



Title	Homologiegruppe ト isomorph ナ Homotopiegruppe ヲ持ツKomplexニ就イテ
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 186, p. 461-466
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74740
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

809. Homologiegruppe と isomorph +
Homotopiegruppe を持つ Komplex
= 就いて

小 松 醇 郎 (阪大)

Komplex K^n , Zyklus かつ Sphäre 又
ハ Sphärisch¹⁾ デアルコトヲ 何カデ Characterise
出来 + イモノカ? ト云フ問題が 出 発 デアル。斯様 + 問題ヲ
提出シタ理由ハ, Zyklus かつ Sphäre デアル Kom-
plex ハーツノ 著シイ性質ヲ 持ツカラ デアル。ソレハ 斯
様 + K^n , 任意ノ Teilkomplex K^r , S^r へノ normale
Abbildung ハ 常 = K^n ヲデ erweitern 出来ル。

コノ 逆 が 成 立 スル + ラバ 此ノ 性質ヲ Characterise
出来ル 理 デアル が ソウハ 行カ + イラ シイ。

1) Sphäre ト等シイ Homotopie Zyklus を 持ツ Komplex
ノ 意味 デ 使フ。

整係数 $\mathbb{Z}$ Homologiegruppe が Homotopie-
 gruppe と isomorph²⁾ たらバ Zyklus ハスベテ
 Sphäre の Bild ト考へ、レルカラ上、性質ハ成立ス
 ルノデハナイカト想像サレル、コレハ以下証明スル如ク肯定
 サレタ、デアアルが今度ハ Homologiegruppe ト Homotopiegruppe ト isomorph + Komplex, Zyklus
 ハ凡ベテ Sphärisch デアルカ? ト云フ問題モ生ズル。
 此ノ問題ガ肯定サレルたらバ以下ノ証明ハ trivial ーナ
 ル理デアアル。

Homotopiegruppe, Homologiegruppe
 ノ中へ、對應 θ 。

Homotopiegruppe $\pi_i(K^n)$ ノ一ツノ元 α ハ
 S^i (Sphäre) ノ Bild。從ツテ i 次元 Homolo-
 giegruppe ノ一ツノ Zyklus Z^i ト考へラレル。
 コノ對應 $\alpha \rightarrow Z^i$ ヲ θ デ表ハス。 θ ハ homomorph
 in デアル。

定理. Komplex K^n ハ對應 θ ガ常 = isomorph
 auf デアル。 γ 次元 Teilkomplex K^γ , S^γ ハ
 normal Abbildung³⁾ f ハ常 = K^n 迄 erweitern
 出来ル。

2) 何等カノ對應ガ isomorph ト云フノデハナク或ル定メ

ッタ對應デ isomorph ト云フノデアアル。

3) ハ次頁へ

証明. $f: K^r \rightarrow S^r$ が normal、従って各 $(r+1)$ 次元単体 T^{r+1} が $\mathbb{R}$ erweitern 出来る。従って $(r+2)$ 次元 0- Zyklus (Hindernis) f^{r+2} が出来る。即ち

$$\dot{T}_i^{r+2} \rightarrow S^r : \alpha_i \in \pi_{r+1}(S^r)$$

ヨリ

$$f^{r+2}(T_i^{r+2}) = \alpha_i.$$

今 $B_u^{r+2}(K^n, \mathcal{O}_f)$ 、ベッチ数 b 、Torsionszahl $P_1, \dots, P_j$ トスル。別 = $b+j$ 個、 $(r+2)$ -Sphären をトリ一点で Zusammenhängend とラシタル。ソノ内 j 個、Sphären ハ夫々 $p_1, \dots, p_j$ 回加へレバ heranden スル。又 $\gamma = (r+3)$ 次元 Polyeder を作ル。⁴⁾ 此、Komplex を $\overline{K}^{r+3}$ トスレバ

$$B_u^{r+2}(K^n, \mathcal{O}_f) \approx B_u^{r+2}(\overline{K}^{r+3}, \mathcal{O}_f).$$

又 $B_u^{r+2}(K^n, \mathcal{O}_f)$ 、上ノ Basis を作ル $b+j$ 個、Zyklen ハ K^n 、假定カラ凡テ Sphärenbild をトレル。従って $\overline{K}^{r+3}$ 、Basis をトス $b+j$ 個、Sphären を Urbild トシテ 連続変換 を作ル。ソノ際 Torsionszahl p_j 、Zyklus $Z_j \subset \overline{K}^{r+3}$ 、Torsionszahl p_j

3) K^n へ heranden スル Zyklus Z^r ハ凡テ $f = 0$ ヲツテ、Abbildungsgrad $0 =$ 移ッテ居ルモノ。係数群ハ整数。

