OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Teilerkettensatz ト Vielfachenkettensatz
Author(s)	浅野, 啓三
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 182, p. 350-354
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74729
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

798. Teilerkettensatz ト Vielfachenkettensatz

浅野 啓三 (阪大)

Nichtnullteiler ヲ有スル kommutativer Ring ニ於テハ Teilerkettensatz ガ eingeschränkter Vielfachenkettensatz カラ出ルコトハ森，秋月両氏ノ研究ニヨッテ知ラレテヰルノデアルガ，此ノ事實ガ nichtkommutativ ノ場合ニモ成立スルデアラウカ？ 即チ Nichtnullteiler ヲ有スル Schiefring ニ於ケル Linksideal ニ関スル Teilerkettensatz ガ Linksideal ニ関スル eingeschränkter Vielfachenkettensatz カラ出ルデアラウカ？ 一般ノ場合ニ此ノ事実ヲ決定スルコトハ筆者ニハ成功シナカッタノデアルガ，Linksideal ニ関スル Teilerkettensatz ガ Linksideal ニ関スル Vielfachenkettensatz カラ

出ルコトヲ認メ得タノデ，以下コレニツイテ述ベテ見ヤウ。

定理：$\mathfrak{o}$ヲLinksidealニ関スルVielfachenkettensatz（Minimalbedingung）ノ成立スルSchiefringトスル．$\mathfrak{o}$ガ少クトモ一ツNichtnullteilerヲ含メバ$\mathfrak{o}$ハ単位元ヲ有スル。

証明：aヲ$\mathfrak{o}$ノNichtnullteilerトスル．
$\mathfrak{o} \geqq \mathfrak{o}a \geqq \mathfrak{o}a^2 \geqq \cdots\cdots$ハLinksidealニ関スルVielfachenketteデアルカラ$\mathfrak{o}a^n = \mathfrak{o}a^{n+1}$トナルnガ存在スル．ヨッテ任意ノ元$x$ニ対シテ$xa^n = ya^{n+1}$トナル元$y$ガ存在スル．$a$ガNullteilerデナイカラ，上式ヨリ$x = ya$．今$e$ヲ$a = ea$トナル元トスレバ$e \neq 0$．且ツ

$$(x - xe)a = xa - xea = xa - xa = 0$$

aガNullteilerデナイカラ$x - xe = 0$，$x = xe$．
従ッテ

$$a(x - ex) = ax - aex = ax - ax = 0$$

故ニ　$x - ex = 0$，　$x = ex$

ヨリテeガ単位元デアル。

定理：$\mathfrak{o}$ヲ少クトモ一ツNichtnullteilerヲ含ムSchiefringトスル．$\mathfrak{o}$ニ於テLinksidealニ関スルVielfachenkettensatzガ成立スルトキハ，Linksidealニ関スルTeilerkettensatzガ成立スル。

補助定理: $\mathfrak{o}$ ヲ halbeinfacher Ring, $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{o}$-Linksmodul トシ, $\mathfrak{o}$ ノ単位元ハ $\mathfrak{M}$ ノ Einheitsoperator = ナルモノトスル。$\mathfrak{M}$ ノ Untermodul = 関シテ Minimalbedingung ガ成立スルナラバ, $\mathfrak{M}$ ハ完全可約 (einfache Modul ノ直和) デアル。

(証明) $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}e_1 + \mathfrak{o}e_2 + \cdots\cdots + \mathfrak{o}e_\pm$ ヲ $\mathfrak{o}$ ノ einfache Linksideale ヘノ直和分解トスル。然ラバ $\mathfrak{M}$ ハアラユル $\mathfrak{o}e_i u$ ($u \in \mathfrak{M}$) ノ Summe デアリ, $\mathfrak{o}e_i u$ ハ $\mathfrak{o}$ ガ又ハ einfacher Teilmodul デアル故 $\mathfrak{o}u_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{o}u_n$ ガ einfache Teilmoduln ノ直和デアルトスル。若シ einfacher Teilmodul $\mathfrak{o}u_{n+1}$ ガソノ中ニ含マレテ居ナイ ナラバ Summe $\mathfrak{o}u_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{o}u_n + \mathfrak{o}u_{n+1}$ ハ直和デアル。ヨッテ

$$\mathfrak{o}u_1 \subset \mathfrak{o}u_1 + \mathfrak{o}u_2 \subset \mathfrak{o}u_1 + \mathfrak{o}u_2 + \mathfrak{o}u_3 \subset \cdots\cdots,$$

