



Title	Stone ノ 定理ノ 証明ニ就テ
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 184, p. 394-406
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74733
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

802. Stone / 定理 / 証明 = 就テ

中 野 春 五 郎

M. H. Stone が Proc. Nat. Ac. 16, (1930) =
テ 次ノ定理ヲ述ベ其証明ノ方針ヲ記シタ。

定理. $U_t (-\infty < t < \infty)$ が Hilbert space $\mathcal{G}$
ニ於ケル unitary transformation = シテ

$$(2) \quad U_t U_s = U_{t+s}$$

ナルトキハ

$$(p) \quad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d(E(\lambda) f, g)$$

＋ λ が如き identity, resolution $E(\lambda)$ が存在ス。

J. v. Neumann が先づ最初 $(U_t f, g)$ が t = 関シ f, g 1 如何 = 関セズ Lebesgue / 意味 = τ measurable ナル假定ノ上ニ、定理ヲ証明シ、
(Annals of Math. Vol 33, 1932) 次イテ M. H. Stone が (Annals of Math. Vol 33, 1932) 同
一假定ヲ証明ヲ與ヘタ。又 S. Bochner が $(U_t f, g)$
が t = 関シ連続ナル場合ノ別証明ヲ行フ (Sitzungsberich-
ten Preuss. Akad. Wiss. phys-math
Klasse, 1933) 次ニ F. Riesz が同様ノ方法ヲ
 $(U_t f, g)$ が t = 関シ measurable ナル場合ニ拡張シタ。
(Acta. Szeged. 6. 1934)

J. v. Neumann / 方法ハ、先づ $(U_t f, g)$
が t = 関シ measurable ナルコトヲハ (2) ナル條件
ヨリ U_t が t = 関シ連続ナルコトヲ証明シ。 U_t が t = 関
シ連続ナル場合ニ

$$(A f, g) = \int_0^{\infty} e^{-t} (U_t f, g) dt$$

ナル bounded Operator A 作リ $V = I - 2A$ ト置ク
時ハ V が unitary = シテ且ツ $V f = f$ ナル時ハ $f = 0$ /
場合ニ限ルコトが証明サレ、從ツテ J. v. Neumann /
Cayley transformation / 理論ニヨリ

$$g = (\nabla - 1) f$$

$$Rg = -i(\nabla + 1) f$$

+ ν hypermaximal Hermitian R が存在
 シ、 $\exists$ R の resolution of identity $\exists E(\lambda)$
 トスレバ、此 $E(\lambda) =$ 對シ (β) が成立スルコトヲ証明
 スル方針デアル。

M. H. Stone, 方法ハ Fourier-Plancherel
 Theorem $= \exists \nu$ 。

$$\psi(\tau; l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - l} e^{-i\tau\lambda} d\lambda, \quad (J(l) \neq 0)$$

$$\frac{1}{\lambda - l} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau; l) e^{i\lambda\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} (l - m) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau; l) \psi(\sigma - \tau; m) d\tau \\ = \psi(\sigma; l) - \psi(\sigma; m) \end{aligned}$$

+ ν 公式ヨリ

$$(X_l f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau; l) (\psi(\tau) f, g) d\tau \quad J(l) \neq 0$$

ト置クコト $= \exists$ ν bounded operator X_l が定義セ
 ラル。次イテ M. H. Stone, resolvent $= \exists$ ν 理
 論ヨリ

$$X_l = (H - l)^{-1}$$

+ ν self-adjoint Hermitian H が存在シ。 H
 の resolution of identity $\exists E(\lambda)$ トスレバ、

此、 $E(\lambda) = T(\beta)$ が成立スルトイツ方法デアル。従ッ
 テ Stone, 方法デハ $(U_t f, g)$, t = 関スル measurable
 ヨリ t = 関スル continuity ヲ 証明スル必要ハナ
 ク、ソノ点ハ Heumann, 証明 = 比シ簡単デアアルガ、
 $\psi(\tau; l)$ = 関スル性質、其ノ他複雑ナ計算ヲ必要ト
 スル。

