(W. III) ガ與ヘラレテキル。ソレハ 後 = 見ル様 = 球函数ノ理
論ノ一般化デア。コノデハ Heumann ノ理論 (N) カラ
導イテキル。

抽象群 G ト ソレノ transitive transformation
group トシテ モツ 集合 M トガ與ヘラレテキルトスル

M ノ 函数 $f(p)$ カラ P_0 ノ 固定シテ $f(s) = f(sP_0)$

ト定義シテ G ノ 函数ヲ作ル。 $tP_0 = P_0$ ナル t ノ 全体ヲ h_y
トスルト、 G ノ 函数 $f(s)$ ガ M ノ 函数カラ導カレルタメ
ノ條件ハ

$$f(st) = f(s), \quad t \in h_y$$

ナルコトデア。ル。

M ノ 函数 $f(p)$ ガ almost periodic トハ

$f(sP) = f(P)^S$ ガ $S =$ 関シテ一様收斂ノ topology
デ totally bounded ナルコト、スレバ $f(s) = f(sP_0)$

ガ G ノ 上デ a.p. ナルコト、同じ定義 = ナル。

$$f(st) = f(s), \quad t \in h_y$$

ナル α, β function / 全体 $\gamma(h_g)$ ト書クコトニ
スル。

初メニ $\mathcal{O}_g$ / n 次 / unitary 表現 $d\mathcal{O}$ / 表現加群
ニツイテシラベテミル。

今 $\gamma(h_g)$ / 元ヨリナル $d\mathcal{O}$ / 表現加群 $\mathcal{M}$ / γ / base
ヲ $f_1(s), \dots, f_n(s)$ トスル。即チ

$$\begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} f_1(ts) \\ \vdots \\ f_n(ts) \end{pmatrix} = d\mathcal{O}(t) \begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix}$$

トスル。

表現 $d\mathcal{O}$ ヲ與フル $\gamma(h_g)$ / 表現加群 $\mathcal{M}$ / 全体ヲ
 $\{\mathcal{M}\}_{d\mathcal{O}}$ トスル。

$\{\mathcal{M}\}_{d\mathcal{O}}$ カラ $\alpha, \mathcal{M}, \mathcal{M}'$ ヲトリ $d\mathcal{O}$ ヲ得ル base
ヲ

$$(f_1(s), \dots, f_n(s), (f'_1(s), \dots, f'_n(s)))$$

トスルト

$\alpha \mathcal{M} + \beta \mathcal{M}'$ ヲ $(\alpha f_1(s) + \beta f'_1(s), \dots, \alpha f_n(s) + \beta f'_n(s))$ / 張ル表現加群トスルハ、又 $\{\mathcal{M}\}_{d\mathcal{O}} =$ 属ス
ル。

カクシテ $\{\mathcal{M}\}_{d\mathcal{O}}$ $\mathcal{M}$ model トナツタ。(但シ $\mathcal{O}$ ヲ附
ケ加ヘテ)

$$\begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix} = d\mathcal{O}(s) \begin{pmatrix} f_1(1) \\ \vdots \\ f_n(1) \end{pmatrix}$$

カテ $(f_1(1), \dots, f_n(1))$ は 0-vector = $\lambda + \mu + \nu$,
故 =

$$\{m\}_0 \ni m = (f_1(s), \dots, f_n(s)) \longleftrightarrow (f_1(1), \dots, f_n(1)) \in V_n(k)$$

+ ν complex number, n 次, vector トノ 對應ハ
isomorphic トナル。

故 = ν , 張ル linear space τM トスル

complex Euclidespace $E^{(n)} = M + M'$ ト直交
セル $M, M' =$ 分ケテ, M τ 次元 トスル M ノ 中 = $(1, 0, \dots$
 $\dots 0), \dots (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ナル 座標軸ヲ 取ッテ
unitary orthog. transf. P ナ 座標変換ヲ 行ヘバ

$$\begin{pmatrix} f'_1(s) \\ \vdots \\ f'_n(s) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix}$$

