



Title	球面カラノ寫像ノ Abbildungsklasse
Author(s)	安倍, 亮
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 184, p. 382-394
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74732
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

801. 球面カラノ寫像 / *Abbildungsklasse*

安 倍 亮 (東大)

空間 Y / *Fundamentalgruppe* $\pi_1(Y)$ ハ円周 S^1
 Y へノ *abbildung* $g \in Y^{S^1}$ / *Abbildungsklasse*
 カラ成ル。但シコノ場合、 S^1 上 = 定點 x_0 。 Y 上 = 定點 y_0
 フトツテ、 $g(x_0) = y_0$ ナル g ノミヲ考ヘ、シカモ
 $g_t(x_0) = y_0$ が満足サレタマヘデ g_t フ連続的 = $t=0$ カ
 ラ $t=1$ マデ変ヘルトキ、 g_0 ト g_1 が同ジ *Klasse* = 属
 スルトスルノデアアル。カナル *Abbildungsklasse* フ
Abbildungsklasse rel. (x_0, y_0) ト云フコト = シヨウ。
 ソレガ $\pi_1(Y)$ ノ一ツ一ツノ元ヲアラハス。

rel. (x_0, y_0) ナル制限ヲ除キ、 S^1 ノ Y へノ *Abbit-*
dung ノ通常ノ *Abbildungsklasse* フ考ヘレバ、ソレ
 ハ何デモサレルカ？ 答ハ簡單デアアル。先ヅ Y^{S^1} / 任意ノ
Abbildungsklasse ハ $g(x_0) = y_0$ フ満足スル g フ
 含ミ、シタガツテ *Abbildungsklasse rel.* (x_0, y_0)
 フ一ツ以上含ンデキルコト = 注意スル。サテ、 $\pi_1(Y)$ ノニツ
 ノ元 α_0, α_1 フ代表スル *Abbildungen* $\in Y^{S^1}$ (ソレヲ再
 ビ α_0, α_1 ト書ク) が *homotop* デアルトスル。 α_0 フ α_1
 = *deformieren* スル間 = x_0 ノ像點ガエガリ y_0 フ出テ
 y_0 = 歸レ道ヲ w トスル。コノトキ

$$\alpha_0 = w \alpha_1 w^{-1}$$

ナルコトハ容易 = 合ル。逆 = コノ式ガ成立テバ、 α_0 ト α_1 ハ

homotopisch π_1 である。

従って

「 $\pi_1(Y)$ は konjugierte Elemente / Klasse
= 分れる。 π_1 / 各々 / Klasse が S^1 / Y へ / Abbil-
dungsklasse = 一対一 = 対応スル」

同じヤウナコトが n 次元以上 / Sphäre から Y へ /
Abbildung = 就ラモ云へル。之レ = 就テハ Eilenberg
が Fundamenta XXXII = 論ジテキル。^{*} 今ソレヲ大體説明
スルト:

n 次元 / Homotopiegruppe $\pi_n(Y)$ は S^n から Y へ
/ Abbildungsklasse rel. (x_0, y_0) から成ル。 π_n / 三ツ
ノ元 α_0, α_1 が rel. (x_0, y_0) デナク單 = homotop ナ條件
ハ、 $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1$ = deformieren スルトキ α_0 ノ像点ガエガク
道 W = ヨツテキマシム。

$$\alpha_0 = W(\alpha_1)$$

ナル關係デ α_0 ト α_1 トガ結ビツケラレテキルコトデアリ。
 $W(\)$ ハ $\pi_1(Y)$ ノ元 W = ヨツテ決定サレル。 $\pi_n(Y)$ /
或ル Automorphismus デアリ。カナル Automorphis-
men デ互 = 移リ得ル $\pi_n(Y)$ ノ元 / Klasse ト Y^{S^n} /
Abbildungsklasse ガ一対一 = 対応スル。

Eilenberg ハ Y / universelle Überlagerung

^{*} S. Eilenberg: Fundamental groups and
higher homotopy groups [Fund. Math. XXXII
(1939) 167 175]

$\tilde{Y}$ ヲ考ヘ, $w =$ 相當スル $\tilde{Y}$ 自身ノ *Decktransformation*
 $=$ ヲツテ *Automorphismus* $w()$ ヲアヲハシタ。
 コノデハ考ヘ方ヲ変ヘテ π_n ト π_1 ヲ共ニ含ム一ツノ群 K_n
 ヲ作り, $w()$ が

$$w(\alpha) = w \alpha w^{-1}$$

ナル具体的ナ *Transformation* ノ形ニカケルコトヲ述ベ
 ル。シタガツテ $n=1$ ノトキト *analog* ナアヲハシ方ニナ
 ル譯デアル。加之コノトキ考ヘル群 $K_n(Y)$ が、夫レ自身
topologisch ナ意味ヲモツテキル。

