



Title	Banach ノ 或ル問題ニツイテ
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 185, p. 432-447
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74736
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

805. Banach ノ 或ル問題ニツイテ

小 松 崎 均 (北大)

S. Banach ノ 彼ノ著書¹⁾ノ 巻末ニ 次ノ 様ナ問題ヲ

掲ゲテ居ル:

(脚註) 次頁へ.

type (B) の空間、任意、closed linear manifold M = 對シ、空間 (B) の任意、element f が uniquely $= f = g + h$, $g \in M$, $h \in N$ とナル
 ヲウナ closed linear manifold N が元ノ空間ニ
 存在スルカ?

空間 (B) が特ニ $(L^{(2)})$ ノトキハ肯定デ、 (L) , (l) , $(L^{(p)})$
 $2 \leq p < \infty$, $(l^{(p)})$ $2 \leq p < \infty$ ノトキハ否定デアルコトが知
 レテ居ル。此処デハ空間 (L) が否定デアルコトカラ空間
 (C) , (c) , (M) , (m) , $(C^{(p)})$ $p \geq 1$, (C_0) = 於テモ上記ノ
 問題が否定ナルコトヲ示サントス。

II 自然数 m = 對シ、各 interval $\frac{i-1}{m} \leq t < \frac{i}{m}$
 $i = 1, 2, \dots, m-1$, 及ビ $\frac{m-1}{m} \leq t \leq 1$ = 於テ constant
 デ、有理数ヲソノ値ニ持ツヲウナ閉區間 $0 \leq t \leq 1$ デ定義サ
 レタ step-function ノ凡テノ集合ヲ考ヘル。コノ集
 合ノ任意ノ二ツノ element $x(t)$, $y(t)$ ノ一對ニ對シ、
 實數

$$(1) \text{dis}(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

ヲ對應サセテ metric space トスル。更ニコノ metric
 = 依ツテコノ空間ヲ *Komplettierung* シテ得ラレル空
 間ヲ (C^*) ヲ以ツテ表ハス。ソノ結果ト (C^*) ノ element

1) S. Banach; *Théorie des opérations linéaires*.

Warszaw. 1932. p. 244-245 特ニ問題 (7) ヲ参照。吾々
 ハ之ヲ今後單ニ B : *Théorie*; ト表ハスコトニスル。

$0 \leq t \leq 1$ で定義され $uniformly\ convergent$
 な $step-function$ の極限として表はされる。 (C^*)
 は明らに $metric, linear$ な空間である。又上
 の様な $step-function$ の数に可附番個が、 (C^*) の
 一列の $Komplettierung$ した空間であるから $separa-$
 ble 且つ $complete$ である。更には (1) の $type (B)$ の
 ルタメに、三つの条件¹⁾ を充たすから (C^*) は $type (B)$ の空間
 である。連続函数は $step-function$ に依つて
 $approximation$ され、 (C) と (C^*) とは同一の $metric$
 を持つ。故に (C) は (C^*) の部分空間である。尚ほ序に二三の定
 義を附加しよう。

M を空間 (B) の中の $closed\ linear\ manifold$
 とす。 E が空間 (B) から M への $projection$ とな
 る。 $E(B) = M, E^2 = E$ である。 E は $bounded\ linear$
 $transformation$ である。

(C_n) は n 個の実数系列 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の一
 $element$ とし、その $norm$ が

$$\|\{a_1, a_2, \dots, a_n\}\| = \max_{i=1,2,\dots,n} |a_i|$$

で定義される空間を表はす。但し $(C_\infty) = (C)$ とす
 る。

$(B) \simeq (B')$ は空間 (B) と空間 (B') とが $isometrical-$
 $ly = isomorphic$ となることを表はす。

1) B: Théorie; P. 53 参照

F. J. Murray¹⁾ / Lemma 1.1 = 依ッテ吾々ノ問題ハ次ノ如クナル:

Λ ヲ以ッテ $(C), (c), (M), (m), (C^{(r)})$ $r \geq 1, (C_0)$ ノ中ノ一ツヲ表ハレ、 M ヲ空間 Λ ノ任意ノ closed linear manifold トスルト、空間 Λ カラ M ヘノ projection カ存在スルカ?