S. Bochner ハ 連続函数 $P(t)$ が

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dV(\lambda)$$

ナルガ如キ 單調増加函数 $V(\lambda)$ = ヨル Stieltjes inte-
 gral = テ表ハサレル爲、必要且ツ充分ナル條件ハ任意ノ
 数 $t_1, t_2, \dots, t_m$; $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ = 對シ常 =

$$\sum_{\mu, \nu=1}^m P(t_\mu - t_\nu) \rho_\mu \bar{\rho}_\nu \geq 0$$

ナルコト (S. Bochner, Vorlesungen über
 Fouriersche Integrale, Leipzig 1932) ヲ
 用ヒテ $(U_t f, f)$ が此條件ヲ満足スルコトヲ証明シ、従
 ヲテ

$$(U_t f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dV(\lambda)$$

ナル 單調増加函数 $V(\lambda)$ ヲ適當ニ定メ、 $V(\lambda) = (E(\lambda)f, f)$ ナル Operator $E(\lambda)$ が丁度 resolution of
 identity = ナルコトヲ証明スル方法デアル。

F. Riesz ハ $P(t)$ が measurable + 場合 =

S. Bochner / 定理ヲ拡張レ。従ツテ S. Bochner
ノ方法ヲ $(U_t f, g)$ が t = 関シ measurable + 場
合, Stone / 定理ヲ証明シタ。

以上 S. Bochner 並ニ F. Riesz / 方法ハ Fourier
Integral / 理論ノ應用ト見ラレ、M.H. Stone,
ハ Hilbert space / 理論ト Fourier Integral
ノ理論ト合セルが如ク思ハレル。Hilbert space / 理
論ヲ主トシテ、最も理解シヤスキハ J. v. Neumann /
方法デアル。然レ Neumann / 方法デハ $(U_t f, g)$ /
連続ノ証明ト、 A ヨリ R ヲ求メル辺ガ中々難解デアルガ
Normal operator / 理論ヲ用ヒルト違ニ簡單ニナル
様デアル。

Neumann / 証明ノ改良

$\|(U_t f, g)\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ ナルヲ以テ、一定ノ f, g
ニ對シ、 $(U_t f, g)$ ハ $-\infty < t < \infty$ 上 bounded mea-
surable. 従ツテ

$$(Af, g) = \int_0^\infty e^{-t} (U_t f, g) dt$$

ニヨリ Riesz / 定理ニヨツテ、bounded operator
 A が定義セラレル。此レヲ記号的ニ

$$(1) \quad A = \int_0^\infty e^{-t} U_t dt$$

ト書クコトスレバ、 (A) ノ性質ヨリ

$$(2) \quad A^* = \int_{-\infty}^0 e^t U_t dt$$

$$(3) \quad U_s A = A U_s = e^s \int_s^{\infty} e^{-t} U_t dt$$

$$(4) \quad AA^* = A^*A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|t|} U_t dt$$

$$(5) \quad A + A^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} U_t dt = 2AA^*$$

以上ハ Heumann ノ推ケタ式ニテ簡單ニ計算シ得ル。以下
ガ Heumann ト果ル方法デアル。

(4)ヨリ A ハ normal, 然カモ bounded + ルヲ
以テ hypermaximal. 故ニ

$$A = \int_{\mathbb{G}} Z dE(Z)$$

ナル measure Operator $E(Z)$ ガ存在ス。

然カモ

$$A^* = \int_{\mathbb{G}} \bar{Z} dE(Z)$$

$$AA^* = \int_{\mathbb{G}} |Z|^2 dE(Z)$$

故ニ (5)ヨリ

$$\int_{\mathbb{G}} \left(|Z|^2 - \frac{1}{2} (Z + \bar{Z}) \right) dE(Z) = 0$$

此ノ関係ハ Gaussian plane $\mathbb{G}$ 全平面ノ積分ニ関ス

性質ナルモ、 $\mathbb{C}$ 上ノ任意ノ measurable set $Z =$
 對シテハ、 A ノカハリ $= AE(Z)$ ヲ考フルコトニヨリ

$$\int_Z \left(|z|^2 - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \right) dE(z) = 0$$