ナル Kette ガ得ラレ, ソレハ有限デ終ラナケレバナラナイ。然ラザレバ $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{o}u_i + \mathfrak{o}u_{i+1} + \cdots\cdots$ トスルトキ

$$\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \mathfrak{M}_3 \supset \cdots\cdots$$

ハ Teilmoduln ノ Vielfachenkette ヲ作ルコトニナル。ヨッテ $\mathfrak{M}$ ハ einfache Teilmoduln ノ直和デアル。

(定理ノ証明) 前定理ニヨリ $\mathfrak{o}$ ハ単位元ヲ有スル。又 u ヲ $\mathfrak{o}$ ノ maximals zweiseitiges Rilideal(※)

(※) 次頁ヘ

トスレバ u ハ nilpotent デアリ，o/u ハ halbeinfach デアル。(**)

$$o \supset u \supset u^2 \supset \cdots\cdots \supset u^p = 0$$

ハ o-Linksmodul ノ Kette ヲ作リ，Restklassenmodul u^i/u^{i+1} ハ o/u-Linksmodul トナルヲレルカラ，補助定理ニヨリ完全可約，従ッテ o-Linksmodul トシテ組成列ヲ有ス、ヨッテ又ハ o-Linksmodul トシテ組成列ヲ有スル。即チ o ニ於テ Linksideal ニ関シ Doppelkettensatz ガ成立スル。

Q. E. D.

最後ニ単位元ヲ有スル Schiefring ニ於テ左 Ideal ニ関スル Kettensatz ト右 Ideal ニ関スル Kettensatz トハ独立デアルコトヲ注意シタイ。

今 K ヲ可換体(***)トシ，$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n, \cdots\cdots$ ヲ abzählbar ノ互ニ独立ナ Unbestimmte トスル。$K = x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ ヲ添加シタ Körper ヲ $\mathfrak{k} = K(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n, \cdots\cdots)$ トスレバ $\mathfrak{k}' = K(X_2, X_4, \cdots\cdots, X_{2n}, \cdots\cdots)$ ハ $\mathfrak{k}$ ト isomorph ナ $\mathfrak{k}$ ノ Teilkörper デアル。今 $\mathfrak{k}$ ノ上ノ Rang 2 ノ

(*) 尺ニ zweiseitige Nilideale ノ Vereinigungsmenge.
Nilideal トハ各元ガ nilpotent ニナルヤウナ Ideal.

(**) C. Hopkins, Duke math. J. 4. 3. 664–667.

(***) Schiefkörper デモ差支ヘナイ。

$\mathfrak{k}$-Linksmodul $\mathfrak{r} = \mathfrak{k} + \mathfrak{k}u$ ヲ作リ，更ニ

$(\beta u)\alpha = (\beta\alpha')u$, $(\beta u)(\alpha u) = 0$　$\alpha, \beta \in \mathfrak{k}$, $\alpha' \in \mathfrak{k}'$

ト定義スル．但シ $\alpha \longleftrightarrow \alpha'$ ハ $\mathfrak{k}$ ト $\mathfrak{k}'$ ノ間ノ一ツノ Isomorphismus デアルトスル．尚 distributive law ヲ假定スレバ $\mathfrak{r}$ ハ一ツノ Schiefring ニナリ，$\mathfrak{k}u$ ハ Radikal デアル．$\mathfrak{r}$ ツ $\mathfrak{k}u$ ツ 0 ハ $\mathfrak{r}$ ノ $\mathfrak{r}$-Linksmodul トシテノ組成列ヲアルカラ，$\mathfrak{r}$ ニ於テハ Linksideal ニ関シ Doppelkettensatz ガ成立スル．一方 $\mathfrak{m}$ ヲ $\mathfrak{k}$ ツ $\mathfrak{m}$ ツ $\mathfrak{k}'$ トナルヤウナ勝手ナ $\mathfrak{k}$-Rechtsmodul トスレバ $\mathfrak{m}u$ ハ $\mathfrak{r}$ ノ右 Ideal ニナル．ヨッテ $\mathfrak{r}$ ニ於テハ明カニ右 Ideal ニ関シ Teilerkettensatz モ Vielfachenkettensatz モ成立シナイ。