最初コノ問題ガ $(C^*) =$ 於テ否定サレルナラバ、 $(C) =$ 於テモ否定サレルコトヲ示サシ。ソノタメニ先ヅ二三ノ Lemmaノ証明カラ始メル。

[2] 定義 1. $(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \dots \times (C_{m_n})$ ハ n, m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ガ finite, infinite ノ場合ヲ考ヘ; (i) $n = 1, 2, \dots, m_i = 1, 2, \dots$ ノトキハ、 $f_i \in (C_{m_i})$ トスルト element ガ $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ デアルヤシノ順序ツケアレタ系列ノ空間ヲ表ハシ、ソノ norm ヲ $\|\{f_1, f_2, \dots, f_n\}\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \|f_i\|$ ト定義スル。

(ii) $n = 1, 2, \dots, m_i = \infty$ (或ル $i =$ 對シ) ノトキハ $f_i \in (C_{m_i}), f_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im_i}\}$ トスルト、 f_i ノ凡テノ element $\{a_{ij}\}$ $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots$ ヲ對角線ノ方法ニ依ッテ一列ニ並ベ即チ形式的ニハ

1) F. J. Murray; Relations between certain problems of Banach. *Studia Math.* T. VI, 1936, P. 199 吾々ハ之ヲ今後 M: Relations; ノ如ク表ハス。

$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \dots, a_{1i}, \dots, a_{l, i-l+1}, \dots, a_{li}, \dots\}$ トシ、
 コレが converge スル様ナ順序付ケラレタ系列 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ヲ $\forall$ element トシ、 $\forall$ norm が
 $\|\{f_1, f_2, \dots, f_n\}\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \|f_i\|$ デ定義ケレタ空間ヲ
 表ハス。

(iii) $n = \infty, m_i = 1, 2, \dots, \infty$ トキ $(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \dots$ ハ (ii) ト同様 $= f_i \in (C_{m_i})$ トシ、 f_i 1 凡テ、
 element $\{a_{ij}\}$ $i=1, 2, \dots, j=1, 2, \dots$ ヲ對
 角線ノ方法ニヨツテ一列ニ並ベ、ソレが converge スル
 様ナ順序付ケラレタ系列 $\{f_1, f_2, \dots\}$ ヲ element
 トシ、 $\forall$ norm が $\|\{f_1, f_2, \dots\}\| = \text{l.u.b.}_{i=1,2,\dots} \|f_i\|$ デ定
 義ケレタ空間ヲ表ハス。

$(C_1^*) \times (C_2^*) \times \dots \times (C_n^*)$ $n=1, 2, \dots, (C_i^*) = (C^*)$
 $(i=1, 2, \dots, n)$; $\wedge f_i \in (C_i^*)$ トスルト element が
 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ デ、 $\forall$ norm が $\|\{f_1, f_2, \dots, f_n\}\|$
 $= \max_{i=1,2,\dots,n} \|f_i\|$ デ定義ケレタ順序付ケラレタ系列ノ空間ヲ
 表ハス。

$(C_1^*) \times (C_2^*) \times \dots, (C_i^*) = (C^*) (i=1, 2, \dots)$;
 $\wedge f_i \in (C_i^*)$ トスルト、或ハ constant = uniform-
 ly = converge スル系列 $\{f_1, f_2, \dots\}$ ヲ element ト
 シ、norm が $\|\{f_1, f_2, \dots\}\| = \text{l.u.b.}_{i=1,2,\dots} \|f_i\|$ デ定義
 ケレタ順序付ケラレタ系列ノ空間ヲ表ハス。

Lemma 1 (a) $(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \dots \times (C_{m_n}) \cong (C_m)$,
 $n = 1, 2, \dots, \infty, m_n = 1, 2, \dots, \infty, \sum_{i=1}^n m_i = m$.