ト m ノ base ヲ トリカヘレバ、ソレハ $\sigma' = P \sigma P^{-1}$ ナル
表現ヲ 與ヘル。

$\{m\}_0$ ノ 中カラ

$$m^{(i)} = (f_1^{(i)}(s), \dots, f_n^{(i)}(s)), \quad i = 1, \dots, r$$

$$(f_1^{(i)}(1), \dots, f_n^{(i)}(1)) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

i 箇

ナル 表現加群 $m^{(1)} \dots m^{(r)}$ ヲ 取レコトヲ 出セル。コレ
ガ 丁度 $\{m\}_0$ ノ base トナル。

ソウ スレバ

$$\begin{pmatrix} f_1'^{(i)}(s) \\ \vdots \\ f_n'^{(i)}(s) \end{pmatrix} = d_j'(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1i}'(s) \\ \vdots \\ D_{ni}'(s) \end{pmatrix}$$

即ち $m^{(i)}$ は d_j' の第 i 列より作れる加群トナル。

[定義] d_j の unitary (irreducible) rep. $\sigma =$ 對シテ上, 如ク d_j' と同値 = 取り $d_j' \rightarrow \gamma(h_j) =$ 對シテ normal ト呼ぶコト = スル。

[G] 『 d_j の normal unitary (irreducible) rep. $\sigma =$ 對シテハ, $\forall$ 組成分子 $D_{ij}(s)$, $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, r(\sigma)$ へ $\gamma(h_j) =$ 属スル。且 y $m^{(i)} = (D_{1i}(s), \dots, D_{ni}(s))$ ($i=1, \dots, r$) へ $\{m\}_\sigma$ の base トスル。

$r(\sigma)$ へ又 $\sigma \rightarrow h_j$ の表現トシタ時 = identical rep. の現ハレル回数デアル。』

$r(\sigma) =$ 関スル後半大詳細スレバヨイ。

$\sigma \rightarrow \gamma(h_j) =$ 對シテ normal トスルト $\sigma(st) = \sigma(s)$; $d_j(t)$ カラ $t \in h_j$ トスレバ $D_{ij}(st) = D_{ij}(s)$ ($i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, r$) 7 用ヒレバ

$$d_j(t) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \underbrace{0}_{\gamma} & & \boxed{} \end{pmatrix}$$

即ち $d_j(t)$ へ unitary ナル故

$$d_j(t) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & d_j'(t) \end{pmatrix}$$

ト分割サレル。故ニ $\mathcal{U}(t)$, $t \in \mathcal{H}_\gamma$ ハ少トクモ $\gamma(\mathcal{U})$ 同
identical rep. ヲ含ム。

逆ニ S 面 含ム トスレバ $\mathcal{U} \sim \mathcal{U}^0$ ヲトリ

$$\mathcal{U}^0(t) = \begin{pmatrix} E_S & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_1^0(t) \end{pmatrix} \text{トラシムレバ}$$

$$m^{(1)} = (D_{11}^0(s), \dots, D_{n_1}^0(s)), \dots, m^{(S)} = (D_{1S}^0(s), \dots, D_{n_S}^0(s))$$

ハ $\{m\}_\gamma$ / 一次独立, 表現加群 = $\mathbb{C}^S$. $\therefore S \leq \gamma(\mathcal{U})$. —

v. Heumann (N) / 考ヘ = ヲリ

def. a. p. function / 果リ γ ハ ℓ -closed family
 7 トス トハ

1) $\gamma \ni f, g$ トラ $\gamma \ni \alpha f + \beta g$. α, β ハ Complex
 number.

2) $\gamma \ni f(x)$ トラ $\gamma \ni f(ax)$.

3) $\gamma \ni f_n$, f_n ハ uniformly $= f = \text{conv.}$ スレ
 バ $f \in \gamma$.

