



Title	Markoff 過程ニ関スル二三ノ結果, II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 187, p. 467-481
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74741
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

810. Markoff 過程 = 関スル二三ノ 結果, II

角 谷 静 夫 (阪大)

前回 = テハ Ω ノ *ergodic kernel* (*ergodic part*) 及び *dissipative part* = ヲケ得ルコトヲ証明シタ。今回ハ各々ノ *ergodic kernel* (*ergodic part*) ヲ更ニ分割スルコトヲ考ヘル。勿論條件 (K) ハ常ニ假定スルモノトスル。

以下ノ議論 = 於テハ、條件 (K) ノ下デ Γ ノ絶対値 1 ノ固有値 λ ガスベテ $\lambda^N = 1$ ナル方程式ヲ満足スルトイフ事實ガ *essential* ノ役割ヲ演ジル。コノコトハ既ニ前号ノ談話 807 = テ証明シタカラ以下証明ナシニ用ヒルコト = スル。

條件 (K) ノ下デ Γ ノ絶対値 1 ノ固有値 λ ハ有限個シカタク、コレヲハスベテ $\lambda^N = 1$ ヲ満足スルカラ (N ハスベテ 1 λ = 共通) 前号ノ定理 1 ノ分解式 (10) = 於テ $n = N$ トオケベ

$$P^{(N)}(t, E) = \sum_{i=1}^k P_{\lambda_i}(t, E) + S^{(N)}(t, E)$$

$$\text{トナル。} \quad \text{ヨツテ} \quad \sum_{i=1}^k P_{\lambda_i}(t, E) = P_1^*(t, E)$$

トオケベ

$$(35) \quad P^{(N)}(t, E) = P_1^*(t, E) + S^{(N)}(t, E)$$

$$\begin{aligned}
 (36) \quad \int_{\Omega} P^{(N)}(t, ds) P_1^*(s, E) &= \int_{\Omega} P_1^*(t, ds) P^{(N)}(s, E) \\
 &= \int_{\Omega} P_1^*(t, ds) P_1^*(s, E) = P_1^*(t, E)
 \end{aligned}$$

$$(37) \quad \int_{\Omega} P_1^*(t, ds) S(s, E) = \int_{\Omega} S(t, ds) P_1^*(s, E) = 0$$

トナル。ヨツテ (35) ノ両辺ヲ *iterate* スルコトニヨリ

$$\begin{aligned}
 (38) \quad P^{(nN)}(t, E) &= P_1^*(t, E) + S^{(nN)}(t, E), \\
 n &= 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

トナリ、且ツ

$$(39) \quad \text{l.u.b.}_{t \in \Omega, E \subset \Omega} \left| S^{(nN)}(t, E) \right| \leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^{nN}}, \quad n=1, 2, \dots$$

又ハ

$$\begin{aligned}
 (40) \quad \text{l.u.b.}_{t \in \Omega, E \subset \Omega} \left| P^{(nN)}(t, E) - P_1^*(t, E) \right| &\leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^{nN}}, \\
 n &= 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

ナル如キ常数 $M, \varepsilon > 0$ が存在スル。

次ニ我々ハ kernel $P_1^*(t, E)$ ヲ考ヘル。然レトキハ我々が前回ニ行ツタノト全ク同ジ議論ニヨツテ次ノ Lemma が成立スル。

Lemma 5 条件 (K) ノ下ガ Γ ノ絶対値 1 ノ固有値 λ ハスベテ $\lambda^N = 1$ ヲ満足スル (N ハスベテ λ = 共通)。

シカレトキハ、コノ N = 対シテ $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(nN)}(t, E) = P_1^*(t, E)$

ハ *uniformly* = 存在 $\epsilon > 0$ 且 $\forall P_i^*(t, E)$ ハ 次ノ形 = 分解
サレル:

$$(41) \quad P_i^*(t, E) = \sum_{i=1}^L y_i^*(t) x_i^*(E)$$

コノ $\{x_i^*(E)\} (i=1, 2, \dots, L)$ ハ (M) ノ *element* , *system* ナ

$$(42) \quad T^N(x_i^*) = x_i^*, \quad x_i^* \geq 0, \quad x_i^*(\Omega) = 1, \\ x_i^* \wedge x_j^* = 0 \quad (i \neq j)$$