($n = \infty$ + ラベ (C_{m_n}) 7 除ク)

$$(b) (C_1^*) \times (C_2^*) \times \cdots \times (C_n^*) \simeq (C^*), \quad n=1, 2, \cdots, \infty$$

($n = \infty$ + ラベ (C_n^*) 7 除ク)

(証明) (a) = 對シテハ (i) $n, m_i < \infty$ ノトキハ、

$(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \cdots \times (C_{m_n})$, element $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$,

$f_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im_i}\}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) = 對

シ (C_m), element $f = \{a_{11}, \cdots, a_{1m_1}, \cdots, a_{n1}, \cdots, a_{nm_n}\}$

ヲ對應サセル。ソノスルト

$$\begin{aligned} \|\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}\| &= \max_{i=1,2,\cdots,n} \|f_i\| = \max_{i=1,2,\cdots,n} \left(\max_{j=1,2,\cdots,m_i} |a_{ij}| \right) \\ &= \max_{i,j} |a_{ij}| = \|f\| \end{aligned}$$

コノ對應ハ 1 對 1 デ norm が変ラナイカラ コノ場合 (a) ハ 成立スル。

(ii) $n < \infty$ $m_i = \infty$ (或ル $i = \infty$ 對シ) ノトキハ、

$(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \cdots \times (C_{m_n})$, element $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$,

$f_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im_i}\}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) トスル

ト、假定 = ヲツテ $\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \cdots, a_{1i}, \cdots, a_{i1}, \cdots\}$

ハ converge スルカラ之レヲ f トオクト、 f ハ (C_∞)

, element デアル。依ツテ $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} =$ 對シ (C_∞)

, element f ヲ對應サセルト

$$\begin{aligned} \|\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}\| &= \max_{i=1,2,\cdots,n} \|f_i\| \\ &= \max_i \left(\text{l.u.b. } |a_{ij}| \right) = \|f\| \end{aligned}$$

コノ對應ハ 1 對 1 デ norm が変ラナイカラ コノ場合 = 2

(a) へ成立スル。

(iii) $n = \infty$, $m_i = 1, 2, \dots, \infty$ / トキ $(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \dots$
 -----, element $\gamma \{f_1, f_2, \dots\}$ トスルト、(ii) ト同様 =
 f_i / 凡ベテ, element γ 一列 = 並べタ $\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \dots$
 $\dots a_{1i}, \dots, a_{i1}, \dots\}$ へ 假定 = ヨツテ converge スル
 カラ之レヲ f トオクト、 f へ (C_∞) / element γ
 ナル。依ツテ $\{f_1, f_2, \dots\} =$ 対シ (C_∞) / element f
 ヲ對應サセルト

$$\begin{aligned} \|\{f_1, f_2, \dots\}\| &= \text{l.u.b.}_{i=1,2,\dots} \|f_i\| = \text{l.u.b.}_{i=1,2,\dots} \left(\text{l.u.b.}_{j=1,2,\dots} |a_{ij}| \right) \\ &= \text{l.u.b.}_{i,j} |a_{ij}| = \|f\| \end{aligned}$$

コノ對應ハ / 對 / テ且ツ norm が変ラ+イカラ コノ場合ニ
 (a) へ成立スル。

(b) / 場合ヲ 証明スルタメ =、 (C^*) / 任意 / element
 $\varphi =$ 対シ、 $T(\varphi) = \varphi(t; [0, 1])$ ¹⁾ ナル transformation
 = 依ツテ 移サレタ (C^*) / 像ヲ $(\widehat{C})$ トシ、 $(\widehat{C})$ / 任意
 / element $x(t) =$ 対シ、ソノ norm ヲ

$$\|x\| = \text{l.u.b.}_{0 \leq t < 1} |x(t)| \text{ ト定義スル。ソシテ } (C^*) \simeq (\widehat{C})$$

ナルコトハ 証明セラル。ソレニハ コノ對應ガ / 對 / テ norm
 が変ラ+イコトヲ云エバヨイ。 $(C^*) =$ 於テ everywhere
 dense + step-function ヲ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$
 トスルト、 $\|T(\varphi_n)\| = \|\varphi_n\|$, $\|T(\varphi)\| \leq \|\varphi\|$ ハ明ラカデ