1. 順序トシテ *Homotopiegruppe* ノ定義カラ書ク。
 X, Y が *metrisch Räume*, X が *kompakt* ナル
 トキ, Y^X ヲ X テ Y カラ Y へノ *stetige Abbildungen*
 全体ノ作ル *metrischer Raum* ヲアヲハス。 X' ヲ X ノ
 閉部分集合, y_0 ヲ Y ノ一ノ点トシ, $\varphi(X') = y_0$ ナル $\varphi \in Y^X$
 ノ全体ヲ $Y^X(X', y_0)$ ト書ク。

考ヘルノハ, X, X' が *Polyeder*, Y が *zusammenhän-*
gchend デ且ツ (*Homotopie* ノ意味デ) *lokal*
zusammenhängend ナ場合デアル。(但シ *lokal*
zusammenhängend トハ義デハ, $y \in Y$ ノ任意ノ
 近傍 U_y ヲトルトキ, 近傍 $V_y \subset U_y$ ナ十分小サクトレバ,
 $V_y =$ 含マレル n -*Sphäre* S^n ($n=0, 1, 2, \dots$)
 ノ任意ノ *Bild* が U_y ノ中ノ一ノ点ニ縮メラレルコトデア
 ルトスル。) コノトキ Y^X 及ビ $Y^X(X', y_0) \in$ *lokal*

zusammenhängend $\nexists \Gamma$. γ Komponente が
 大々 X から Y へノ單 = Abbildungsklasse γ へ Abbil-
 dungsklasse rel'. $(X' y_0) \nexists \Gamma$. 特 = konstante
 Abbildung $k_0(X) = y_0$ $\nexists$ 含 Δ Komponente $\nexists Y_0^X$
 及 $\exists Y_0^X (X' y_0)$ $\nexists$ 書ク.

$x_0 \in S^{n-1}$, $Y_0 \subset S^{n-1} (x_0, y_0)$, Fundamentalgruppe
 $\pi_1 Y$, n -te Homotopiegruppe $\pi_n(Y)$
 γ_0 : konstante Abbildung $k_0 \in Y_0 \subset S^{n-1} (x_0, y_0)$
 出 $\gamma_0 = k_0 \cap \pi_1 Y_0 \subset S^{n-1} (x_0, y_0)$, 道 γ_0

$$\varphi \in Y^{S^{n-1} \times [0,1]}((S^{n-1} \times 0) \cup S^{n-1} \times (1) \cup X_0 \times [0,1], y_0)$$

デアハサレル。^{*} $S^{n-1} \times [0, 1] =$ 於テ $S^{n-1} \times (0)$ 7 一 点 $\xi_0 =$, $S^{n-1} \times (1)$ 7 一 点 $\xi_1 =$ 終メルト, S^n がデキル。コ

1. Abbildung $\gamma: \psi_1 \in S^n \times S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$. $\psi_1(x_0 \times [0, 1])$
 $\wedge S^n$ 上 $\gamma: \xi_0, \xi_1$ をツナグ弧 $\overline{\xi_0 \xi_1}$, γ 作ツテキル. S^n 内
 $\gamma: \overline{\xi_0 \xi_1}$, $\gamma: \xi_0 \rightarrow \xi_1$ なる S^n 自身ノ Deformation
 $\gamma: \psi_2 \in S^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. $\psi_2 = \text{際ヒテ } S^n - \overline{\xi_0 \xi_1}$, $\wedge \text{topolo-}$
 $\text{gisch} = S^n - \xi_0 = \text{移ルヤウ} = \mathbb{R}^n$. 上ノ φ ハ

$$\varphi = \varphi'' \psi_2 \psi_1 \quad \varphi'' \in Y^{\Sigma^n}(\xi_0, y_0)$$

ノ形 = カケ、 φ ト φ'' ハ一対一ニ對應スルハニツ、道 φ_1, φ_2 が homotopナル條件ハ、 φ_1'', φ_2'' が homotop rel. (x_0, y_0) ナルコトヲアル。シタガツテ $\pi_n(Y)$ ノ元ハ