ヲ満足シ, 且 $\forall$

$$(43) \quad T^N(x^*) = x^*, \quad x^* \geq 0, \quad x^*(\Omega) = 1$$

ヲ満足スル任意ノ $x^* \in (M)$ ハ

$$(44) \quad x^*(E) = \sum_{i=1}^L c_i^* x_i^*(E), \quad c_i^* \geq 0, \quad \sum_{i=1}^L c_i^* = 1$$

ナル形 = *unique* = 表ハサレル. 更ニ $\{y_i^*(t)\} (i=1, 2, \dots, L)$ ハ (M^*) ノ *element* , *system* ナ

$$(45) \quad \bar{T}^N(y_i^*) = y_i^*, \quad y_i^* \geq 0, \quad \sum_{i=1}^L y_i^*(t) = 1$$

ヲ満足シ, 且 $\forall$

$$(46) \quad \bar{T}^N(y^*) = y^* \quad (y^* \geq 0)$$

ヲ満足スル任意ノ $y^* \in (M^*)$ ハ

$$(47) \quad y^*(t) = \sum_{i=1}^L d_i^* y_i^*(t) \quad (d_i^* \geq 0)$$

ナル形 = *unique* = 表ハサレル.

次ニ、コノ $x_i^*(E)$, $y_i^*(t)$ ヲ使ッテ *ergodic*

kernel (ergodic part) を更に分断スルコトヲ考へル。

先ヅ $y_i^*(t) = 1$ となル如キ $t \in \Omega$ 全体ノ集合ヲ $\bar{E}_i^*$ ニテ表ハシ、コレヲ subergodic part ト名ヅケル。
明カニ $\bar{E}_i^*$ ハ何レモ Borel 集合ナリ且ツ互ニ共通点ヲモテナイ。且ツ前回ト全ク同様ニシテ (150) ノ式ノ右辺ハ前回ノ (30) ノ右辺ト異ナルコトニ注意)

$$(48) \quad x_i^*(\bar{E}_j^*) = 1 \quad (i=j), = 0 \quad (i \neq j)$$

$$(49) \quad P^{(N)}(t, \bar{E}_i^*) = 1, \quad t \in \bar{E}_i^*$$

$$(50) \quad \text{l.u.b.}_{t \in \bar{E}_i^*, E \subset \Omega} \left| P^{(N)}(t, E) - x_i^*(E) \right| \leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^N},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

($M, \varepsilon > 0$ ハ常数) トナルコトガワカル。シカシ我々ハ更ニ精密ニ、次ノ定理ヲ証明スルコトガ出来ル。

定理 5 $\bar{E}_1^*, \bar{E}_2^*, \dots, \bar{E}_L^*$ ノ全体ハ l 個ノ class = 分レル。(1. 定理 2 及ビ Lemma 3 = テ現ハレタト同ハ l ナル) コレヲ

$$C_\alpha \equiv (\bar{E}_{\alpha_1}^*, \bar{E}_{\alpha_2}^*, \dots, \bar{E}_{\alpha_{d_\alpha}}^*) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, l)$$

トセヨ。コノ d_α ハ N ノ函数ニテ $\sum_{\alpha=1}^l d_\alpha = L$ ナル。

且ツコレヲハ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{d_\alpha})$ ノ順序ヲ適當ニツケルベシ

$$(51) \quad P(t, \bar{E}_{\alpha_i}^*) = 1, \quad t \in \bar{E}_{\alpha_i}^*, \quad i = 1, 2, \dots, d_\alpha$$

$$(\alpha_{d_{\alpha}+1} = \alpha_1)$$

$$(52) \quad l. u. b. \quad \left| P^{(n d_{\alpha})}(t, E) - x_{\alpha_i}^*(E) \right| \leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^n}$$

$$t \in \bar{E}_{\alpha_i}^*, E \in \Omega$$

$$n = 1, 2, \dots$$

ヲ満足スル。更ニ、コノ class C_{α} ($\alpha = 1, 2, \dots, l$)
 ハ ergodic part $\bar{E}_{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, l$) ト一対一
 對應ヲナシ、對應スルモノヲ同ジ suffix = ヨツテ表ハセ
 バ $\bar{E}_{\alpha_i}^*$ ($i = 1, 2, \dots, d_{\alpha}$) ハトベテ $\bar{E}_{\alpha}$ = 含マレ
 ル。且ツ