1) $\varphi(t; [0, 1])$ ハ $\varphi(t)$ / 定義領域ヲ $0 \leq t \leq 1$ カ、 $0 \leq t < 1 =$
 狭メタモノヲ表ハス。

アル。他方ニ於テ $\varphi = \text{uniformly} = \text{converge}$ アル
 $\{\varphi_n\}$ 、部分列ヲ $\{\varphi_{n_\nu}\}$ トスルト

$\varepsilon > 0$ ニ對シ、正整数 $N(\varepsilon)$ カ決リ、 $\nu > N(\varepsilon) =$
 對シ

$$|\|\varphi_{n_\nu}\| - \|\varphi\|| \leq \|\varphi_{n_\nu} - \varphi\| < \varepsilon/2,$$

$$\begin{aligned} |\|T(\varphi_{n_\nu})\| - \|T(\varphi)\|| &\leq \|T(\varphi_{n_\nu}) - T(\varphi)\| \\ &= \|T(\varphi_{n_\nu} - \varphi)\| \leq \|\varphi_{n_\nu} - \varphi\| < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

ナラシメルコトガ出來ル。

$$\begin{aligned} \therefore |\|T(\varphi)\| - \|\varphi\|| &\leq |\|T(\varphi)\| - \|T(\varphi_{n_\nu})\|| + |\|T(\varphi_{n_\nu})\| - \|\varphi_{n_\nu}\|| \\ &\quad + |\|\varphi_{n_\nu}\| - \|\varphi\|| < \varepsilon \end{aligned}$$

從ツテ $\|T(\varphi)\| = \|\varphi\|$ 。故ニ $(C^*) \simeq (\tilde{C})$ ガ証明出來
 ヌ。

$$\text{次ニ } (\tilde{C}_1) \times (\tilde{C}_2) \times \cdots \times (\tilde{C}_n) \simeq (\tilde{C}), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

ヲ証明シヌリ。先ヅ interval $[0, 1]$ ヲ n 等分シ。

$f_i \in (\tilde{C}_i) = \text{對シ、} (\tilde{C})$ 1 element:

$$\bar{f}_i(t) \begin{cases} = f_i(nt - i + 1) & \frac{i-1}{n} \leq t < \frac{i}{n} \\ = 0 & 0 \leq t < \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \leq t < 1. \end{cases}$$

ヲ對應サセル。 $\bar{f}_i, \bar{f}_j$ ($i \neq j$) ハソノ値ハ 0 = ナル点
 以外ハ重ラナイ。 $(\tilde{C})$ ハ linear ナアルカラ $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \cdots$
 $\cdots + \bar{f}_n$ ハ $(\tilde{C})$ 1 element ナアル。依ツテ $\{f_1, f_2, \cdots$
 $\cdots, f_n\} = \text{對シ } (\tilde{C})$ 1 element $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \cdots + \bar{f}_n$ ナ

$$1) (\tilde{C}_1) \times (\tilde{C}_2) \times \cdots \times (\tilde{C}_n) \simeq (C_1^*) \times (C_2^*) \times \cdots \times (C_n^*) \text{ ト}$$

同様ノ意味ヲ持ツモノトス。

對應サセル。ソシスト

$$\|\{f_1, f_2, \dots, f_n\}\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \|f_i\| = \|\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \dots + \bar{f}_n\|$$

ユノ對應ハ | 對 | デ norm が変ラ + イ カラ n が finite
ノ 場合ハ 成立スル。

$n = \infty$ ノ トキハ、 $f_i \leftarrow (\tilde{c}_i) =$ 對シ $(\tilde{c})$ ノ
element:

$$\bar{f}_i(t) \begin{cases} = f_i[(i+1)(it-i+1)] & \frac{i-1}{i} \leq t < \frac{i}{i+1} \\ = 0 & 0 \leq t < \frac{i-1}{i}, \frac{i}{i+1} \leq t < 1 \end{cases}$$

