OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	positive operation ノ固有値ニ就イテ
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 186, p. 450-455
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74738
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

807. Positive operation ノ固有値ニ就イテ

角谷 静夫 (阪大)

(B) ヲ semi-order ノツイタ complex Banach 空間，T ヲ (B) デ定義サレタ positive linear operation デ[1] 且ツ $\|T^n\| \leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$, ナル如キ常数 C ガ存在スルモノトスル。

コノ様ナ T ハ Markoff chain ノ問題ニ表ハレテ来ルモノデ、カンレ T ノ固有値ハガ絶対値 1 ヲ超ヘルコトガ出来ナイコトハ明カデアル。シカシ絶対値 1 ノ固有値ノ分布状態ニツイテハ精シイコトハ直ニハワカラナイ。Markoff chain ノ場合ハ $\|T^n\|=1$, $n=1,2,\cdots\cdots$, デ且ツ $\lambda=1$ ガ固有値ニナツテヰルコトハ明カデアルガ、ソレ以上ノ結果ヲ得ルニハ更ニ條件ガ必要デアル。実際 Markoff chain ノ議論ヲ進メルタメニハ

---

(1) Positive operation ニ関シテハ 170号752, 171号760, 172号765 ヲ参照。

(2) 例ヘバ前号（185号）ノ談話804ヲ参照。

「$|\lambda|=1$ ナル固有値が有限個シカナク（シカモソノ各々が finite multiplicity）、且ツソレラがスベテ $\lambda^N=1$ ナル関係ヲ（十分大キイ N ニ対シテ）満足スル」ト云フ事実が essential デ、コノ結果ヲ得ルタメニ種々ノ條件が導入サレタ。(3) M. Fréchet. ハ「transition probability $P(t,E)$ が有界ナ density $p(t,s)$ ヲ持ツ（即チ $P(t,E)=\int_E p(t,s)\,ds$ ニテ $0\leqq p(t,s)\leqq M$ ナル如キ M が存在スル）」コトヲ假定シ，W. Doeblin ハ「$P^{(d)}(t,E)<1-b$ が $mes(E)<\eta$ ナル任意ノ Borel 集合 E ニ対シテ成立スル如キ positive integer d 及ビ positive number η, b が存在スル」コトヲ假定シタ。吉田氏ハ更ニ N. Kryloff - N. Bogolioubhoff ノ條件：

(K) { positive integer m ト completely continuous ナ linear operator ∇ が存在シテ $\|T^m-\nabla\|<1$ トナル。

ノ下デ同ジ結果が得ラレルコトヲ証明サレタ。(4)

吉田氏ノ方法ハ uniform ergodic theorem ヲ使フノデアルガコノ positive operation T が Banach 空間 $(\mathfrak{M})$ ニ於ケル linear operation デアリ且ツ probability kernel $P(t,E)$ ニヨッテ與ヘラレルモノデアルト云フ事実ヲ essential ニ使

---

(3) 前号ノ談話 804 頁參照。

(4) 177 号ノ談話 780

ツテオル。コンデ問題トスルノハ以上ノ結果ガ一般ノ semi-ordered complex Banach 空間ニ於テ、単ニ T が positive デ $\|T^n\| \leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ヲ満足スルコトト、T ガ N. Kryloff - N. Bogoliuboff ノ條件 (K) ヲ満足スルト云フコトトカラ得ラレナイカト云フコトデアル。良ク知ラレタ如ク條件 (K) ト $\|T^n\| \leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル C ガ存在スルト云フコトトカラ uniform ergodic theorem ガ成立シ、シタガッテ $|\lambda|=1$ ナル T ノ固有値入ガ有限個デ且ツ何レモ finite multiplicity デアルコトガワカルカラ、$\lambda^N=1$ ナル N ガ存在スルコトヲ示セバヨイ。コレハ以下ノ定理デ証明サレル如ク凝メテ簡単ナコトデアリナガラ長イ間証明スルコトガ出来ナカッタモノデアル。コレニヨッテ Markoff chain ノ(一般ノ positive operation ヘノ)抽象化ガ出来タワケデアル。

定理 (B) ヲ semi-ordered complex Banach 空間、T ヲ (B) デ定義サレタ positive linear operation デ $\|T^n\| \leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キ常数 C ガ存在スルモノトスル。然ルトキハ若シ T ガ條件 (K) ヲ満足スレバ T ノ絶対値 1 ノ固有値入ハ(モシ存在スレバ)スベテ $\lambda^N=1$ ナル方程式ヲ満足スル。(5)

---

(5) $|\lambda|=1$ ナル T ノ固有値入ハ有限個シカ存在シナイノデアルカラコノ N ハ十分大キクトレバスベテノ入ニ共通ニナルヤウニスルコトガ出来ル。

証明　定理ノ假定ヨリ uniform ergodic Theorem ガ成立スル．ヨッテ

$$T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i + S$$

ナル分解ガ得ラレル．コゝニ λ_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, k)$ ハ $|\lambda| = 1$ ナル T ノ固有値，T_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, k)$ ハ completely continuous + linear operation デ且ツ $T_i^2 = T_i$，$T_i T_j = 0$ $(i \neq j)$，$T_i S = S T_i = 0$ ヲ満足スル．又 S ハ $\|S^n\| \leqq \frac{M}{(1+\varepsilon)^n}$，$n = 1, 2, \cdots\cdots$ ヲ満足スル（M，ε ハ正ノ常数）ヨッテ

$$T^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n T_i + S^n, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