$$(53) \quad T(x_{\alpha_i}^*) = x_{\alpha_{i+1}}^*, \quad i = 1, 2, \dots, d_{\alpha} \quad (\alpha_{d_{\alpha}+1} = \alpha_1)$$

$$(54) \quad \bar{T}(y_{\alpha_{i+1}}^*) = y_{\alpha_i}^*, \quad i = 1, 2, \dots, d_{\alpha} \quad (\alpha_{d_{\alpha}+1} = \alpha_1)$$

$$(55) \quad x_{\alpha}(E) = \frac{1}{d_{\alpha}} \sum_{i=1}^{d_{\alpha}} x_{\alpha_i}^*(E)$$

$$(56) \quad y_{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{d_{\alpha}} y_{\alpha_i}^*(t)$$

が成立スル。

証明 = ハイル前 = ニ、三ノ注意ヲ喚ヘル。先ヅ (51) ハ
 各々、 α = 對シテ $\bar{E}_{\alpha_1}^* + \bar{E}_{\alpha_2}^* + \dots + \bar{E}_{\alpha_{d_{\alpha}}}^*$ 内ノ点 t が
 $\bar{E}_{\alpha_1}^*, \bar{E}_{\alpha_2}^*, \dots, \bar{E}_{\alpha_{d_{\alpha}}}^*$ 内ヲ cyclically = 遷移サレル
 コトヲ意味スル。且ツ (52) ハ コレヲノ点 = 對シテ
 $P^{(d_{\alpha})}(t, E)$ ナル Markoff 過程ヲ考ヘレバ、 $\forall$ ノ
 n -th iterate $P^{(n d_{\alpha})}(t, E)$ が $n \rightarrow \infty$ ナルト
 キ = 一樣收斂 スルコトヲ意味シテキル。

各々、 $\bar{E}_{\alpha_i}^*$ は $\bar{E}_\alpha = \text{含マレテキルカラ } \bar{E}_{\alpha_1}^* + \bar{E}_{\alpha_2}^* + \dots + \bar{E}_{\alpha_{d_\alpha}}^*$ か $\bar{E}_\alpha$ の部分集合トナルコトハ明カデアルガ $\bar{E}_\alpha$ トハ必ずシモ一致シナイ。實際 $D_\alpha = \bar{E}_\alpha - \sum_{i=1}^{d_\alpha} \bar{E}_{\alpha_i}^*$ ノ作レバ D_α ハ $i=1, 2, \dots, d_\alpha = \text{對レテ } y_{\alpha_i}^*(t) < 1$ トナル如キ $t \in \bar{E}_\alpha$ 全体ノ集合デ、コレハ必ずシモ空集合トハナラナイノデアル。シカレ、以下ノ証明ヲ見レバワカル如ク、我々ハ (52) ノ証明シタノト全ク同ジ方法デ

$$(57) \quad \text{l.u.b.}_{t \in \bar{E}_\alpha, E \in \mathcal{S}_B} \left| P^{(n_{d_\alpha})}(t, E) - \sum_{i=1}^{d_\alpha} y_{\alpha_i}^*(t) x_{\alpha_i}^*(E) \right| \leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^n}, \quad n=1, 2, \dots$$

($M, \varepsilon > 0$ ハ常數) ノ証明スルコトガ出來ル。

定理5ノ証明 $T^N T(x_i^*) = T T^N(x_i^*) = T(x_i^*)$

トナルコトヨリ x_i^* ハ條件 (42) ノ満足スル、シタガッテ

$$(58) \quad T(x_i^*) = \sum_{j=1}^L c_{ij} x_j^*,$$

トル如キ $c_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^L c_{ij} = 1$ トル如キ常數 $\{c_{ij}\} (i, j = 1, 2, \dots, N)$ ガ存在スル。コレヨリ T ハ $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_L^*)$ ノ system として對スル linear transformation (又ハ finite case, Markoff process) ト考ヘルコトガ出來ル。シカル $T^N(x_i^*) = x_i^*, i=1, 2, \dots, N$ デアルカラ、コノ linear transformation ハ N 回繰返ヘレテ施セバ identical transformation

