OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Stone ノ定理ノ証明ニ就テ
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 184, p. 394-406
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74733
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

802. Stone ノ定理ノ証明ニ就テ

中野 秀五郎

M. H. Stone ガ Proc. Nat. Ac. 16, (1930) ニテ次ノ定理ヲ述ベ其証明ノ方針ヲ記シタ。

定理. U_t $(-\infty < t < \infty)$ ガ Hilbert space $\mathfrak{H}$ ニ於ケル unitary transformation ニシテ

(イ) $U_t U_s = U_{t+s}$

ナルトキハ

$$(\rho)\quad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d(E(\lambda) f, g)$$

ナルが如キ identity ノ resolution $E(\lambda)$ ガ存在ス。

J. v. Neumann ガ先ヅ最初ニ $(U_t f, g)$ ガ t ニ関シ f, g ノ如何ニ関セズ Lebesgue ノ意味ニテ measurable ナル假定ノモトニ上ノ定理ヲ証明シ，(Annals of Math. Vol 33, 1932) 次イデ M. H. Stone ガ (Annals of Math. Vol 33, 1932) 同一假定デ証明ヲ與ヘタ。又 S. Bochner ガ $(U_t f, g)$ ガ t ニ関シ連続ナル場合ノ別証明ヲナシ (Sitzungsberichten Preusz. Akad. Wiss. phys-math Klasse, 1933) 次デ F. Riesz ガ同様ノ方法ヲ $(U_t f, g)$ ガ t ニ関シ measurable ナル場合ニ拡張シタ。(Acta. Szeged. 6. 1934)

J. v. Neumann ノ方法ハ、先ヅ $(U_t f, g)$ ガ t ニ関シ measurable ナルトキハ (α) ナル條件ヨリ U_t ガ t ニ関シ連続ナルコトヲ証明シ。U_t ガ t ニ関シ連続ナル場合ニ

$$(Af, g) = \int_0^{\infty} e^{-t} (U_t f, g) dt$$

ナル bounded Operator A ヲ作リ $V = I - 2A$ トセル時ハ V ガ unitary ニシテ且ツ $Vf = f$ ナル時ハ $f = 0$ ノ場合ニ限ルコトガ証明サレ、從ツテ J. v. Neumann ノ Cayley transformation ノ理論ニヨリ

$$g = (V-1)f$$

$$Rg = -i(V+1)f$$

ナル hypermaximal Hermitian R が存在シ、コノ R ノ resolution of identity ヲ $E(\lambda)$ トスレバ、此ノ $E(\lambda)$ ニ對シ (β) が成立スルコトヲ証明スル方針デアル。

M. H. Stone ノ方法ハ Fourier-Plancherel Theorem ニヨル。

$$\psi(\tau;\ l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - l} e^{-i\tau\lambda}\, d\lambda, \qquad (\mathfrak{I}(l) \neq 0)$$

$$\frac{1}{\lambda - l} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau;\ l)\, e^{i\lambda\tau}\, d\tau$$

$$(l-m)\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau;\ l)\,\psi(\sigma-\tau;\ m)\, d\tau$$

$$= \psi(\sigma;\ t) - \psi(\sigma;\ m)$$

ナル公式ヨリ

$$(X_l f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau;\ l)\,(U(\tau) f,\ g)\, d\tau \qquad \mathfrak{I}(l) \neq 0$$

ト置クコトニヨリ bounded operator X_l が定義セラレ、次イデ M. H. Stone ノ resolvent ニヨル理論ヨリ

$$X_l = (H - l)^{-1}$$

ナル self-adjoint Hermitian H が存在シ、H ノ resolution of identity ヲ $E(\lambda)$ トスレバ、

此ノ $E(\lambda)$ ニテ (β) ガ成立スルトイフ方法デアル。従ツテ Stone ノ方法デハ $(U_t f, g)$ ノ t ニ関スル measurable ヨリ t ニ関スル continuity ヲ証明スル必要ハナク、ソノ点ハ Neumann ノ証明ニ比シ簡単デハアルガ、$\Psi(\tau; l)$ ニ関スル性質、其ノ他複雑ナ計算ヲ必要トスル。