明カニ $\gamma(\mathcal{H}_\gamma)$ ハ ℓ -closed family トス。

$\gamma(\mathcal{H}_\gamma)$ ガ 映ヘ ラレル 特ニ

[H] $\mathbb{C}^S$ / スベテノ unitary irreducible rep. 7

normal = 直シテオク。ソレヲ $\mathcal{U}^{(1)} \dots$ トス。

$$\gamma(\mathcal{H}_\gamma) \ni D_{\rho\sigma}^{(i)}(s), (\rho=1, \dots, S_i, \sigma=1, \dots, r(\mathcal{U}^{(i)}))$$

(S_i ハ $\mathcal{U}^{(i)}$ / 次数) / 全体 $\{D\}_{\gamma(\mathcal{H}_\gamma)} \wedge \gamma(\mathcal{H}_\gamma)$ /

完全直交系ヲナス。

即チ $f(s) \in \gamma(\mathcal{H}_\gamma)$ トスレバ

$$\alpha_{p\sigma}^{(i)} = \int_S f(s) D_{p\sigma}^{(i)}(s), \quad (i=1, 2, \dots, p=1, \dots, S_i, \\ \sigma=1, \dots, r(\mathcal{F}^{(i)}))$$

トスレバ

$$\int_S f(s) \overline{f(s)} = \sum_{i,p,\sigma} |\alpha_{p\sigma}^{(i)}|^2$$

トル Parseval's equation が成立スル。

又 Approximation theorem が成立スル。即チ
 $f(s) \in \mathcal{F}(I_y)$ に対して

$$\left| f(s) - \sum \alpha_{p\sigma} D_{p\sigma}^{(i)}(s) \right| < \varepsilon$$

トルヤ $\varepsilon =$ 有限箇ノ $D_{p\sigma}^{(i)}(s) \neq \{D\}_{\mathcal{F}(I_y)}$ カラ取り出スコ
 トが出来ル。』

(証明) (N. p. 416) ト同様ニ

(i) $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ 十 $g \times f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ トル。

(ii) $D_{p\sigma}(s) \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ 十 $D_{p'\sigma}(s) \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$

(iii) $f(s) \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ 十 $\forall \varepsilon > 0$, a.p. function = 對ス
 ル完全直交系 $D_{p\sigma}^{(i)} =$ ヲリ展開スルトキ

$$\alpha_{p\sigma}^{(i)} = \int_S f(s) D_{p\sigma}^{(i)}(s) \neq 0 \text{ 十}$$

$$D_{p\sigma}^{(i)}(s) \in \{D\}_{\mathcal{F}(I_y)} \text{ トル。}$$

コトニ $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ が單ナル l -closed family 十 $\forall \varepsilon > 0$ が
 トラハレテ来ル。即チ

$\alpha_{p\sigma}^{(i)} \neq 0$ トスレバ

$$D_{p'p}^{(i)} \times f(s) = \sum_{\tau=1}^{S_i} \alpha_{p\tau} D_{p'\tau}^{(i)}(s) \in \mathcal{F}(\mathcal{M}), \quad p'=1, \dots, n$$

$$\therefore \left(\sum_{\tau} \alpha_{p\tau} D_{1\tau}^{(i)}(s), \dots, \sum_{\tau} \alpha_{p\tau} D_{n\tau}^{(i)}(s) \right) = m \wedge$$

$\{m\}_{\mathcal{O}} =$ 属する度 $\square$, base が表現 $\mathcal{O}^{(i)}$ 7 具へるの 假
定 $= \exists, 0$

$$m^{(i)} = (D_{1i}(s), \dots, D_{ni}(s)) \quad (i=1, \dots, r(\mathcal{O}^{(i)}))$$

が $\{m\}_{\mathcal{O}}$, base 1+11 カラ $m \wedge$ の 一次結合 1+11 ハ
サレヌ。故 $= \alpha_{p\tau} = 0, \tau > r(\mathcal{O}^{(i)}) 1+11$ 。

$$\therefore \alpha_{p\sigma}^{(i)} \neq 0 \text{ 1+11 } \sigma \leq r(\mathcal{O}^{(i)}),$$

$$\text{即ち } D_{p\sigma}^{(i)}(s) \in \{D\}_{r(h_y)}$$

1+11。

即ち スベテ $D_{p\sigma}^{(i)}(s) \propto$ Parseval's eq. 1+11 ス コ
トカラ $\{D\}_{r(h_y)}$ 式 $\propto$ Parseval's eq. 1+11 成立スル。