ヲ 對應サセル。假定 = ヲ ッテ $(\tilde{c}_1) \times (\tilde{c}_2) \times \dots$,

element $\{f_1, f_2, \dots\}$ ハ 或ル constant = uniformly = converge スルカラ、 $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \dots$ ハ $(\tilde{c})$,
element ｱ ｱル。

依ッテ $\{f_1, f_2, \dots\} =$ 對シ、 $(\tilde{c})$, element $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \dots$

---- ヲ 對應サセルト

$$\|\{f_1, f_2, \dots\}\| = \text{l.u.b.}_{i=1,2,\dots} \|f_i\| = \text{l.u.b.}_{i=1,2,\dots} \|\bar{f}_i\|$$

$$= \|\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \dots\|$$

即チ ヲノ 對應ハ | 對 | デ norm が変ラ + イ カラ

$$(\tilde{c}_1) \times (\tilde{c}_2) \times \dots \simeq (\tilde{c})$$

デ ｱル。

既ニ 証明シタ 様 = $(C^*) \simeq (\tilde{c})$ デ ｱルカラ、 $f_i \leftarrow (C^*)$
= 對シ $(\tilde{c})$, element $\top (f_i)$ ヲ 對應サセ、 $(C_1^*) \times (C_2^*)$
 $\times \dots \times (C_n^*)$, element $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} =$ 對シ

$(\tilde{C}_1) \times (\tilde{C}_2) \times \dots \times (\tilde{C}_n)$, element $\{T(f_1), T(f_2), \dots, T(f_n)\}$ に対応セル。コノ對應ハノ對ノデ norm が変ヲナイ。

$$\therefore (C_1^*) \times (C_2^*) \times \dots \times (C_n^*) \simeq (\tilde{C}_1) \times (\tilde{C}_2) \times \dots \times (\tilde{C}_n) \simeq (\tilde{C}) \simeq (C^*). \quad (\text{証明終})$$

定義 2. M ノ空間 (B) , closed linear manifold トスル $C(M)$, $\bar{C}(B)$ ハ次ノコトヲ表ハス:

$$C(M) \begin{cases} = \infty \text{ 空間 } (B) \text{ ノ } M \text{ へノ projection が} \\ \text{存在シトキ} \\ = \text{gr. l. b. } (|E|; E^2 = E, E(B) = M) \end{cases}$$

$$\bar{C}(B) = \text{l.u.b. } (C(M); M \subset (B) \text{ } M \text{ ハ closed linear manifold}).$$

然ルニ M : Relations; 1 Lemma 2.1 — 2.3, 3.2 — 3.4 ハ如何ナル type (B) ノ空間ニ於テモ成立スルモノデツツテ、勿論 (C^*) , (C) ニ於テモ成立スル。依ツテ次ノ定理ヲ得:

$$\boxed{\text{定理 I}} \quad \bar{C}(C^*) = C(M), \quad \bar{C}(C) = C(M)$$

ナルヤウニ closed linear manifold M , M が夫々 (C^*) , (C) ノ中ニ存在シ、且ツ

$$I = \bar{C}(C_1) \leq \bar{C}(C_2) \leq \dots \leq \bar{C}(C_\infty) = \bar{C}(C)$$

ナリ、

[3] 定義 3. 空間 (B) が m -dimensional $n \leq m$ トスルト、吾々ハ $\bar{C}_n(B)$ ノコトヲ

$$\bar{C}_n(B) = \text{l.u.b.} (C(M); M \subset (B), M \text{ is } n\text{-dim. closed. lin. manif.})$$

ヲ表ハス。

$$\boxed{\text{Lemma 2}} \quad \bar{C}_n(C^*) \leq \text{l.u.b.} (\bar{C}_n(C_m); m < \infty).$$

$$(\text{証明}) \quad k_n = \text{l.u.b.} (\bar{C}_n(C_m); m < \infty) \text{ ト}$$

オウ。

$k_n = \infty$ ノトキハ明ラカニ成立スルカラ、 $k_n < \infty$ ノ場合ヲ証明スルバヨイ。

ε ハ $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} k_n < 1$, $0 < \varepsilon < 1$ ノ同時ニ充ス実数トス。