S. Bochner ハ連続函数 $P(t)$ ガ

$$P(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\nabla(\lambda)$$

ナルガ如キ単調増加函数 $\nabla(\lambda)$ ニヨル Stieltjes integral ニテ表ハサレル為ノ必要且ツ充分ナル条件ハ任意ノ数 $t_1, t_2, \cdots\cdots, t_m$; $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots, \rho_m$ ニ対シ常ニ

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m} P(t_\mu - t_\nu)\, \rho_\mu \bar{\rho}_\nu \geqq 0$$

ナルコト (S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932) ヲ用ヒテ $(U_t f, f)$ ガ此条件ヲ満足スルコトヲ証明シ、従ツテ

$$(U_t f, f)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\nabla(\lambda)$$

ナル単調増加函数 $\nabla(\lambda)$ ヲ適当ニ定メ、$\nabla(\lambda)=(E(\lambda)f, f)$ ナル Operator $E(\lambda)$ ガ丁度 resolution of identity ニナルコトヲ証明スル方法デアル。

F. Riesz ハ $P(t)$ ガ measurable ナル場合ニ

S. Bochner ノ定理ヲ拡張シ、従ッテ S. Bochner ノ方法ヲ $(U_t f, g)$ ガ t ニ関シ measurable ナ場合ノ Stone ノ定理ヲ証明シタ。

以上 S. Bochner 並ニ F. Riesz ノ方法ハ Fourier Integral ノ理論ノ応用ト見ラレ、M.H. Stone ノハ Hilbert space ノ理論ト Fourier Integral ノ理論ト合セルガ如ク思ハレルノ Hilbert space ノ理論ヲ主トシテ、最モ理解シヤスキハ J. v. Neumann ノ方法デアル。然シ Neumann ノ方法デハ $(U_t f, g)$ ノ連続ノ証明ト、Aヨリ Rヲ求メル辺ガ中々難解デアルガ Normal operator ノ理論ヲ用ヒルト遥ニ簡単ニナル様デアル。

Neumann ノ証明ノ改良

$\|(U_t f, g)\| \leqq \|f\| \cdot \|g\|$ ナルヲ以テ、一定ノ f, g ニ対シ、$(U_t f, g)$ ハ $-\infty < t < \infty$ ニテ bounded measurable. 従ッテ

$$(Af, g) = \int_0^\infty e^{-t} (U_t f, g)\, dt$$

ニヨリ Riesz ノ定理ニヨッテ、bounded Operator A ガ定義セラレル。此レヲ記号的ニ

$$(1) \quad A = \int_0^\infty e^{-t} U_t\, dt$$

ト書クコトトスレバ、(α) ノ性質ヨリ

(2) $A^* = \int_{-\infty}^{0} e^t U_t \, dt$

(3) $U_\lambda A = A U_\lambda = e^\lambda \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t} U_t \, dt$

(4) $AA^* = A^* A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|t|} U_t \, dt$

(5) $A + A^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} U_t \, dt = 2AA^*$

以上ハ Neumann ノ巾ガタ式ニテ簡単ニ計算シ得ル。以下ガ Neumann ト異ル方法デアル。

(4) ヨリ A ハ normal，然カモ bounded ナルヲ以テ hypermaximal. 故ニ

$$A = \int_{\mathbb{G}} z \, dE(z)$$

ナル measure Operator $E(z)$ ガ存在ス。

然カモ

$$A^* = \int_{\mathbb{G}} \bar{z} \, dE(z)$$

$$AA^* = \int_{\mathbb{G}} |z|^2 \, dE(z)$$

故ニ (5) ヨリ

$$\int_{\mathbb{G}} \left(|z|^2 - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \right) dE(z) = 0$$

