OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Markoff Chain ノ一ツノ抽象化
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 187, p. 481-490
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74742
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

811. Markoff Chain ノ一ツノ抽象化

吉田　耕作（阪大）

§1. 前置キ

$\Omega=(0,1)$ ノ点 x ガ単位時間後ニ Ω ノ Borel 集合 E ニ入ル遷移確率ガ $P(x,E)$ デ与ヘラレル如キ Markoff chain ヲ考ヘル. $P(x,E)$ ハ x ヲ固定スレバ Borel 集合 E ニ関シ complete additive, 又 E ヲ固定スレバ x ニ関シ Borel measurable トスル。定義カラ

(1) $P(x, E) \geq 0$ 且ツ $P(x, \Omega) \equiv 1$

今 Ω ノ Borel 集合デ complete additive ナ set function $f(E)$ 全体ノ作ル Banach 空間 $(\mathfrak{M})$[1] ヲ考ヘルト $P(x, E)$ ニヨリ $(\mathfrak{M})$ ノ $(\mathfrak{M})$ 内ヘノ norm 1 ノ positive operation P ガ定義サレル。

$$P \cdot f = g, \quad g(E) = \int_{\Omega} f(dx) P(x, E)$$

Markoff chain $P(x, E)$ ノ問題ヲ P ノ iteration P^n, $n \to \infty$ ニ於ケル asymptotic behaviour ニ結ビツケテ論ズルコトハ本紙上ニ屢次談話セラレタ（角谷氏並ビニ筆者）[2]。ソノ結果ニヨレバ J. Hadamard, M. Fréchet, J. L. Doob, W. Doeblin, Kryloff-Bogoliouboff 等ノ結果ガ次ノ假定ノモトニヨリ precise ニ統一的ニ取扱ヘルノデアル。

(2) { 整數 m ト完全連續ナ線型作用素（$(\mathfrak{M})$ ヲ $(\mathfrak{M})$ 内ニ寫ス）V ガ存在シテ $\| P^m - V \| < 1$

以前ノ談話ヲ反省シテミルト，假定 (1), (2) カラ出テクル次ノ三ツノ事實ノ才能デ話ガススムノデアル。即チ

---

(1) $\text{norm} \| f \| = \underset{E \in \Omega}{\text{total variation}} | f(E) |$

(2) 筆者談話 746, 780, 角谷氏談話 804, 807

I. Uniform ergodic theorem. Banach 空間ノ線型作用素 P が $\|P^n\| \leqq$ 常数 $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 及ビ (2) ヲ満足スルナラバ

$$(3)\begin{cases} P=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P_i+S, \quad PP_i=P_iP=\lambda_iP_i \\ P_i^2=P_i,\ P_iP_j=0 \quad (i\neq j),\ P_iS=SP_i=0 \text{ 且} \\ \|S^n\| \leqq \dfrac{\delta}{(1+\varepsilon)^n} \quad (n=1,2,\cdots\cdots) \end{cases}$$

ナル如キ完全連続線型作用素 P_i ト連続ナ線型作用素 S トガ存在スル。コヽニ λ_i ハ丁ノ絶対値 1 ノ固有値

コヽニ注意スベキハ Banach 空間ハ任意デヨイコトト即チ $(\mathfrak{M})$ デアル必要ナイコト，又 P モ kernel $P(x,E)$ デ定義サレタモノデアルコトモ positive operation デアルコトモ必要ナイコトデアル。

II. P ガ上ノ $P(x,E)$ デ定義サレタ（Markoff chain ノ場合）トキ，1 ガ P ノ固有値ニナル。コノトキ $\lambda_1=1$ トヲクト (3) ニ於ケル P_1 ハ

$$P_1(x,E)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}P^{(m)}(x,E) \quad (1)$$

ナル kernel デ定義サレル。コノ $P_1(x,E)$ ハ

$$(4)\begin{cases} P_1(x,E)=\sum_{i=1}^{l}c_i(x)\,f_i(E),\ P\cdot f_i=f_i,\ f_i(E)\geqq 0, \end{cases}$$

$c_i(x) \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{l} c_i(x) \equiv 1$, 且ツ互= disjoint ナ E_i ガ存在シテ $f_i(E_i) = 1$, $(i = 1, 2, \cdots\cdots, l)$

但シ $f_i \in (m)$ 且ツ $c_i(x)$ ハ bounded Borel measurable.