トナル．今 $|\lambda| = |\mu| = 1$ ナル二ツノ complex number λ，μ ニ對シテ $\lambda^N = \mu^N$ ナル如キ positive integer N ガ存在スルトキ $\lambda \sim \mu$ ガアルト定義スレバ $\lambda \sim \lambda$；$\lambda \sim \mu \to \mu \sim \lambda$；$\lambda \sim \mu$，$\mu \sim \nu \to \lambda \sim \nu$ デアルカラ、$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_k$ ハ互ニ～ナル関係ヲモツモノノ class ニ分タレル．コレヲ $\{(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \cdots\cdots, \lambda_{\alpha_{k_\alpha}})\}$ $(\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l)$ トセヨ．各ノ α ニ對シテ N ヲ十分大キクトレバ $\lambda_{\alpha_1}^N = \lambda_{\alpha_2}^N = \cdots\cdots = \lambda_{\alpha_{k_\alpha}}^N$ トナルカラ、更ニ N ヲ十分大キクトッテコレガ $\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l$ ニ對シテ成立スルヤウニスルコトガ出来ル．コノ N ニ對シテ

$$\lambda_{\alpha_1}^N = \lambda_{\alpha_2}^N = \cdots\cdots = \lambda_{\alpha_{k_\alpha}}^N \equiv \lambda_\alpha^* \quad (\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l)$$

トセヨ．$\alpha \neq \beta$ ナルトキハ $\lambda_\alpha^* \neq \lambda_\beta^*$ デ．シカモ 明カニ $\lambda_\alpha^* \neq \lambda_\beta^*$．

ヨッテ T^N ハ

$$T^N = \sum_{\alpha=1}^{l} \lambda_\alpha^* (T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2} + \cdots\cdots + T_{\alpha_{K_\alpha}}) + S^N,$$

$$\lambda_\alpha^* \neq \lambda_\beta^* \quad (\alpha \neq \beta)$$

ト云フ形ニ表ハサレル．従ッテ

$$T_\alpha^* = T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2} + \cdots\cdots + T_{\alpha_{K_\alpha}}$$

トオケバ

$$T^N = \sum_{\alpha=1}^{l} \lambda_\alpha^* T_\alpha^* + S^N$$

トナリ且ツ

$$(T_\alpha^*)^2 = T_\alpha^*, \quad T_\alpha^* T_\beta^* = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$T_\alpha^* S = S T_\alpha^* = 0$$

デアル，

ヨッテ又

$$T^{nN} = \sum_{\alpha=1}^{l} \lambda_\alpha^{*n} T_\alpha^* + S^{Nn}, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

トナル．$\lambda_\alpha^* \neq \lambda_\beta^*$ $(\alpha \neq \beta)$ ナルコトヨリ、任意ニ $|\theta_\alpha| = 1$ ナル complex number θ_α $(\alpha = 1, 2, \cdots\cdots l)$ (但シ $\lambda_\alpha^* = 1$ ナルα ニ対シテハ $\theta_\alpha = 1$ トス) ヲ與ヘタトキ、Kronecker ノ定理ニヨリ positive integer ノ系列 $\{n_\nu\}$ $(n_\nu \to \infty)$ ヲ作ッテ $\lim_{\nu\to\infty} \lambda_\alpha^{*n_\nu} = \theta_\alpha$

($\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l$) ナラシメルコトガ出来ル．ヨッテ上式
=テ $n = n_\nu$ トオキ $\nu \to \infty$ ナラシメルト $S^{N n_\nu} \to 0$
(uniformly) ナルコトヨリ

$$T^{N n_\nu} \longrightarrow \sum_{\alpha=1}^{l} \theta_\alpha T_\alpha^* \qquad (\text{uniformly})$$

トナル。$T^{N n_\nu}$ ガ positive operation ノデアルカラ
$\sum_{\alpha=1}^{l} \theta_\alpha T_\alpha^*$ ハ又 positive operation デナケレバナラ
ナイ。然ルニ若シ λ_α^* ($\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l$) ノウチニ
λ_α^* ト1ノ（シタガッテ又 λ_α^* ト1ノ）ナルモノガ少クトモ一
ツ存在スレバ θ_α ヲ任意ノ $|\theta_\alpha| = 1$ ナル complex number
ニトリ他ノ θ_β ($\beta \neq \alpha$) ヲスベテ1ニ等シクトルコトガ出
来ルカラ $\theta_\alpha T_\alpha^* + \sum_{\beta \neq \alpha} T_\beta^*$ ハ positive operation ト
ナラネバナラヌ。コレハ θ_α が任意デアルカラ $T_\alpha^* \equiv 0$ デナ
ケレバ矛盾デアル。ヨッテ λ_α^* ヲ1ナル α ニ対シテ $T_\alpha^* \equiv 0$.
然ルニ $T_\alpha^* = \sum_{i=1}^{K_\alpha} T_{\alpha_i} = 0$ デアレバ各ノ T_{α_i} ハ

$$T_{\alpha_i} T_\alpha^* = \sum_{j=1}^{K_\alpha} T_{\alpha_i} T_{\alpha_j} = T_{\alpha_i} = 0$$ トナルカラ結局
λ_i ヲ1ナル λ_i ニ対シテ $T_i = 0$ トナル．即チ T ノ絶対値
1ノ固有値ハスベテ $\lambda^N = 1$ ヲ満足スル。