*) $[0, 1]$ は線分 $0 \leq t \leq 1$ $A \times B$ は空間 A, B , topologisches Produkt,

$Y^{S^n}(\xi_0, y_0)$ 1 Komponente 即ち S^n 1 Y へ
Abbildungs-klasse rel. (ξ_0, y_0) デアル。目標ハ Y^{S^n}
1 Komponente デアル。

2. 群 $\pi_n(Y)$. $Y_0^{S^{n-1}}(x_0, y_0)$ 1 元 $\pi_1 = Y_0^{S^{n-1}}$ 7
トリ, π_1 Fundamentalgruppe 7 $\pi_n(Y)$ ト書ク。
 k_0 7 出テ $k_0 = \text{カヘル } Y_0^{S^{n-1}}$ 1 閉子集道ハ
 $f \in Y^{S^{n-1} \times [0, 1]}(S^{n-1} \times (0) + S^{n-1} \times (1), y_0)$
デ表ハサレル。

之レハ

$$f = f' \psi_1 \quad f' \in Y^{S^n}(\xi_0 + \xi_1, y_0)$$

ノ形=カケ。 f ト f' ハ一対一=對應スル。故 = $\pi_n(Y)$ 1
元ハ $Y^{S^n}(\xi_0 + \xi_1, y_0)$ 1 Komponente デアルト考
ヘラレル。

$\pi_n(Y)$ 1 元 α 7 アラハス $\varphi'' \in Y^{S^n}(\xi_0, y_0)$ 7 ト
ル。

$f' = \varphi'' \psi_2 \in Y^{S^n}(\xi_0 + \xi_1, y_0)$ ハ $\pi_n(Y)$ 1 元 α' 7
決マル。 $\alpha \rightarrow \alpha'$ ハ同 $\pi = \pi_n$ 1 π_n 1 中へ 1 homeo-
morphismus デアルガ, 之レハ實ハ Isomorphis-
mus デアル。

証明: $\alpha \rightarrow 1$ 7 7 $f' = \varphi'' \psi_2$ ハ homotop 0,
シカレ = ψ_2 1 Identität = homotop 7 カラ φ'' ハ $\varphi'' \psi_2$
= homotop. 故 = φ'' ハ homotop 0 ^{*} シタガツテ
 $\alpha = 1$. g.c.d. — 脚註*) 次頁へ —

故 $= \pi_n(Y) \ni k_n(Y)$, Untergruppe ト考ヘテヨイ。

3. $k_n(Y)$, 元 β アラハス

$f = f' \psi, \in Y^{S^{n-1} \times [0,1]}$, $f' \in Y^{S^n}(\xi_0 + \varepsilon, y_0)$
 $=$ 於テ $f(x, t)$, $x \in S^{n-1}$, $0 \leq t \leq 1$ = 對シテ y_0 ア出
テ y_0 = カヘル道アエガキ, $n \geq 2$ + ラバソレハ π_n ノエラ
ビオ = カハラズ同シ *Wegeklasse* = 属スル。シタガツ
テ $\pi_n(Y)$ ノ一ツノ元 w ヲキメル。 $n=1$ ノトキハ $f(x_0, t)$
ノキメル $w \in \pi_1(Y)$ ヲトル。 $\beta \rightarrow w$, $k_n(Y) \ni \pi_1(Y)$
ハ *Homomorphismus* デアル。 $\beta \rightarrow 1$ = +ル β ハ
 $f(x_0, t)$ ガ $0 \leq t \leq 1$ = 對シテ *homotop* 0 + 道アエ
ガクモノデアル。

f *homotop rel* $(S^{n-1} \times (0) + S^{n-1} \times (1), y_0)$ = 変ヘ
テ $f(x_0, t) = y_0$ +ルヌウ = 出来ル。シタガツテ f ハ $\pi_n(k_n)$
ノ元ヲアラハス。逆 = $\beta \in \pi_n \subset k_n =$ ハ $1 \in \pi_n$ ガ對應ス
ル。スナハチ

$\beta \rightarrow 1$ +ル β ノ作ル *Normalteiler* ハ $\pi_n(Y) =$
他ナラナシ。

新原
脚註*) $\varphi'' \in Y^{S^n}(\xi_0, y_0)$ ハ *homotop* 0 ガカラ S^n *Rand*
トナル *Vollkugel* E^{n+1} カラ, *Abbildung* = 拡張出
来ル。 ξ_0 *固定* レタマ、 S^n E^{n+1} 内デ *deform* シ
テ ξ_0 = チビナルコトガデキルカラ、 ξ_0 ノ *Bild* *固定* レ
タマ、 φ'' *一点* y_0 = チビナルコトガ出来ル。スナハ
チ $\varphi' \wedge \text{rel}(\xi_0, y_0) = \varepsilon$ *homotop* 0 デ, π_n ノ元 1 ヲ表ハス。