此ノ関係ハ Gaussian plane $\mathbb{G}$ 全平面ノ積分ニ関ス

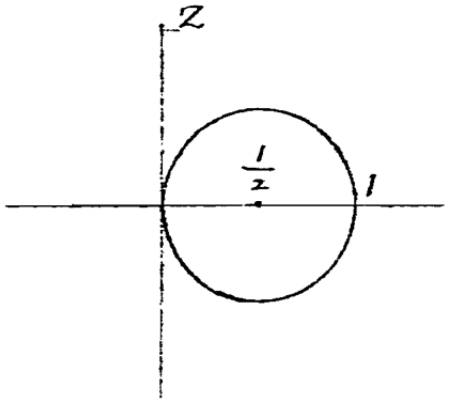
ル性質ナルモ、$\mathfrak{C}$上ノ任意ノ measurable set $\mathfrak{Z}$ = 對シテハ、Aノカハリ=$AE(\mathfrak{Z})$ヲ考フルコトニヨリ

$$\int_{\mathfrak{Z}} \left(|z|^2 - \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \right) dE(z) = 0$$

故=

$$|z|^2 = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$$

ナル曲線、即チ$\frac{1}{2}$ヲ中心トセル半径$\frac{1}{2}$ノ円周ト共有点ヲ有サザル点集合$\mathfrak{Z}$=對シテハ $E(\mathfrak{Z})=0$. 然カモ此ノ円ハ parameter λヲ用ヒテ



$$z = \frac{1}{1-i\lambda} \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$$

=テ表ハサル。故=著者ノ紙上談話會=於ケル Eigenwertproblem ノ一証明中ノ§4=ヨリ

$$(6) \quad A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-i\lambda}\, dE(\lambda)$$

此処= $E(\lambda)$ ハ

$$z(t) = \frac{1}{1-it} \qquad (-\infty < t < \lambda)$$

ナル点集合=對スル measure operator トスル。然ル時ハ若シ

$$\lim_{\lambda \to \infty} E(\lambda) = 1$$

ナルトキハ $E(\lambda)$ ハ resolution of identity トナル。

又，コノ條件ハ、Aが0ヲ Eigenwert トシテ有サヌコトト同一ノコトヲ表ハス。Aが0ヲ Eigenwert トシテ有サヌコトハ次ノ如クニシテ証明サレル。

$$Af = 0$$

トスレバ、(3)ヨリ任意ノ g ニ對シ

$$e^{\lambda}\int_{\delta}^{\infty} e^{-t}(U_t f, g)\,dt = 0$$

δハ任意ナルヲ以テ、一定ノ g ニ對シ t ノ measure 0 ヲ除キテ

$$(U_t f, g) = 0$$

Hilbert space $\mathfrak{H}$ ハ separable ナルヲ以テ $\mathfrak{H}$ ノ überall dicht ノ Element $g_1, g_2, \cdots\cdots$ ニ對シ結局 measure 0 ヲ除イテ

$$(U_t f, g) = 0$$

故ニ $U_t f = 0$ ナル t が存在ス。從ツテ $\|f\| = \|U_t f\| = 0$ トナリ、Aハ0ヲ Eigenwert トシテ有サヌ。(6)ノ resolution of identity $E(\lambda)$ ニ對シ

$$V_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\,dE(\lambda)$$

ト置ケバ、V_t ハ unitary ニシテ

$$V_{t+\delta} = V_t U_\delta$$

然カモ、t ニ關シテ連續ナルコトハ直チニ知レル。然カモ

$$\int_0^{\infty} e^{-t}(V_t f, g)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-i\lambda}\,dE(\lambda) = A$$