$M \in (C^*)$ = 含マレル任意ノ n -dimensional closed linear manifold トシ、 $f_1, f_2, \dots, f_n$ ヲ M ノ中ニ n 個ノ linearly independent + element トス。若シ $\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right\| = 1$ ナラバ、

M: Relations; , Lemma 4.2, 4.3 = ヲツテ正ノ整数 m ト interval $\left[\frac{p-1}{m}, \frac{p}{m} \right]$ ($p = 1, 2, \dots, m-1$)

及ビ $\left[\frac{m-1}{m}, 1 \right]$ 上ニ constant 有リ、且ツ

$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i (f_i - h_i) \right\| \leq \varepsilon$ ナル α_i 有リ linearly independent + step-function $h_1, h_2, \dots, h_n$ トカ好シキ。 M_0 上ニ $h_1, h_2, \dots, h_n$ = 依ツテ張ラレル closed linear manifold トス。又

$$y_i(t) \begin{cases} = 1 & \frac{i-1}{m} \leq t < \frac{i}{m} \\ & \text{但し } i=m, \text{ トキハ } \frac{m-1}{m} \leq t \leq 1 \\ = 0 & 0 \leq t < \frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

トスルト、 $y_1, y_2, \dots, y_n$ は linearly independent
 ナ、 $\{y_i\}$ = 1 本ツテ張ラレル closed linear
 manifold ナル。ソウスルト $\mathcal{M}_0 (\mathcal{M} \subset (C^*))$,
 $\mathcal{M} \simeq (C_m)$, $\mathcal{M}_0 \simeq (c_m)$ ナル関係ガアルカラ $\eta > 0$
 ナル。

$$|E_0| \leq \bar{C}_n(c_m) + \eta \leq k_n + \eta$$

ナルヤウナ $\mathcal{M}$ カラ $\mathcal{M}_0$ へ projection E_0 ガ存在
 ナル。

$f \leftarrow (C^*)$ = 対し transformation F ナ

$$Ff = \sum_{i=1}^m m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} f(s) ds \cdot y_i(t)$$

ト定義スル。 明ナリ = $Ff \in \mathcal{M}$ ナ、 然シ $f \in \mathcal{M}$ ナラバ、

$$f = \sum_{j=1}^m \xi_j y_j(t) \quad (\xi_j = \xi_j \text{ ハ 実数}) \text{ ナ表ハサレルカ}$$

ナ

$$\begin{aligned} Ff &= \sum_{i=1}^m m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \left(\sum_{j=1}^m \xi_j y_j(s) \right) ds \cdot y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^m m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \xi_i ds y_i(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i y_i(t) = f \end{aligned}$$

故 $= F^2 = F$ 得ル。又

$$\begin{aligned}\|Ff\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \sum_{i=1}^m m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} f(s) ds \cdot y_i(t) \right| \\ &\leq \max_{i=1,2,\dots,m} \left(m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} |f(s)| ds \right) = \|f\|\end{aligned}$$

コノコトカラ $\|F\| \leq 1$ が出ル。他 $\mathcal{H} = \mathcal{H}$ 於テ $f \equiv 1$ トオク
ト、 $\|Ff\| = 1 = \|f\|$ 、或ハ $\|f\| = \|Ff\| \leq \|F\| \cdot \|f\|$ 、故ニ
 $\|F\| \geq 1$ 。從ツテ $\|F\| = 1$ デアル。

以上ノコトカラ $F \in (C^*)$ カラ $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 、 $\|F\| = 1$ ナ
ル様ナ projection デアルコトが解ツタ。