Approximation theorem $\wedge$ (N. p. 475) カ
ラ

$$|f(s) - \phi \times g \times f(s)| < \varepsilon, \quad \phi \times \phi = \phi$$

$=$ 1+11。 (i) $\cdot$ (iii) カラ $\phi \times g \times f(s) \wedge \{D\}_{r(h_y)}$,
linear combination 1+11。 故 $=$ (App. theo. $\wedge$ 成
立スル。

特 $= \mathcal{O}_f = \text{topology}$ 1+11 $\propto$ compact 1+11 トキハ
by closed in $\mathcal{O}_f \neq 1+11$ 。 故 $= \mathcal{M} = \text{top. } \propto \mathcal{O}_f \propto h_y = \exists$
11 Hebungruppe $= \exists$ 11 Zerlegungsraum トシテ
導入スレバ $\mathcal{M} \wedge$ $\propto$ compact 1+11, $\mathcal{M}$ 1+11 連続函

数ハ α . p. function トナル。 $\gamma(m)$ ノカハリニ、スベ
テ m ノ上ノ連続函数 $\bar{\gamma}(m)$ ヲ考ヘテモ全ク同様ニ $[H]$
ハ成立スル。

$\bar{\gamma}(m)$ ノ表現加群ニヨツテ生ズルスベテノ σ ノ連続既
約表現ヲ $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots$ ノ全体 $\{\sigma\}_{\bar{\gamma}(m)}$ ハ $[G] = \mathfrak{O}$
リ $\mathfrak{h}_\gamma$ ノ identical rep. テ induce サレタ表現デア
ル。

コレハ一般ニ modul γ 作ラナイ。 N. Theo. 33 =
相増シテ

[I] 『 $\{\sigma\}_{\bar{\gamma}(m)}$ テ "erzeugen" サレタ modul
 Δ ハ $\mathfrak{h}_\gamma =$ 含まレル maximal invariant subgroup
 $\mathfrak{N}$ ト $[E]$ ノ意味ヲ對應スル。』

(証明) ソレハ $\{\sigma\}_{\bar{\gamma}(m)} \ni \sigma = \sigma(a) = E$ ト
ナル a ノ全体デアアル。

ソレハ $[G]$ ノ後半ノ証明同様 $D_{\rho\sigma}^{(i)}(a) = D_{\rho\sigma}^{(i)}(1)$,
 $D_{\rho\sigma}^{(i)}(s) \in \{D\}_{\bar{\gamma}(m)}$ トナルカラ Approximation
theorem カラ

スベテノ $\bar{\gamma}(m) \ni f(s) = \psi$ イテ $f(a) = f(1)$ トナル。
故ニ $a \in \mathfrak{h}_\gamma$ トナル。

$\therefore a$ ハ $\mathfrak{h}_\gamma =$ 含まレル invariant subgroup $\mathfrak{N}$
ニ入ル。逆ニ成。 ———

4.

3. Weyl ノ理論ノ一番手近イ應用ハ球函数ニ應用

ヲナル。

O_f 7 n 次, real orthogonal group O_n トシ。
 M 7 n -dim. Sphere:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

トスル。

O_f, M へ, topology, 入レ方ハ普通 = 入レレバ 3
ノ終リ, 入レ方ト一致スル。又 M ノ上ノ函数カラ作ツタ
 $f(s) = f(sP_0)$ ノ O_f ノ上ノ平均値ト M ノ上ノ普通ノ積
分 = コレ平均値ト一致スル。

一点 $P_0 = (1, 0, \dots, 0)$ トスレバ

$$h_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{O_{n-1}} & & & \end{pmatrix} \cong O_{n-1}$$

ヲナル。

今, $x_1, \dots, x_n$ 7 m 次 homogeneous polynomial
全体ヲ M 上ヲ考ヘルト O_n 7 invariant + space W_m
ヲ作ル。 ($m=0, 1, 2, \dots$)