4. $K_n(Y)$ の構造. 別 = $g \in Y^{S^{n-1} \times [0,1]}$

$$g(x, t) = w(t) \quad (x \in S^{n-1} = \text{関係} + \gamma)$$

ヲ考ヘル。 $w(t)$ が $\pi_1(Y)$ の元 w ヲアラハストキ, g / アラハス $K_n(Y)$ の元ヲ $\bar{w}$ ト書ク。明カ = 3, Isomorphismus = 於テ $\bar{w} \rightarrow w$ 、シタガツテ $\bar{w}$ ハ $K_n(Y)/\pi_n(Y)$, heberggruppe, 中 w = 對應スル $\in$ / 代表デアイル。而 $\in \bar{w}$: 全体ハ $\pi_1(Y) = \text{isomorph}$ + $K_n(Y)$, Untergruppe $\bar{\pi}_1(Y)$ ヲ作ツテキル。以上ヲマツノレバ:

定理. $Y_0^{S^{n-1}}$ / Fundamentalgruppe $K_n(Y)$ ハ n -te Homotopiegruppe $\pi_n(Y)$ 7 normalteiler = ヲツ。

$$K_n(Y)/\pi_n(Y) \cong \pi_1(Y)$$

デアツテ, 而 $\in K_n(Y)/\pi_n(Y)$, heberggruppe, 代表トシテ $\pi_1(Y) = \text{isomorph}$ + $K_n(Y)$, Untergruppe $\bar{\pi}_1(Y)$ の元ヲトルコトガデキル。

シタガツテ $\beta \in K_n$ ハ $\beta = \alpha_1 \bar{w}$ 又ハ $\beta = \bar{w} \alpha_2$, $\alpha_i \in \pi_n$ $\bar{w} \in \bar{\pi}_1$ / 形 = 夫々一意的 = 分解サレイル。

5. Y^{S^n} / Abbildungsklasse.

$\alpha \rightarrow \bar{w} \alpha \bar{w}^{-1}$ / $\pi_n(Y)$ / Automorphismus ヲナス。カニル Automorphismen デ互 = シツリ得ル Elemente / Klasse ト Y^{S^n} / Komponente トガ一対一 = 對應スルコトヲ証明スル / が本節ノ目標デアイル。

先ツ $n=1$ ノトキト△様 $= Y^{S^n}$, 任意ノ Komponente
 が $Y^{S^n}(\xi_0, \eta_0)$ ノ Komponente ヲ少クトモ一ツ含
 ムコト = 注意スレバ, 次ノ定理ヲ証明スレバイコトガ
 余ル。

定理. $\pi_n(Y)$ ノ 元 α_0, α_1 が

$$\varphi_i = \varphi_i'' \psi_2 \psi_1, \quad \varphi_i'' \in Y^{S^n}(\xi_0, \eta_0), \quad i=0, 1$$

アリラハサレテキルトスル。 φ_0'' ト φ_1'' が Y^{S^n} Abbildung
 トシテ homotop + 条件ハ, 適當ニ $\bar{w} \in \pi_1(Y)$ が
 アツテ

$$\alpha_0 = \bar{w} \alpha_1 \bar{w}^{-1}$$

ナレコトデアル。

[証明] $\varphi_i' = \varphi_i'' \psi_2 \in Y^{S^n}(\xi_0 + \xi_1, \eta_0)$ トオク。既ニ
 2.ニ於テ述べタ如ク, φ_i' ト φ_i'' ハ homotop デカラ, φ_0'
 ト φ_1' , homotop + 条件ヲ求メレバヨイ。シカルニ
 レハ

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, t, 0) &= \varphi_0(x, t) \\ \varphi(x, t, 1) &= \varphi_1(x, t) \\ \varphi(x, 0, S) &= w_0(S) \\ \varphi(x, 1, S) &= w_1(S) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x \in S^{n-1} \\ 0 \leq t \leq 1 \\ (x \text{ 閉係ナリ}) \quad 0 \leq S \leq 1 \end{array}$$