次ニ $E_0 F$ テ考ヘル。コノ range ハ $\mathcal{M}_0$ デアル即チ:

$$E_0 F(C^*) = E_0 \mathcal{H} = \mathcal{M}_0.$$

若シ $f \in \mathcal{M}_0$ ナラバ $E_0 Ff = E_0 f = f$ 。從ツテ $(E_0 F)^2$
 $= E_0 F$ 。依ツテ $E_0 F \in (C^*)$ カラ $\mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$ projection
デアル。

$$\therefore C(\mathcal{M}_0) \leq |E_0 F| \leq |E_0| \cdot |F| = |E_0| \leq k_n + \eta$$

η ハ任意ノ実数デイルカラ、 $C(\mathcal{M}_0) \leq k_n < \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ 。

依ツテ $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot C(\mathcal{M}_0) < 1$ 得ル。

M: Relations; / Lemma 5.1 = 依ツテ

$$C(\mathcal{M}) \leq C(\mathcal{M}_0) \frac{1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} C(\mathcal{M}_0)}{1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} C(\mathcal{M}_0)} \leq \frac{k_n (1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} k_n)}{1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} k_n}.$$

ε ハ任意ノ実数デアルカラ、 $C(\mathcal{M}) \leq k_n$ 。然ルニ $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$ ハ

(C^*) 、任意、 n -dimensional closed linear manifold デアルカラ $\overline{C}_n(C^*) \leq k_n$ デアル。

(証明終り)

Lemma 2 が成立スレバ $M: Relations$; / Lemma 7.1 $\wedge (L_p), (l_p)$ / 代り $= (C^*), (c)$ / 置キ換ヘテモ成立スルカラ 即チ:

$$\overline{C}(C^*) \leq l. u. k. (\overline{C}(c_m), m < \infty).$$

之レト定理 I ト = 依ッテ次ノ定理ヲ得:

定理 II $\overline{C}(C^*) \leq \overline{C}(c).$

[4] 今述ベタコトカラ $(C^*) =$ 於テ吾々ノ問題が否定デアルナラバ、定理 II = ヨッテ $\infty = \overline{C}(C^*) \leq \overline{C}(c)$ 即チ $\overline{C}(c) = \infty$ トナル。定理 I = 依ッテ $\overline{C}(c) = C(\mathcal{K}) = \infty$ ナルヲウナ closed linear manifold $\mathcal{K}$ が (c) ノ中ニ存在スル。コノコト $\wedge (c)$ カラソノ中ノ任意ノ closed linear manifold $\mathcal{K}$ へノ projection が存在シタイコトヲ示ス。即チ $(c) =$ 於テ吾々ノ問題ハ否定デア
ル。

他方 = 於テ吾々ノ問題 $\wedge (c)$ 及ビ $(C^*) =$ 於テ否定デア
ルコトが証明出来ル。

何トナレバ空間 (L) ハ空間 (C) ノ或ル部分空間ト isometrically = isomorphic¹⁾ デアルカラ、空間 (L) ヲ (C) = 含マレ且ッ $(L) \simeq (L)$ ナルヲウナ closed

1) B: Théorie; p. 187. th. 10 参照。

linear manifold $\mathcal{M}$ = 對シ、closed linear manifold $\mathcal{N}$ が $(C^{(p)})_{p \geq 1}$ ノ中ニ存在シテ、 $(C^{(p)})_{p \geq 1}$ ノ任意ノ element f ハ uniquely $f = g + h$, $g \in \mathcal{M}$, $h \in \mathcal{N}$ トナル。 $\Phi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^*$, $\Phi(\mathcal{N}) = \mathcal{N}^*$, $\Phi(f) = f^*$, $\Phi(g) = g^*$, $\Phi(h) = h^*$ トナル。 $\mathcal{M}^*$, $\mathcal{N}^*$ ハ共ニ closed linear manifold ナリ、 $f^* \in (C)$ ナリテ uniquely $f^* = g^* + h^*$, $g^* \in \mathcal{M}^*$, $h^* \in \mathcal{N}^*$ トナル。之レハ矛盾ナリ。從ツテ $(C^{(p)})_{p \geq 1}$ = 於テ吾々ノ問題ハ否定ナル。

全ク同様ノ論法ニ依ツテ (C_0) = 於テモ否定ナルコトが云ヒ得ル。