



Title	漸近的概週期性ト ergodic theorems, II
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 186, p. 456-461
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74739
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

808. 漸近的概週期性ト *ergodic theorems, II*

吉田 耕作 (阪大)

§4. Bohr 概週期函数ノ平均ノ存在ノ証明.

§2 = ハ 表記ノ証明ガ M. E. T. (*mean ergodic theorem*) カラ 直チ = 得ラレルト述ベマシタ。所ガ M. E. T. = 於テハ weak ト云フ概念ガ入ッテクルタメ = ノ *Fahr-Banach extension theorem* ガ用ヒラレテアリマス (談話 720)。上ノ平均ノ存在 = ハ, *weak* ノ概念ガ入ッテ コヌタメ, H. B. ノ定理ハ 必學アリマセン。斯様ニシテ Bohr ノ基本定理ガ初等的ノ新証明ヲ 奏ヘラレタコトニナリマス。即チ

定理 I $-\infty < t < +\infty$ デ 定義サレタ 複素数値連続函数 $f(t)$ ガ 概週期的ナリトスル。即チ任意ノ実数列 $\{h_n\} =$ 對シテ $\{f_n(t)\}$, $f_n(t) = f(t+h_n)$ ガ 実軸上全体デ一様收斂スル 部分列ヲ 含ムトスル。然ラバ $\delta =$ 對シテ一様 =

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_{\delta}^{\delta+u} f(t) dt$$

ガ 存在スル。

証明 假定ハ $\text{norm} \|f_n - f_m\| = \text{l. u. b.}_{-\infty < t < +\infty} |f_n(t) - f_m(t)|$ ノ 意味デ $\{f_n(t)\}$ ガ *totally bounded* ト云フコトデアル。今 $\{f_n(t)\}$ ノ 全体ガ norm ノ 意

味ヲ強ル Banach 空間ヲ E , E ヲ, $norm$ / 線型作用素 $T: T \cdot f = g$, $g(t) = f(t+1)$ ヲ考ヘル。假定カ
 テ $\{f^{(n)}\}$, $f^{(n)} = \frac{T+T^2+\dots+T^n}{n} \cdot f$, $\wedge E$ テ compact
 カカラ適當ニ部分列ヲトリ $\lim_{n' \rightarrow \infty} f^{(n')} = f^*$. 明カニ $T \cdot f^* = f^*$.

故ニ $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)} = f^*$ ヲ云フニ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T+T^2+\dots+T^n}{n} (f-f^*)$
 $= 0$ カ云ヘルトヨイ。所ガ之レハ $(f-f^*)$ カ $(g-T \cdot g)$,
 $g \in E$, ノ形ノトキハ明カ。又 T ノ $norm$ / カカラ $(f-f^*)$
 カ $(g-T \cdot g)$ ノ形ノモノ $lines$ ノトキニモ明カデアレ。
 然ルニ且テ単位作用素ヲ表ハスト

$$f-f^* = \lim_{n' \rightarrow \infty} \left\{ f - \frac{T+\dots+T^{n'}}{n'} \cdot f \right\}$$

$$= \lim_{n' \rightarrow \infty} (\mathbb{I} - T) \left\{ \frac{n' \mathbb{I} + (n'-1)T + (n'-2)T^2 + \dots + T^{n'-1}}{n'} \right\} f$$

カカラ $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)} = f^*$ カ云ヘタコトニナル。即チ $\delta = 0$ シ

テ一様ニ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f(t+m)$ カ存在スル。從ツテ $\delta = 0$ 関

シテ一様ニ

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f(\delta+t+m) dt$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int_0^1 f(\delta+t+m) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_1^{n+1} f(\delta+t) dt$$

カ存在スル。故ニ $f(t)$ ノ一様有界性カラ直チニ定理ヲ

得ル。

尚 Stepanoff, Muckenhaupt 等、概週期函数ノ平均ノ存在モ同方針ヲ証明サレルコトヲ注意シテオキマス。

§5. レツノ存在定理

定理2 T ヲ Banach 空間 E ノ $E \rightarrow E$ ノ線型作用素トシ、逆作用素 T^{-1} ガ存在スルトスル。コノトキ

$$(1) \|T^n\| \leq \text{常数 } C \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{任意ノ } x \in E \text{ニ對シテ } \{T^n \cdot x\}, (n=0, \pm 1, \\ \pm 2, \dots), \text{ガ } E \text{ニ } totally \text{ bounded} \\ \text{トスル。} \end{array} \right.$$