故ニ V_t ニ関シ U_t ト同様ナ計算ガ行ハレ

$$V_\delta A = A V_\delta = e^\delta \int_\delta^\infty e^{-t} V_t \, dt$$

今，$E_n = E(n) - E(-n)$ ト置ケバ、$f = E_n f + f$ ニ對シテハ (6) ヨリ常ニ $\|Af\| \geqq \varepsilon \|f\|$ トナルガ如キ正數 ε ガ存在ス。然カモ E_n ノ rang ニ於テハ A^{-1} モ bounded トナルヲ以テ、此ノ rang ノ任意ノ f ニ對シ、$f = Af_1 + f_1$ ガ存在シ、(6) ヨリ任意ノ g ニ對シ

$$(U_\delta f, g) = (U_\delta A f_1, g) = e^\delta \int_\delta^\infty e^{-t} (U_t f_1, g) \, dt$$

故ニ、$(U_\delta f, g)$ ハ δ ノ連続函數トナル。又 (6) ヲ書キ直スト

$$U_\delta A = e^\delta \int_\delta^\infty e^{-t} U_t \, dt = e^\delta \int_0^\infty e^{-t} U_t \, dt - e^\delta \int_0^\delta e^{-t} U_t \, dt$$

$$U_\delta A = e^\delta A - e^\delta \int_0^\delta e^{-t} U_t \, dt$$

同樣ニ

$$V_\delta A = e^\delta A - e^\delta \int_0^\delta e^{-t} V_t \, dt$$

故ニ

$$(U_\delta - V_\delta) A = -e^\delta \int_0^\delta e^{-t} (U_t - V_t) \, dt$$

$f = E_n f + f$ ニ對シテハ、$(\delta > 0)$ トスレバ

$$\varepsilon \|(U_\delta - V_\delta) f\| \leqq \|(U_\delta - V_\delta) A f\|$$

$$\leqq e^{\lambda}\int_0^{\lambda} e^{-t}\|(U_t-V_t)f\|\,dt$$

(如何トナレバ一般ニ $A=\int W_t\,dt$ ナルトキハ

$$(Af,g)=\int(W_tf,g)\,dt$$

従ッテ

$$\left|(Af,g)\right|\leqq\int\left|(W_tf,g)\right|dt\leqq\|g\|\int\|W_tf\|\,dt$$

$g=Af$ ト置ケバ

$$\|Af\|\leqq\int\|W_tf\|\,dt\Big)$$

従ッテ常微分方程式ノ解ノ uniqueness ノ証明ト同様

$$\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}\lambda}\left\{e^{-\lambda}\|(U_\lambda-V_\lambda)f\|\right\}\leqq e^{-\frac{1}{\varepsilon}\lambda}\int_0^{\lambda}e^{-t}\|(U_t-V_t)f\|dt$$

$$\therefore\quad \varepsilon\int_0^{\lambda}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\lambda}\left\{e^{-\lambda}\|(U_\lambda-V_\lambda)f\|\right\}ds$$

$$\leqq-\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}\lambda}\int_0^{\lambda}e^{-t}\|(U_t-V_t)f\|\,dt$$

$$+\varepsilon\int_0^{\lambda}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\lambda}\left\{e^{-t}\|(U_s-U_\lambda)f\|\right\}ds$$

$$\therefore\quad \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}\lambda}\int_0^{\lambda}e^{-t}\|(U_t-V_t)f\|\,dt\leqq 0$$

従ッテ $\|(U_t-V_t)f\|$ ハ連続且ツ負ナラザルニヨリ

$$(U_t-V_t)f=0$$

$\therefore\ U_t f = \nabla_t f$

此レハ $t \geq 0$ ナル t ニ對シテナルモ、(4) ヨリ $t \leqq 0$ ヲ t ニ對シテモ成立ス。又 f ヲ $\mathfrak{H}$ ノ任意ノ Element トスレバ