先ダ補助定理トシテ

『 $f(x_1, \dots, x_n)$ 7 polynomial ガ M 上ヲ恒 =
0 7 値ヲトレバ

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1)g(x_1, \dots, x_n)$$

トナル。

特 = f ガ homogeneous 7 $f=0$ トナル』

何トナレバ f ガ先ダ homogeneous 7 $r^2 = x_1^2 + \cdots$
 $\cdots + x_n^2$ トスレバ

$$f(x_1, \dots, x_n) = r^n f\left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_n}{r}\right) = 0 \text{ 故 } f = 0$$

トナル。

f が homogeneous $\Rightarrow$ $t=1$ 時 $=$ $\wedge$

$$f \equiv f_1 + f_2 \pmod{x_1^2 + \dots + x_m^2 - 1}$$

f_1, f_2 は $m, m-1$ 次 homogeneous polynomial
= 出来る。

又, $f_1 + f_2 = f_0 = 0$ $\Rightarrow$ 証明スルベヨイ。 $f_0 \neq 0$ トス
ルト

$$0 = f_0\left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_n}{r}\right) = r^{-m} f_1(x_1, \dots, x_m) + r^{-(m+1)}$$

$$f_2(x_1, \dots, x_m)$$

$$\therefore r = \frac{f_1(x_1, \dots, x_m)}{f_2(x_1, \dots, x_m)} \text{ トナリ 矛盾ヲ生ズル。 } \text{——}$$

『故 $\mathcal{M}_m$: rank $\wedge$ $nH_m = n+m-1$ $C_{m-1} = h_m$ ト
ナル。』

『高々 $m-1$ 次 polynomial $f(x_1, \dots, x_n)$ 全体
を作る modul $\mathcal{S}_{m-1}$ トスルト

$$\mathcal{S}_{m-1} \cap \mathcal{M}_m = \mathcal{M}_{m-2} \text{ on } \mathcal{M}$$

トナル。』

何トナレバ $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$, $f \in \mathcal{M}_m$,
 $g \in \mathcal{S}_{m-1}$ トスルベ

$$f - g = (x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1) \cdot h.$$

$h = h_1 + h_2$, $h_1 \in \mathcal{M}_{m-2}$, $h_2 \in \mathcal{S}_{m-3}$ ト分解スル
べ

$$f = (x_1^2 + \dots + x_n^2) h,$$

トナル。

$$\therefore f \in \mathcal{M}_{m-2} = \mathcal{N}. \text{—————}$$

$\mathcal{M}_1$ = ヨル表現ハ O_n ヲ $\mathcal{M}_1$ マデガアル。故 = $\mathcal{M}_1$ 元ト
1 トハ 直交スル。

以下 S_{m-1} ノ中 = 互 = 直交スル base ヲ トルトキ =
 $S_m = (S_{m-1}, \mathcal{M}_m)$ ノ中 = 更 = S_{m-1} / base ヲ $\vee$ /
ス トリ, ソレ = 直交シテ S_m / base ヲ 作ル トキ

$$\text{rank } S_m = \text{rank } S_{m-1} + (h_m - h_{m-2})$$

故 = S_m 中 $\mathcal{M}_m$ = 含マレ S_{m-1} = 直交スル $(h_m - h_{m-2})$

次, lin. sub space $\mathcal{M}'_m$ ヲ 得ル。 $S_m, S_{m-1} \wedge O_n$
ヲ invariant + ル 故 $\mathcal{M}'_m$ ハ 又 invariant
space ト ナル。

[J] 『 $\mathcal{M}'_m$ / base $f_1^{(m)}(x, \dots, x_n), \dots, f_{l_m}^{(m)}(x, \dots, x_n)$

$(l_m = h_m - h_{m-2}, m = 0, 1, \dots)$ ノ 球面上 / 連続
函数全体 / 系 = 対シテ 完全直交系 ヲ ナス 』

(証明) 球面上 / 任意 / 連続函数 $f(s)$ ハ

$$|f - p(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon$$

(Weierstrass / 近似定理) トナル polynomial p
ハ 存在スル。

故 = [C] / 証明ト 同様デアアル。

更 =

[K] 『 $\mu'_m (m=0, 1, \dots) = \text{ヨル } O_n \text{ の表現は既約表現である。}$ 』

即ち [J] [K] = ヨリ [I] = 示サレタスベテ $\{d\}_{\overline{r}(m)}$ ト $\{D\}_{\overline{r}(m)}$ トが今ノ場合ニ完全ニモトマツタ譯である。
又 $r(d^{(i)}) = 1$ か $r \neq 0$ ナラ成立スルコトナル。