トナル。即ち matrix $C = (c_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, N$)
ヲ考ヘレバ、コレハ

$$(59) \quad C^N = \text{unit matrix}$$

ナル關係ヲ満足スル。我々ハ先ヅコノ matrix C ガオト
ノミヨリ 成ル matrix デ $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_L^*)$ ノ間
ノ permutation ヲ與ヘルモ (即チ各行及ビ各列ニハ
ノハ一ツ、且ツ唯一ツヲ殘リハ全部オトナル matrix) デア
ルコトヲ示サウ。

實際 $(c_{ij}^{(N-1)}) = \text{ヨツテ } C^{N-1}$, i, j -element
ヲ表ハセバ

$$\sum_{k=1}^L c_{ik}^{(N-1)} = 1, \quad \sum_{k=1}^L c_{ik}^{(N-1)} c_{ki} = 1$$

$i = 1, 2, \dots, L$ ヲ満足スル。然ルニ $0 \leq c_{ki} \leq 1$ ガ常
ニ成立スルノデアルカラ、コノ二ツガ同時ニ成立スルタメニ
ハ各ノ i ニ對シテ少クとも一ツノ c_{ki} (例ヘバ c_{ki})
ガ 1 ニヒトシテナケレバナラナイ。換言スレバ matrix
 $C = (c_{ij})$ ノ各 column ハ少くとも一ツノ 1 ヲモタネ

バナラヌ。然ルニ $\sum_{i=1}^L c_{ki} = 1$ デアルカラ $i \neq j$ ナルトキ
 $k_i \neq k_j$ デナケレバナラヌ。

シタガツト $(k_1, k_2, \dots, k_L)$ ハ $(1, 2, \dots, L)$
ノ一ツノ permutation トナリ、 $c_{k_i i} = 0$ for
 $k_i \neq i$ トナル。

此ノ如クシテ C ガ index $1, 2, \dots, L$ ノ間ノ per-

mutation ヲ與ヘルコトヲ知ツタ。ヨツテ $1, 2, \dots, L$
 ハ l' 個 ($l' \leq L$) , class K_α ($\alpha = 1, 2, \dots, l'$)
 = ワカレテ、ソノ各々が matrix $C = \text{ヨツテ cyclic}$
 = permute せれる。 ($l = l'$ トナルコトハマダワカ
 ラズ) K_α = 含マレル index ノ数ヲ d_α トスレバ (59)
 ヨリ d_α ハ N ノ約数デアル。更ニ class K_α = 属スル
 index ヲ適當ニラベテ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{d_\alpha}$ トスレバ
 $C_{\alpha_i \alpha_{i+1}} = 1$ スルハ $T(x_{\alpha_i}^*) = x_{\alpha_{i+1}}^*$ ($i = 1, 2, \dots, d_\alpha$;
 $\alpha_{d_\alpha+1} = \alpha_1$) トナル。

我々ハ $l = l'$ トナリ、且ツ class K_α ト ergo-
 dic part K_α トノ間ニ one-to-one corres-
 pondence ガツクコトヲ証明シヨウ。

先ヅ前回ノ Lemma 3, (20) ヨリ各々、 x_α
 ガ $T(x_\alpha) = x_\alpha$ ヲ満足スルコトカラ $T^N(x_\alpha) = x_\alpha$ ガ
 成立スル。且ツ $x_\alpha \geq 0$, $x_\alpha(\Omega) = 1$ ハ勿論成立スルカ
 ラ x_α ハ (43) ヲ満足シ、レタガツテ Lemma 5 =
 ヨリ

$$x_\alpha(E) = \sum_{i=1}^L c_i^* x_i^*(E)$$

ト表ハスコトガ出來ル。今 $\sum_{i=1}^L$ ヲ各々、class K_α = 於
 ケル和 = 分ケルト

$$(60) \quad x_\alpha(E) = \sum_{\alpha=1}^{l'} \sum_{i=1}^{d_\alpha} c_{\alpha_i}^* x_{\alpha_i}^*(E)$$