4) 是ハ常ニ可能。 $(r+3)$ 次元 Vollkugel を p_j 回回轉シソノ表面上デダケ移ッタル点ヲ identifizieren スレバ良イ。

1. Sphäre から移ルヤウ = 作ル。コノ変換ハ $\bar{K}^{r+3}$ 全体
 = erweitern 出来ル。 Z_i ハ Homotopiegruppe
 1 元トシテモ P_i 倍スレバ 0。即チ homotop 0 + 1 がカ
 ラ長ハ出来ル。

此ノ $\bar{K}^{r+3}$ ヲ 見テ 1 次元 γ = ツキ作り加ヘタ Komplex ヲ
 $\bar{K}^n$ トスル。

$\bar{K}^n$ ノ Zyklus ハ 見テ Sphäre デアリ、且ツ 整数
 数ノベッチ群ヲ isomorph = 對應スルヤウナ連続変
 換

$$\mathcal{P}(\bar{K}^n) \subset K^n$$

ガ作レタ。操作カラ 分ルヤウ = ベッチ群ハ又任意ノ $\mathcal{O}_m$
 ヲ係数トシテモ isomorph auf デアル。

$$B_u^{r+2}(K^n, \mathcal{O}_m) \approx B_u^{r+2}(\bar{K}^n, \mathcal{O}_m)$$

従ツテ任意ノ アーベル群ヲ 係数トシテモ isomorph
 auf デアル。

$P_i \pmod{1}$ デ reduzieren ; タ実数群トシテ之ニ
 関シテ $\pi^{r+1}(S^r)$ ノ Charakterengruppe ヲ $\pi^{r+1}(S^r)^*$
 ト表ス。

$$B_u^{r+2}(K^n, \pi^{r+1}(S^r)^*) \approx B_u^{r+2}(\bar{K}^n, \pi^{r+1}(S^r)^*)$$

従ツテ又 0-Betti 群 = 関シテモ

$$B_0^{r+2}(K^n, \pi^{r+1}(S^r)) \approx B_0^{r+2}(\bar{K}^n, \pi^{r+1}(S^r))$$

今 $\bar{K}^n \xrightarrow{f} K^n$ ヲ simpliciale Abbildung
 トシ $\bar{K}^n$ ノ 中ヲ 見テ、 n 次元 Simplex カラ 成ル
 Teilkomplex ヲ $\bar{K}^n$ ($\bar{K}^n$ トハ異ル) トスレバ

$$\varphi(\bar{K}^n) \subset K^n$$

$f: K^n \rightarrow S^r$ が normal トラバ

$f\varphi: \bar{K}^n \rightarrow S^r$ は又 normal トナル。従って又

$\bar{K}^n = \tau(r+2)$ 次元 0-Zyklus (Hindernis)

$\bar{f}^{n+2}$ が生ズル。

此、 $\bar{f}^{n+2}$ は Simpliciale Abbildung $\varphi: \bar{K}^{r+2} \rightarrow K^{r+2} = \text{ヨツテ}, K^{r+2}$ 0-Zyklus $f^{n+2} =$ 對應シタモノデアル。

$$\varphi: f^{n+2} \rightarrow \bar{f}^{n+2}$$

然ル $\bar{K}^n$, oberer Zyklus (Hindernis)

$\bar{f}^{n+2} \sim 0$ デアル。 $\bar{K}^n$, Zyklus 凡テ Sphäre デアルカラ。

従って $\varphi = \text{ヨル}$ 0-Betti 群, 對應が isomorph デアルタ。

$$B_0^{n+2}(K^n, \pi^{r+1}(S^r)) \cong B_0^{n+2}(\bar{K}^n, \pi^{r+1}(S^r)).$$

$$\text{故} = \bar{f}^{n+2} \sim 0 \quad \text{トラ} \quad f^{n+2} \sim 0$$

即チ $K^n, K^r \xrightarrow{f} S^r$ が normal Abbildung トラバ Hindernis $f^{n+2} \sim 0$.

f, K^{r+1} 迄, Erweiterung ヲ適當 = トレバ

$$f^{n+2} \equiv 0$$

従って f は K^{n+2} 迄 Erweiterung 出来ル。

以上

此、定理ノ特別ノ場合, 例ハバ K^n ヲ Poincaré / 集合体, 或ハモルシ一様 = シテ S^n ト等シイ Homotopie-

tyzus を持つ Komplex トスレバ矢張り成立スル。

定理。 球面 S^n ト等しい Idomotopietyzus を持つ Komplex K^n 、 r 次元 Teilkomplex K^r トスレバ任意、normale Abbildung $f = K^r \rightarrow S^r$ ハ K^n 全体 = Erweiterung 出来ル。