[K]ノ O_n ノ精シイ理論ヲ用フレバ簡單ニ得ラレルガ、
コノニ初等的ニ証明ヲ與ヘヨウ。

先ヅ

『polynomial $f(x_1, \dots, x_n)$ が $(x'_1, \dots, x'_n) = O_n(x_1, \dots, x_n)$ ナル置換ヲシテ ϵ カハラナケレバ、即ち f が O_n ノ vector invariant ナラベ

$$f = F(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

トナル。』

ソレニハ f が homogeneous ノトキダケ考ヘレバ充分である。

$f(x_1, \dots, x_n) = f(x'_1, \dots, x'_n)$ カラ f ハ m 上ニ const. である。

$$\text{故ニ } f(x_1, \dots, x_n) = r^m f\left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_n}{r}\right) = r^m \times \text{const.}$$

f ハ poly. ナル故 $m = 2s$, 即ち $f = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^s$ トナル。——

『 O_n ノ unitary rep. σ が $\chi(h_g)$ ノ表現加群ヲ有スルトキ、 σ が h_g ノ表現トシテ identical rep. ヲ只一度シカ含マナケレバ σ ハ既約である。』

何トナレバ、 σ が可約ナラ

$$\sigma = \left(\sigma_1 \cdots \sigma_r \right)$$

トナルトスレバ $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma(h_g)$ 、表現加群ヲモツ。
故ニ $[G]$ カラ σ ヲ h_g ノ表現トミレバ *identical rep.* ヲ
少クトモ Γ 回含コネバナラナイ。——

コノ Lemma ヲ用ヒテ $m'_m = \sum$ ル表現 σ_m ヲ h_g ノ表現
トミテ *identical rep.* ガニツナイコトヲイヘバヨイ。
ニツアレトスレバ、ソノ表現加群ヲ $\{f\}, \{f'\}$ トスルト
 f, f' ノ一次独立デアル。

$x_1 = x_1, (x'_2, \dots, x'_n) = O_{n-1}(x_2, \dots, x_n) + \text{ル } h_g$
ノ変換デカハヲナイカラ

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

$$f'(x_1, \dots, x_n) = f'(x_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

トナル。

$$\text{又ハ } f = \sum_{i=0}^m d_i x_1^i g_i(x_2, \dots, x_n) \text{ トスレバ } g_i(x_2, \dots,$$

$\dots, x_n) \text{ ハ } O_{n-1} \text{ ノ vector invariant トナル。故ニ}$

$$\begin{aligned} g_i(x_2, \dots, x_n) &= g'_i(x_2^2 + \dots + x_n^2) \\ &= g'_i((1-x_1^2)) \text{ on } \mathcal{M}, \end{aligned}$$

即チ $f = \bar{f}(x_1) \text{ on } \mathcal{M}$ トナル。

同様ニ $f' = \bar{f}'(x_1) \text{ on } \mathcal{M}$ 。

且ツ x_1 ノ *poly.* トシテ次数ハ丁度 m 次デアル。(何故ナ

ラ $m-1$ 以下ニナルト $S_{m-1} = \lambda 1, m'_m \cap S_{m-1} = 0 =$

反スル。

故 α, β は適当 = トレバ。 $\alpha f - \beta f' \in S_{m-1}$ = 出来
ル。 $\alpha f - \beta f' \in \mathcal{M}'_m$ カラ