トナル。コノトキ、アル class K_α ガ底マツテ $\alpha_i \in K_\alpha$

ナルトキ $C_{\alpha_i}^* = \frac{1}{\alpha_i}$, $\alpha_i \in K_\alpha$ ナルトキ $C_{\alpha_i}^* = 0$ トナ
 ルコトヲ示サユ。先ツ $C_{\alpha_i}^*$ ハ各 α_i ノ $K_\alpha =$ 於テ $i =$ 無関係
 デアル。 何トナレバ (60) ノ 両辺 $= \Gamma$ ヲ施セバ $\Gamma(x_\alpha) = x_\alpha$
 ナルコトヨリ

$$x_\alpha(E) = \sum_{\alpha=1}^{l'} \sum_{i=1}^{\alpha_i} C_{\alpha_i}^* x_{\alpha_{i+1}}^*(E)$$

トナリ、(60) ノ 表現ガ *unique* ナルコトヨリ $C_{\alpha_{i+1}} =$
 C_{α_i} ($i = 1, 2, \dots, \alpha_i$) ($\alpha_{\alpha_{i+1}} = \alpha_i$) ヲ得ルカラデ
 アル。

$\alpha_i = C_{\alpha_i}^* > 0$ トナル如キ α_i ハスベテ同じ class =
属スル。 何トナレバ、モシカナル class ガウクトニツ存
 在スレバ x_α ナニツノ 部分 = ヲケテ

$$x_\alpha = x'_\alpha + x''_\alpha, \quad x'_\alpha \geq 0, \quad x''_\alpha \geq 0, \quad x'_\alpha \wedge x''_\alpha = 0,$$

$$\Gamma(x'_\alpha) = x'_\alpha, \quad \Gamma(x''_\alpha) = x''_\alpha$$

トナル如クスルコトが出来ル。

ヨツテ今 $x_{\alpha_1} = x'_\alpha / \|x'_\alpha\|$, $x_{\alpha_2} = x''_\alpha / \|x''_\alpha\|$ トオケ
 バ ($l+1$) 個ノ element $x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha_1},$
 $x_{\alpha_2}, x_{\alpha+1}, \dots, x_l$ ハ (20) ヲ満足スル。コレハ l ガ
 カナル element ノ カズノ maximum デアルトイフ
 定義ニ矛盾スル。ヨツテ $C_{\alpha_i}^* > 0$ ナル如キ α_i ハスベテ
 同じ class = ヲケスル。コノ class ヲ K_α トセヨ。

此ノ如クシテ (60) ガ

$$x_\alpha(E) = C_\alpha \sum_{i=1}^{\alpha_i} x_{\alpha_i}^*(E)$$

ト云フ時 = 表ハサレルコトヲカウカッタ。コト = C_α ハ $i =$
無関係ノ定数デアル。然ルニ $x_\alpha(\Omega) = 1$, $x_{\alpha_i}^*(\Omega) = 1$
($i = 1, 2, \dots, d_\alpha$) デアルカラ $C_\alpha = \frac{1}{d_\alpha}$ デナレバ
ナラナイ。即チ (55) が証明サレタ。

以上ノ如クシテ、各々ノ $x_\alpha(E)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, l$) =
對シテ class K_α が定マツテコレ = 對シテ (55) が成立ス
ルコトガワカッタ。(ヨツテ $l \leq l'$ トナルコトモワカッ
タ。)

$$\text{逆} = \text{任意ノ class } K_\alpha = \text{對シテ } x(E) = \frac{1}{d_\alpha} \sum_{i=1}^{d_\alpha} x_{\alpha_i}^*(E)$$

トオケル $x(E)$ ハ Lemma 3 ノ條件 (2)

$$(Tx = x, x \geq 0, x(\Omega) = 1)$$

ヨツテ

$$x(E) \equiv \frac{1}{d_\alpha} \sum_{i=1}^{d_\alpha} x_{\alpha_i}^*(E) = \sum_{\beta=1}^l c_\beta x_\beta(E)$$

ナル如キ c_β ($\beta = 1, 2, \dots, l$) が存在スル。コノ式 =
更ニ既ニ証明シタ關係 (55) ヲ使ヘバ

$$\frac{1}{d_\alpha} \sum_{i=1}^{d_\alpha} x_{\alpha_i}^*(E) = \sum_{\beta=1}^l \frac{c_\beta}{d_\beta} \sum_{i=1}^{d_\beta} x_{\beta_i}^*(E)$$