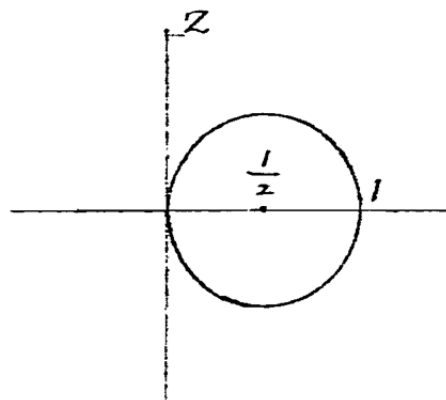
故ニ

$$|z|^2 = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

ナル曲線、即チ $\frac{1}{2}$ ノ中心トセル
 半径 $\frac{1}{2}$ ノ円周ト共有点ヲ有サ
 ガル点集合 $Z =$ 對シテハ

$E(Z) = 0$ 。然カモ此ノ円ハ

parameter λ ヲ用ヒテ



$$z = \frac{1}{1 - i\lambda} \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

ニテ表ハサル。故ニ著者ノ紙上談話會ニ於ケル Eigen-
 wertproblem ノ一証明中ノ §4 ニヨリ

$$(6) \quad A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - i\lambda} dE(\lambda)$$

此處ニ $E(\lambda)$ ハ

$$Z(t) = \frac{1}{1 - it} \quad (-\infty < t < \lambda)$$

ナル点集合ニ對スル measure operator トスル。然ル時
 ハ若シ

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E(\lambda) = I$$

ナルトキハ $E(\lambda)$ ハ resolution of identity トナル。

又、この條件ハ、 A が 0 の Eigenwert トシテ有サ
ヌコト、同一ノコトヲ表ハス。 A が 0 の Eigenwert トシ
テ有サヌコトハ次ノ如クニ証明サレル。

$$A f = 0$$

トスレバ、(3)ヨリ任意ノ g ニ對シ

$$e^{\lambda t} \int_0^{\infty} e^{-t} (U_t f, g) dt = 0$$

λ ハ任意ナルヲ以テ、一定ノ g ニ對シ t ノ measure 0 ヲ
除キテ

$$(U_t f, g) = 0$$

Hilbert space $\mathcal{G}$ ハ separable ナルヲ以テ $\mathcal{G}$ ノ
überall dichtノElement $g_1, g_2, \dots$ ニ對シ
結局 measure 0 ヲ除イテ

$$(U_t f, g) = 0$$

故ニ $U_t f = 0$ ナル t ガ存在ス。從ツテ $\|f\| = \|U_t f\| = 0$ ト
ナリ、 A ハ 0 ノ Eigenwert トシテ有サズ。(6)ノ resolution
of identity $E(\lambda)$ ニ對シ

$$V_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i t \lambda} dE(\lambda)$$

ト置ケバ、 V_t ハ unitaryニシテ

$$V_{t+\Delta} = V_t U_{\Delta}$$

然レモ、 t ニ關シテ連続ナルコトハ直チニ知レル。然レモ

$$\int_0^{\infty} e^{-t} (V_t f, g) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-i\lambda} dE(\lambda) = A$$