$$\alpha f = \beta f'$$

コレハ f, f' , 一次独立トナルコト = 反スル。 ———

普通、球函数ノ時ニハ $\mathcal{M}'_m$ ハ harmonic function
ノ中カラ エラブコトガ出来タ。 コノコトハ 一般ニ成立スル。

[L] 『 $\mathcal{M}'_m$ ハ m 次ノ homogeneous polynomial
中 $\Delta f = 0$ トナル全体デアル』

(証明) $\Delta f = 0$ を満足スル m 次ノ hom. poly. ノ全
体ヲ $\overline{\mathcal{M}}_m$ トスル。

$\overline{\mathcal{M}}_m$ ハ明カ = O_n -invariant space トナル。

明カ = $m_0 = m'_0$, $m'_1 = \overline{m}_1$ ナル故 帰納法ヲ用
ヒル。

今 $\overline{m}_r = m'_r$, $r \leq m-1$ マデ成立スルトスル。

$\mathcal{M}_m = \mathcal{M}'_m + \mathcal{M}_{m-2}$ ハ orthogonal ナル解デアル。 —

方 $\overline{\mathcal{M}}_m$ = 属スル f ト $\mathcal{M}_{m-2} = \overline{\mathcal{M}}_{m-2} + \overline{\mathcal{M}}_{m-4} + \dots =$
属スル g トハ orthogonal ナルコトハ Gauss ノ定理ヲ用
ヒテ $\Delta f = \Delta g = 0$ カラ 普通ノ球函数ノトキト同ジデアル。

$\therefore \overline{\mathcal{M}}_m \subset \mathcal{M}'_m$. シカ $\mathcal{M}'_m$ ハ O_n -invariant
subspace ナル故 $\mathcal{M}'_m = \overline{\mathcal{M}}_m$
トナル。 ———

若シ $\in$ orthogonal group ノ許シイ表現論ヲ用ヒ
ルナラバ (W.I. p. 157)

[M] 『 $u'_m \wedge P_m^\circ$ irreducible subspace
 $P_0(m, 0, \dots, 0) = u'_m$ 』

$$(\text{証明}) \quad P_0(m, 0, \dots, 0) = \sum_{\substack{v \equiv m(2) \\ 0 \leq v \leq m}} P_v^\circ \wedge P_0(m, 0, \dots, 0)$$

ナル故

$$\text{一方 } u_m = \sum_{\substack{v \equiv m(2) \\ 0 \leq v \leq m}} u'_v, \quad \text{ト } P_0(m, 0, \dots, 0) = u_m$$

トカラ $m=0, 1$ の時ハ明カ = [M] ハ成立スル故帰納法 = ヨ
 リ $P_v^\circ \wedge P_0(m, 0, \dots, 0)$ 既約性カラ K ト独立 = u'_m 既約
 性ト [M] トカ得ラレル。——

以上ノスベテハ O_n ノカハリ = proper orthogonal
 group O_n^+ ヲ用ヒテモヨイ。

特 = $n=3$ ノ場合 = ハ

$P_m^\circ \wedge P_0(m, 0, \dots, 0)$ ハスベテ O_n^+ ノ連続既約表
 現ヲツクス。(W. I. p. 157, 164, Theo. 5.9. A)

コレハ W. II. p. 151 ノ Character ヲ用ヒテ証明シ
 タコトデアル。

シカシ $n > 3$ ノ時 = ハ symmetric case 大テハスベ
 テ O_n^+ ノ連続既約表現ヲツクミテキナイ。(W. I. p. 164).
 故 =

[N] 『一般球函数 $u'_m = \bar{u}_m$ = ヨル表現ガスベ
 テ O_n^+ ノ連続既約表現ヲツクスノハ $n=3$ ノ場合 = 限
 リ、 $n > 3$ ノ時 = ハ他 = 存在スル』

猶 $n=3$ ノ時ハ $O_n^+ \subseteq \tilde{u}_2^\circ / \mathfrak{f}_0$ ヲ用ヒレバ u'_m 、

$\text{rank} \wedge 2H_m - 2H_{m-2} = 2m+1 \ (m=0,1,\dots)$
 ナル故、一方 2、最後 = α_2^0/β_0 。スベテ、連続既約表現
 $\wedge 1, 3, \dots, 2l+1, \dots$ 次、表現が / ヅ ヅ ツ アルコトヲ
 知ルカラ、此、方法デモ O_3^+ ノ時 = ツク レテ キルコトガワカ
 ル。 —————