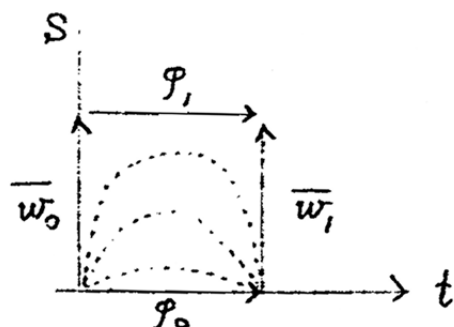
ナル $\varphi \in Y^{S^{n-1} \times [0,1] \times [0,1]}$ が存在スルコトデアル。

$\bar{w}_i(x, S) = w_i(S)$ ト書ク。

右ノ圖ヨリ明カナル如ク, φ ノ

存在ハ $Y^{S^{n-1}} =$ 於ケル道トシ

テ φ_0 ト $\bar{w}_0$ φ_1 $\bar{w}_1^{-1}$ トガ



homotopie ナルコトデアル。 w_0 ト w_1 トハ homotopie
 ナ道デ $\pi_1(Y)$ ノーツノ元 w デアラハサレルカラ, $K_n(Y)$
 ノ元トシテ書ケバ

$$\alpha_0 = \overline{w} \alpha_1 \overline{w}^{-1} \quad \text{q. e. d.}$$

6. 定義. $\pi_n(Y)$ ノ元ガーツーツ Y^{S^n} ノ相異ナル
 Abbildungsklasseヲアラハストキ, (Eilenberg =
 従ッテ) Y ハ n -simple デアルトイフ。前節 = ヨレ
 バ:

定理. Y ガ n -simple ナ條件ハ任意ノ $\alpha \in \pi_n(Y)$,
 $\overline{w} \in \pi_1(Y)$ = 對シテ

$$\alpha = \overline{w} \alpha \overline{w}^{-1}$$

ナルコトデアル。換言スレバ

$$K_n(Y) = \pi_n(Y) \times \pi_1(Y) \quad (\text{直積!})$$

ナルコトデアリ。

系. Y ガ単一連結, ストハチ $\pi_1(Y) = \text{Einheits-}$
 gruppe ナラバ, Y ハスベテ, n = ツイテ n -simple
 デアル。

7. $n = 1$ ノ場合.

$S^0 = x_0 + x_1$, 故ニ Y^{S^0} = 於テ k_0 ヲ出ル開カタ道ヲ
 考ヘル = ハ, x_0 ト x_1 ガ夫々独立ニ y_0 ヲ出テ y_0 = 帰ル道ヲ
 エガクト考ヘレバヨイ。従ッテ

$$K_1(Y) \cong \pi_1(Y) \times \pi_1(Y)$$

x_0 が $\beta \in \pi_1(Y)$ 7 x_1 が $\alpha \in \pi_1(Y)$ 7 エガクヌウナ
 $\pi_1(Y)$ ノ元ヲ

$$(\beta, \alpha)$$

ト書ク。 3. = 述ベタ Homomorphismus ハ

$$(\beta, \alpha) \rightarrow \beta$$

トナルカラ, $\pi_1(Y)$, Untergruppe トシテ, $\pi_1(Y)$ ハ

$$(1, \alpha)$$

ノ形ノ元カラ成ル。 $(1, \alpha) = \alpha$ ト書イテシマフ。又
 $\overline{\pi_1(Y)}$ ノ元ハ

$$(w, w) = \overline{w}$$

ノ形デアル。 従ツテ

$$\begin{aligned} \overline{w} \times \overline{w}^{-1} &= (w, w)(1, \alpha)(w^{-1}, w^{-1}) = (1, w \times w^{-1}) \\ &= w \times w^{-1} \end{aligned}$$

トナリ, コノバアヒハ $\overline{w}$ = ヨル Transformation ハ
 $\pi_1(Y)$ 7 考ヘルマデモナリ, $\pi_1(Y)$, innerer Auto-
 morphismus = ナツテシマフ。之ハ冒頭 = 述ベタ通りデ
 アル。 特 = 6. ノ定理ハ

「 Y が 1-simple ナル条件ハ, $\pi_1(Y)$ が Abelsch
 ナコトデアル。」

8. $\pi_n(Y)$, innere Automorphismen ハ
 $\pi_n(Y)$, 中ダケデ考ヘルバ, $\overline{w} \in \overline{\pi_n(Y)}$ = ヨル Trans-
 formation 以外 = ナイ。