$$U_t E_n f = \nabla_t E_n f$$

$n \longrightarrow \infty$ トヲシムレバ

$$U_t f = \nabla_t f$$

—— (証明終) ——

(注意) 以上ノ証明ハ Hilbert space ニテ考ヘタルモノニシテ、一般ユークリッド空間デハ成立シナイ。勿論 Neumann, 並ニ Stone ノ証明ハ Hilbert space ノ separability ヲ假定シテヰル。Stone ノ証明中ニテハ明カニハ記シテナイが、t ノ measure 0 ヲ除イテ $(U_t f, g) = 0$ ナルトキハ $U_t f = 0$ ナル t ガ存在スルト述ベテヰルが、此処ニ當然 $\mathfrak{H}$ ノ separability が必要デアル。然シ $(U_t f, g)$ が t ニ關シ連続ナル場合ニハ一般ユークリッド空間ノ場合トシテ証明ガソノマヽ成立スルコトが明デアル。

然シ上ノ証明ヨリ明カナ如ク、一般ユークリッド空間ニテモ $U_t f$ が t ニ關シ弱始連続 (weakly approximately continuous) 即チ如何ナル正数 ε ニ對シテモ measure が ε ヨリ小ナル点集合ヲ適當ニ除ケバ如何ナル g ニ對シテモ $(U_t f, g)$ が

t ニ関シ一様連続ナルトキハ成立ス。$(U_t f, g)$ が Hilbert space ニテ t ニ関シ measurable ナル時ハ Lousin ノ定理ヨリ Neumann ガ証明セシ如ク $U_t f$ ガ弱強連続トナリテ、上ノ場合ニ含マレルコトトナル。(U_t が unitary ノ場合ニハ強強連続トナル。一般ニ $U_t f$ ガ弱強連続デ $\|U_t f\|$ ガ強連続ナレバ $U_t f$ ハ強強連続トナル。)

昭和十四年八月一日

附記: 尚 B. v. Sz. Nagy ガ Stone ノ定理ノ別証明ヲ挙ヘテヰル。(über messbare Darstellungen Liescher Gruppen. Math. Ann. 112. (1936)).

其ノ方法ハ大体次ノ如クデアル。先ヅ U_1 ニ対シ

$$(U_1 f, g) = \int_0^1 e^{2\pi i \lambda} d(F(\lambda) f, g)$$

ナル resolution of identity $F(\lambda)$ ヲ取リ

$$U_1^{\,t} = \int_0^1 e^{2\pi i t \lambda} dF(\lambda)$$

ヲ考ヘルト此レガ又 (1) ヲ満足シ、t ニ関シ measerable ナコトハ明カデアル。ソコデ $V_t = U_t - U_1^{-t}$ ナルモノヲ考ヘルト、V_t モ (1) ヲ満足シ、然カモ $V_0 = V_1 = 1$ トナリ t ニ関シ周期的ニナル。

$$P_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} V_t \, dt \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

ヨリ P_n ヲ定義スレバ、此ノ P_n ガ Projective operator

ニシテ、$P_n P_m = 0$ $(n \neq m)$ ニシテ

$$\sum_{-\infty}^{\infty} P_m = 1$$

且ツ

$$U_t = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi n t} P_n$$

トナル。従ツテ

$$U_t = U_1^t \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} P_n$$

今

$$E(\lambda) = F(\lambda - [\lambda]) \cdot P_{[\lambda]} + \sum_{n < [\lambda]} P_n$$

ト置ケバ、此ノ $E(\lambda)$ ハ對シテ

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \lambda} d(E(\lambda) f, g)$$

ガ証明サレル。コノ証明ヲ簡單ニハアルガ $\sum_{-\infty}^{\infty} P_n = 1$ ヲ証明スルトキ、$S = 1 - \sum_{-\infty}^{\infty} P_n$ ト置キ

$$\int_0^1 e^{-2\pi i m t} (U_t S f, g)\, dt = 0 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

ヲ出シ、任意ノ m ニ對シ成立スルヲ以テ t ノ measure 0 ヲ除キ $(U_t S f, g) = 0$ ヲ得ル。此処ニ bounded measurable function ノ フーリエ係數ガ零トナルトキ其ノ function ハ measure 0 ヲ除キ 0 トリトイフコトヲ用ヒル。