故 $= V_t =$ 同シ U_t ト同様ナ計算が行ハレ

$$V_\delta A = A V_\delta = e^\delta \int_\delta^\infty e^{-t} V_t dt$$

今, $E_n = E(n) - E(-n)$ ト置ケバ, $f = E_n f$ + ル f
 $=$ 對シテハ (6) ヨリ 常 $= \|A f\| \geq \varepsilon \|f\|$ + ルガ如キ正數 ε
 が存在ス。然カモ E_n ノ rang - 於テハ $A^{-1} \in \text{bounded}$
 + ルヲ以テ、此ノ rang , 任意ノ $f =$ 對シ、 $f = A f_1$ + ル
 f_1 が存在シ、(6) ヨリ 任意ノ $g =$ 對シ

$$(U_\delta f, g) = (U_\delta A f_1, g) = e^\delta \int_\delta^\infty e^{-t} (U_t f_1, g) dt$$

故 $=$ 、 $(U_\delta f, g)$ ハ δ ノ 連続函数トナル。又 (6) ヲ替
 キ直スト

$$U_\delta A = e^\delta \int_\delta^\infty e^{-t} U_t dt = e^\delta \int_0^\infty e^{-t} U_t dt - e^\delta \int_0^\delta e^{-t} U_t dt$$

$$U_\delta A = e^\delta A - e^\delta \int_0^\delta e^{-t} U_t dt$$

同様 $=$

$$V_\delta A = e^\delta A - e^\delta \int_0^\delta e^{-t} V_t dt$$

故 $=$

$$(U_\delta - V_\delta) A = -e^\delta \int_0^\delta e^{-t} (U_t - V_t) dt$$

$f = E_n f$ + ル $f =$ 對シテハ、 $(\delta > 0)$ トスレバ

$$\varepsilon \|(U_\delta - V_\delta) f\| \leq \|(U_\delta - V_\delta) A f\|$$

$$\leq e^{\Delta} \int_0^{\Delta} e^{-t} \|(\sigma_t - \nabla_t) f\| dt$$

(如何トナレバ一般に $A = \int \overline{W}_t dt$ トルトキハ

$$(Af, g) = \int (\overline{W}_t f, g) dt$$

従ッテ

$$|(Af, g)| \leq \int |(\overline{W}_t f, g)| dt \leq \|g\| \int \|\overline{W}_t f\| dt$$

$g = Af$ ト置ケバ

$$\|Af\| \leq \int \|\overline{W}_t f\| dt$$

従ッテ常微分方程式ノ解ノ uniqueness ノ証明ト同様

$$\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}\Delta} \left\{ e^{-\Delta} \|(\sigma_{\Delta} - \nabla_{\Delta}) f\| \right\} \leq e^{-\frac{1}{\varepsilon}\Delta} \int_0^{\Delta} e^{-t} \|(\sigma_t - \nabla_t) f\| dt$$

$$\therefore \varepsilon \int_0^{\Delta} e^{-\frac{1}{\varepsilon}s} \left\{ e^{-s} \|(\sigma_s - \nabla_s) f\| \right\} ds$$

$$\leq -\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}\Delta} \int_0^{\Delta} e^{-t} \|(\sigma_t - \nabla_t) f\| dt$$

$$+ \varepsilon \int_0^{\Delta} e^{-\frac{1}{\varepsilon}s} \left\{ e^{-s} \|(\sigma_s - \nabla_s) f\| \right\} ds$$

$$\therefore \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}\Delta} \int_0^{\Delta} e^{-t} \|(\sigma_t - \nabla_t) f\| dt \leq 0$$

従ッテ $\|(\sigma_t - \nabla_t) f\|$ ハ連続且ツ負ナラサルニヨリ

$$(\sigma_t - \nabla_t) f = 0$$

$$\therefore U_t f = V_t f$$

此レハ $t \geq 0$ ナル $t =$ 對シテナルモ、(2)ヨリ $t \leq 0$ ナル $t =$ 對シテモ成立ス。又 f ナ $\mathcal{G}$ ノ任意ノ Element トスレバ