何トナレバ

$n \geq 2 + \varepsilon$, $\pi_n(Y)$ 1 元 $\beta \wedge \beta = \bar{w} \alpha'$, $\bar{w} \in \pi_1$,
 $\alpha' \in \pi_n$, π_n は abelsch なから, $\alpha \in \pi_n = \text{対}$

$$\beta \wedge \beta^{-1} = \bar{w} \alpha' \alpha \alpha'^{-1} \bar{w}^{-1} = \bar{w} \alpha \bar{w}^{-1}$$

$n = 1 + \varepsilon$, $\beta = (w', w)$ とスル

$$\begin{aligned} \beta \wedge \beta^{-1} &= (w', w)(1, \alpha)(w'^{-1}, w^{-1}) \\ &= (1, w \alpha w^{-1}) = \bar{w} \alpha \bar{w}^{-1} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

従って 5. の定理は次のやうに云へる。

定理. $Y_0 S^{n-1}$ の Fundamentalgruppe $\pi_n(Y)$
 の konjugierte Elemente の Klassen を分ける。
 Normalteiler $\pi_n(Y)$ の之レは Klassen の一部カ
 ラデキテキル。 $\pi_n(Y)$ を含マレル Klassen と $Y S^n$,
 Abbildungsklassen とが一対一に對應スル。

6. の定理ヲ云ヒカヘンバ:

定理. Y が n -simple ナル条件ハ, $\pi_n(Y)$ が
 $\pi_n(Y)$ の Zentrum を含マレルコトデアル。

9. 例

S^2 の一ツの直径の両端ヲ identifizieren シテ
 キル Polyeder ヲ Y トスル。 Y の universelle
 Überlagerung $\tilde{Y}$ は可附番個の球面ヲ相切シテ一列
 = 左右へ無限に並ベタモノデアル。ソレヲ球面ヲ順
 =

$$\dots, S_{-n}, \dots, S_{-1}, S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$$

S_i と S_{i+1} の切スル處ヲ $\tilde{y}_i$ トスル。 $\pi_2(Y)$ の代リ =

$\pi_2(\tilde{Y})$ を考へて $\exists \gamma_0$. $\tilde{\gamma}_0$ を起点として考へる. $\pi_2(\tilde{Y})$ の元は S_n だが $\text{grad} + 1$ を持つ Abbildung である. $\pi_2(\tilde{Y})$ は

$$\dots, \alpha_{-n}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$$

を Erzeugende とする free Abelsche Gruppe である. 又 $\tilde{\gamma}_0$ から $\tilde{\gamma}_1$ へエタ道 $\pi_1(Y)$ の元として w とかけば, $\pi_1(Y)$ は w を Erzeugende とする free zyklisch Gruppe である.

$$w \alpha_n w^{-1} = \alpha_{n+1}$$

とすることが容易である. 従って $\alpha_0 = \alpha$ とかけば

$$\alpha_n = w^n \alpha w^{-n}$$

$\pi_n(Y)$ は α, w が $\pi_1(Y)$ を erzeugen する. Relationen は

$$\alpha_n \alpha_m = \alpha_m \alpha_n \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

が成り立つ. $n > m$ として w^{-m} で transformieren して見れば

$$\alpha_k \alpha = \alpha \alpha_k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

が成り立つ. w, α が成り立つ

$$(R_k) \quad w^k \alpha w^{-k} \alpha w^k \alpha^{-1} w^{-k} \alpha^{-1} = 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

と $\pi_2(Y)$ は w, α を Erzeugende とし, (R_k) と $\pi_1(Y)$ の Relationen を持つ群である.

$\pi_2(Y)$ の元は

$$\beta = \prod \alpha_i^{\varepsilon_i}$$

ノ形, 但シ ε_i ハ整数デ, 有限個ヲノバイテ 0 デアル. w^k デ transformieren スレバ

$$w^k \beta w^{-k} = \prod_i^{\varepsilon_i} \alpha_{i+k} = \prod_i^{\varepsilon_{i-k}} \alpha_i$$

スナハチ番号ガ一致 = k ダケズレルダケデ, 指数ノ相対的
ナ排列ハ一致スル。 $\prod_i^{\varepsilon_i}$ ト $\prod_i^{\eta_i}$ ガ Y^{S^u} ノ同ジ Abbil-
dungsklassie フアラハス條件ハ, ε_i ノ並ビ方ト η_i
ノ並ビ方が相対的 = 同ジナコト, 精シクイヘバ, アル $k =$
對シ

$$\eta_i = \varepsilon_{i-k}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ナルコトデアル。