然ラバ T ハ絶對値1ノ固有値ヲ少クトモレツ有スル。

証明 $F(n) = T^n \cdot x$ ガ整数ノ加法群ノ上テ

Bochner-Neumannノ意味ヲ概週期的ニナル。即チ任意ノ整数列 $\{m'\}$ ニ對シ、距離 $(F(n+m'), F(n+m'')) = \lim_{-\infty < n < +\infty} \|F(n+m') - F(n+m'')\|$ ノ意味ヲ $\{F(n+m')\}$ ガ $totally \text{ bounded}$ ニナル。何者、假定(2)カラ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ $\{m'\}$ ノ部分列 $\{m'_i\}$ ヲ撰ビ

$$\|F(m'_i) - F(m'_j)\| = \|T^{m'_i} \cdot x - T^{m'_j} \cdot x\| \leq \varepsilon$$
$$(i, j = 1, 2, \dots)$$

然ツテ (1)ニヨリ

$$\|F(n+m'_i) - F(n+m'_j)\| = \|T^{m'_i+n} \cdot x - T^{m'_j+n} \cdot x\| \leq C\varepsilon$$

$(i, j, n = 1, 2, \dots)$

ヲ得ル = ヲル。

故 = Bochner - Neumann, 概週期函数論
(Trans. Am. Math. Soc. 1935, 21-50) =
ヨリ $F(n)$ / Fourier 展開が出来ル:

$$\begin{cases} F(n) \approx \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n C_i & (|\lambda_i| = 1) \\ C_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{F(m)}{\lambda_i^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{T^m}{\lambda_i^m} \right) \cdot x \end{cases}$$

所ガ $T =$ 對シ M. E. T. が成立ッカラ

$$\begin{cases} C_i = T \lambda_i \cdot x; T \lambda_i \in E, T, \text{固有値 } \lambda_i = \\ \text{属スル固有空間へ, projection operator.} \end{cases}$$

故 - T が絶対値 1 の固有値ヲモタヌト云フコトハ,
任意ノ $\lambda, |\lambda| = 1$ = 對シ $T \lambda = 0$ ト云フコト即チ任意ノ
 $x \in E$ = 對シ $F(n) = T^n \cdot x$ / Fourier 展開が零ト
云フコト = ナル。 Fourier 展開ノ一意性 (Eindeutig-
keitsatz) = ヲル之ハ

$$T^n x = 0 \quad \text{for all } n \text{ and } x \in E$$

ヲ示スカラ 矛盾デアアル。即チ T ハ少クトモ一ツ絶対値 1 の固
有値ヲ有スル。 以上。

注意 1 $\text{l. u. b. } \|T^n x\|$ ヲ $\|x\|$ 新 = x / norm
ヲ定義スレバ始メ norm ト equivalent + topology
が導入サレル。

然シテコノトキ, 新シイ norm デ $\|Tx\| = \|x\|$ トナ

ルコト明カダカラ, 上定理ハ Banach 空間テ,

unitary operator (isometric operator) T

= 関スル定理 = ナル。コノ注意ハ 角谷静夫氏 = 負フ。

注意2 上ノ条件 (1) (2) フモット緩メテ

(i) T = 對シテ M. E. T. が成立ッコト。

(ii) $\begin{cases} F(n) = T^n \cdot x \text{ が weakly almost periodic} \\ \text{即チ任意ノ線型汎函数 } f = \text{對シ } f(T^n \cdot x) = \tilde{F}(n) \\ \text{が概週期的,} \end{cases}$

トシテモ定理ノ結果が成リ立ッコトハ云フマデモアリマセシ。

§6. Fourier 解析

上ノ Fourier 解析ノ使ヒ方ト, M. E. T. カラ先ノ case **III** (§3) = 相應シテ

定理3 T^{-1} が存在シ, 且ツ $\{T^n\}$, ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) が operator, norm, 意味デ totally bounded ナラ

$$(3) \begin{cases} T^n \approx \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n T_{\lambda_i} & (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ |\lambda_i| = 1, T_{\lambda_i}^2 = T_{\lambda_i}, T T_{\lambda_i} = T_{\lambda_i} T = \lambda_i T_{\lambda_i}, \\ T_{\lambda_i} T_{\lambda_j} = 0 \quad (i \neq j). \end{cases}$$

T_{λ_i} ハ, T ノ固有値 λ_i = 属スル固有空間ヘノ projection operator デアリマス。Eindeutigkeitssatz = ヨリ T ハ高々可附番無限個シカ絶対値1ノ固有値 (λ_i) フ

モタズ、且ツ T ハ之等ノ λ_i ト $T\lambda_i$ トニヨツテ完全ニ定マル。
特ニ T ハコノトキ continuous spectrum ヲ有ク
ヌ譯デアリマス。

T = 種々ノ條件ヲ附シテ上ノ Fourier 展開 (3)
ノ 収斂ノ問題 等ヲ論ズルト面白イ譯デアリマセウ。