$$U_t E_n f = V_t E_n f$$

$n \rightarrow \infty$ ナラシムレバ

$$U_t f = V_t f$$

—— (証明終) ——

(注意) 以上ノ証明ハ Hilbert space = テ考ヘタルモノニシテ、一般ユークリッド空間デハ成立シナイ。勿論 Neumann, 並ニ Stone ノ証明ハ Hilbert space ノ separability ナラシメテキル。Stone ノ証明中ニテハ明カニハ記シテナイガ、 t ノ measure 0 ナラシメテ $(U_t f, g) = 0$ ナル t ナハ $U_t f = 0$ ナル t ガ存在スルヲ述ベテキルガ、此處ニ當然 $\mathcal{G}$ ノ separability ガ必要ナル。然レ $(U_t f, g)$ ガ $t =$ 関シ連続ナ場合ニハ一般ユークリッド空間ノ場合トシテ証明ガソノマニ成立スルコトガ明ナル。

然レ上ノ証明ヨリ明カニ如ク、一般ユークリッド空間ニテ $U_t f$ ガ $t =$ 関シ弱殆連続 (weakly approximately continuous) 即チ如何ナル正数 $\varepsilon =$ 對シテモ measure が ε ヨリ小ナル点集合ヲ適當ニ除ケバ如何ナル $g =$ 對シテモ $(U_t f, g)$ が

t = 関シ一樣連続ナルトキハ成立ス。 ($U_t f, g$) が Hilbert space = t = 関シ measurable + t 時ハ Lousin の定理 = ヨリ Heumann が証明セシ如ク $U_t f$ が弱殆連続トナリテ、上ノ場合ニ含マレルコトナル。 (U_t が unitary ノ場合ニハ強殆連続トナル。一般ニ $U_t f$ が弱殆連続デ $\|U_t f\|$ が殆連続ナレバ $U_t f$ ハ強殆連続トナル。)

昭和十四年八月一日

附記: 尚 B. v. Sz. Nagy が Stone の定理ノ別証明ヲ導ヘテキル。 (Über messbare Darstellungen Liescher Gruppen. Math. Ann. 112. (1936)).

其ノ方法ハ大体次ノ如クデアル。先ヅ U_1 = 對シ

$$(U_1 f, g) = \int_0^1 e^{2\pi i \lambda} d(F(\lambda) f, g)$$

+ U_1 resolution of identity $F(\lambda)$ ヲ取り

$$U_1^t = \int_0^1 e^{2\pi i t \lambda} dF(\lambda)$$

ヲ考ヘルト此レが又 (1) ヲ満足シ、 t = 関シ measurable + コトハ明カデアル。ソコデ $V_t = U_t - U_1^{-t}$ + U_1 モノヲ考ヘルト、 V_t モ (2) ヲ満足シ。然カモ $V_0 = V_1 = I$ トナリ t = 関シ週期的ニナル。

$$P_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} V_t dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ヨリ P_n ヲ定義スレバ、此ノ P_n が Projective operator

ニシテ、 $P_n P_m = 0$ ($n \neq m$) ニシテ

$$\sum_{-\infty}^{\infty} P_m = 1$$

且ツ

$$V_t = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} P_n$$

トナル。従ツテ

$$U_t = U_t^* \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} P_n$$

今

$$E(\lambda) = F(\lambda - [\lambda]) \cdot P_{[\lambda]} + \sum_{n < [\lambda]} P_n$$

ト置ケバ、此、 $E(\lambda)$ = 對レテ

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \lambda} d(E(\lambda) f, g)$$

カ証明サレル。コノ証明モ簡單デアアルガ $\sum_{-\infty}^{\infty} P_n = 1$ ヲ証明スルトキ、 $S = 1 - \sum_{-\infty}^{\infty} P_n$ ト置キ

$$\int_0^1 e^{-2\pi i m t} (V_t S f, g) dt = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ヲ出シ、任意、 m = 對シ成立スルヲ以テ t 、measure 0ヲ除キ $(V_t S f, g) = 0$ ヲ得ル。此処 = bounded measurable function、フーリエ係數が零ナルトキ其、functionハmeasure 0ヲ除キ0ナリトイフコトヲ用ヒル。