トナル。然ルニ $x_{\alpha_i}^*(E)$ ハ linearly independent
デアアルカラ、コレが成立スルタメニ $C_\alpha = 1$, $C_\beta = 0$ ($\beta \neq \alpha$)
デナレバナラナイ。即チ任意ノ class K_α = 對シテ

$$x(E) = \frac{1}{d_\alpha} \sum_{i=1}^{d_\alpha} x_{\alpha_i}^*(E) \text{ ヲ作ルトコレハ Lemma 3}$$

決定ラレタ system $\{x_\alpha(E)\} (\alpha=1, 2, \dots, l)$
 ノウチ ノーツトナツテキル。(ヨツテ $l' \leq l$ ノ得ル)。

以上ノコトヨリ $l = l' = \tau$ 且ツ Lemma 3 = 於ケ
 ル system $\{x_\alpha(E)\} (\alpha=1, 2, \dots, l)$ ト
 class $K_\alpha (\alpha=1, 2, \dots, l)$ トノ間 = 一対一 對應ガ
 ツキ

$$x_\alpha(E) = \frac{1}{d_\alpha} \sum_{i=1}^{d_\alpha} x_{\alpha_i}^*(E)$$

トナルコトガワカッタ。コレハ又 ergodic part
 (kernel) ト class K_α トノ間ノ對應トモ考ヘラレ
 ル。

サテ、我々ノ目的ハ定理 5 ノ証明デアルガ、コノ少ク既
 = (53), (55) ノ証明サレタ。ヨツテ後 = 残ルハ (51), (52),
 (54), (56) ノ証明デアイル。

先ツ (56) ノ証明スル。コノタメ = 關係

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \int_{\Omega} P_1^*(t, ds) P^{(m)}(s, E) = P_1(t, E)$$

ヨリ 出ルスル。前号定理 2 ノ關係 (23) 及ビ (41) ノ使ヘ
 バ、コレハ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=1}^{d_\alpha} y_{\alpha_i}^*(t) \left(\int x_{\alpha_i}^*(ds) P^{(m)}(s, E) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^l y_\alpha(t) x_\alpha(E) \end{aligned}$$

トナリ、(53) ノ使ヘバ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=1}^{d_{\alpha}} y_{\alpha i}^*(t) x_{\alpha i+m}^*(E) \\ &= \sum_{\alpha=1}^l y_{\alpha}(t) x_{\alpha}(E) \end{aligned}$$

トナル。更 = d_{α} が N の約数ナルコトヲ使へバ、コレハ

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^l \left(\sum_{i=1}^{d_{\alpha}} y_{\alpha i}^*(t) \right) \left(\frac{1}{d_{\alpha}} \sum_{i=1}^{d_{\alpha}} x_{\alpha i}^*(E) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^l y_{\alpha}(t) x_{\alpha}(E) \end{aligned}$$

トナル、ヨリテ (53) ヨリ

$$\sum_{\alpha=1}^l \left(\sum_{i=1}^{d_{\alpha}} y_{\alpha i}^*(t) \right) x_{\alpha}(E) = \sum_{\alpha=1}^l y_{\alpha}(t) x_{\alpha}(E)$$

コレヨリ、 $E = E_{\alpha}$ トオケバ (56) が得ラレル。

又 = (54) ヲ証明スルタメ = *trivial relation*

$$\int_{\Omega} P(t, ds) P_i^*(s, E) = \int_{\Omega} P_i^*(t, ds) P(s, E)$$

ヨリ出スル (4) 及び (53) ヨリ、コレハ

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=1}^{d_{\alpha}} \left(\int_{\Omega} P(t, ds) y_{\alpha i}^*(s) \right) x_{\alpha i}^*(E) \\ &= \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=1}^{d_{\alpha}} y_{\alpha i}^*(t) \left(\int_{\Omega} x_{\alpha i}^*(ds) P(s, E) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=1}^{d_{\alpha}} y_{\alpha i}^*(t) x_{\alpha i+1}^*(E) \end{aligned}$$

トナリ、 $E = \bar{E}_{\alpha}^*$ トオケバ (54) ヲ得ル。

(51) ハ (54) より 直チ = 得ラレルカラ、後 = 残ッタ

(52) ヲ 証明スレバ 定理ノ 証明ハ 完結スル ($\overline{E}_{\alpha_i}^*$ が $\overline{E}_\alpha$ = 含マレルコトハ (56) より 明カデアロシ)

最後 = (52) ヲ 証明スル。コノ タメニハ 任意ノ integer n, k = 對シテ

$$\begin{aligned} P^{(nN+Rd_\alpha)}(t, E) &= \int_{\Omega} P^{(nN)}(t, dS) P^{(Rd_\alpha)}(S, E) \\ &= \int_{\Omega} P^*(t, dS) P^{(Rd_\alpha)}(S, E) + \int_{\Omega} S^{(nN)}(t, dS) P^{(Rd_\alpha)}(S, E) \end{aligned}$$

トナルコトヨリ 出発スル。 $t \in \overline{E}_{\alpha_i}^*$ + ルトキハ 右辺 第一項ハ

$$\int_{\Omega} P^*(t, S) P^{(Rd_\alpha)}(S, E) = \int_{\Omega} \chi_{\alpha_i}^*(dS) P^{(Rd_\alpha)}(S, E) = \chi_{\alpha_i}^*(E)$$

トナリ 右辺 第二項ハ 任意ノ $t \in \Omega, E \in \Omega$ = 對シテ

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} S^{(nN)}(t, dS) P^{(Rd_\alpha)}(S, E) \right| \\ &\leq \sup_{t \in \Omega, E \in \Omega} \left| S^{(nN)}(t, E) \right| \leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^{nN}} \end{aligned}$$

トナル。ヨツテ $t \in \overline{E}_{\alpha_i}^*$ + ルトキ

$$\left| P^{(nN+Rd_\alpha)}(t, E) - \chi_{\alpha_i}^*(E) \right| \leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^{nN}}$$

右辺ハ k = 無関係ナル故。コレヨリ $R = 1, 2, \dots, \frac{N}{d_\alpha}$ トオクコトニヨリ (M, ε ヲ適當ニカヘレバ) (52) が成立スルコトガワカル。

以上ヲ定理5ノ証明カ終ル。

更ニ定理4ト全ク同じヨリニテ各 i ノ $E_{\alpha_i}^*$ ノ中
= *ergodic kernel* $E_{\alpha_i}^*$ ヲトッテコレ
ガ

$$(61) \quad P(t, E_{\alpha_{i+1}}^*) = 1, \quad t \in E_{\alpha_i}^*$$

ヲ満足スルヤウニスレコトが出来ルコトガワカル。

コレヲノ $E_{\alpha_i}^*$ ハ何レモ *measure zero* ノ集合
ヲ除イテ定マルノアールガ。適当ニコレヲ定ムレバ、更ニ

$$(62) \quad E_{\alpha} = \sum_{i=1}^{\alpha} E_{\alpha_i}^*, \quad E_{\alpha_i}^* = E_{\beta} \cdot E_{\alpha_i}^*$$

ガ成立スルヤウニナシ得ルコトガワカル。 E_{α} 及び $E_{\alpha_i}^*$ ガ
Doebelin ノ定義シタ *ensemble final* 及びソノ
sousensemble cyclique デアル。

最後ニ定理4ノ後ノ注意ヲ約束シタ定理ヲ証明シ
ヨ。

$$\boxed{\text{定理6}} \quad \text{l. u. b.}_{t \in \Omega} P^{(n)}(t, \Delta) \leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^n},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

ナル常数 $M, \varepsilon > 0$ ガ存在スル。

証明。 (40)ニ於テ $E = \Delta$ トオケバ

$$P_1^*(t, \Delta) = \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=1}^{\alpha} y_{\alpha_i}^*(t) x_{\alpha_i}^*(\Delta) \equiv 0$$

ナルコトヨリ

$$\text{l.u.b.}_{t \in \Omega} P^{(nN)}(t, \Delta) \leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^{nN}}, n=1, 2, \dots$$

トナル。然ル $P^{(n)}(t, \Delta)$ ハ n ニ對シテ *monotone decreasing* デアルカラ、(コレハ一度 Δ ヨリ外へ出タ息ハ決シテ Δ = カヘラ + イコトヨリワカル) M, ε ヲ適當ニカヘレバ

$$\text{l.u.b.}_{t \in \Omega} P^{(n)}(t, \Delta) \leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^n}, n=1, 2, \dots$$

トナル。