Ⅲ. 同ジク Markoff chain ノ場合= P ノ絶対値 1 ノ固有値 λ_i ハ全テ 1 ノ root = ナル。

談話ノ80 = 於テハⅢノ証明= Ⅱヲ essential = 使ッテヲル。所ガ前号談話807 = 於テ, 角谷氏ガⅢハ P ガ semi-ordered Banach space ノ positive operation トイフ仮定ノモト= Ⅰカラ導カレルコトヲ示サレタ。誠= 鮮ナ証明デアッタ!!.

§2. 本談話デノ結果

斯クシテクルト談話807 = 角谷氏ノ指摘サレタ如ク Markoff chain ヲ semi-ordered Banach space デ, (2) ヲ満足スルトイフ仮定ノ下=, norm 1 ノ positive operation トシテ相当程度迄抽象的= 取扱フコトガ出来ル訳デアリマセウ。実際ソレハ以前ノ談話ノ

---

(1) x, E = 関スル一様収斂ノ limit.

$P^{(n)}(x, E) = \int P^{(n-1)}(x, dy) P(y, E)$, $P^{(1)}(x, E) = P(x, E)$

所論ヲ挨べテミルトワカリマス。然シ II ガナイト精密ナ結果ヲ出セナイコトモ承知メマセン。positive operation ト云フコトカラ或ル程度迄 II ニ類似ノコトハ出セルノデスガ，抽象的ニ扱フ以上仕方ガナイノデアリマセウ。

所がモ一度ヨク考ヘテミルト，semi-ordered Banach space ト云フテモ吾々ハ頭ニ（$\mathfrak{M}$）又ハ（L）ヲ描キツツ考ヘテヲル訳デアリマス。ソシテ之モ角谷氏ノ得テレタ良キ結果[1]デアリマスガ

> 吾々ノ取扱フ semi-ordered Banach space = separable ト云フ假定ヲ入レレナラベコノ Banach space ハ（L）ノ closed linear subspace ト考ヘテヨイ。

ノデアリマシタ。從ツテ抽象化ト云フモノノ separability ヲ假定スル限リ（L）デ議論スレベヨイ。

> 所が（L）デマルナラベ P_1 ハ measurable + kernel $P_1(x,y)$ デ定義サレルコトガ証明サレル。
>
> $$P_1 \cdot f = g,\ (f, g \in (L)),\quad g(y) = \int_0^1 f(x)\, P_1(x,y)\, dx$$

所が P ガ norm ノ positive operation ト云フコトカラ I ヲ用ヒ $p(x,y) \geqq 0$，$\int_0^1 p_1(x,y) = 1$ ガ云ヘル訳デス。又 P_1 ガ $PP_1 = P_1P = P^2 = P_1$ ヲ満足スルコト

(1) 帝國學士院記事 5号（1939）

カラ，$(\mathfrak{M}_k)$ ノトキト全ク同様ニシ

$$\text{II}'.\quad \begin{cases} p_1(x,y)=\sum_{i=1}^{l} c_i(x) f_i(y),\ P\cdot f_i=f_i,\ f_i(y)\geqq 0, \\ c_i(x)\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{l} c_i(x)\equiv 1,\ \text{且}\ f_i(y)\cdot f_j(y)\equiv 0\ (i\neq j), \\ \int_0^1 f_i(y)\,dy=1 \quad (i=1,2,\cdots\cdots,l) \end{cases}$$

ナル完全ニ II ニ對應シタコトガ云ヘマス。

從ツテ（ニ）デ (2) ヲ滿足スル norm 1 ノ positive operation ニツイテハ，以前 $(\mathfrak{M}_k)$ デ (ニ) ヲ滿足スル Markoff chain ニツイテ得ラレタコトガ殆ンドソノマヽ <u>übertragen</u> サレマス。

但シ transition probability density $p(x,y)$ ハ與ヘラレナイノデスカラ、得ラレル結果ハ

> $\Omega=(0,1)$ ノ Borel 集合 σ ヲ任意ニトッタトキ之ガ時間ト共ニドノ様ニ變移シテユクカ？

トイフ議論ニナル訳デス。具体的ナ Markoff chain デハ σ ガ一点 x ニトレル所ガ都合ガヨイ訳デスガ，probabilistic ニハ上ガ essential ニ？充分デアリマセヌ。

兎ニ角，Banach 空間ニ separability ヲ假定スレバ，<u>(2) ヲ假定スル限リ</u>，マヅマヅ Markoff chain

ヲ抽象化シテモ essential ニハ新シイ結果ガ得ラレナイ。ト云フヨリハ寧ロ以前ノ結果ガ，完全連続性ヲ武器トスル（(2) ヲ假定スル）限リニ於テ、先ヅ々々 transtion process ニ関シテ best ナモノデアッタト云ヘ様ト思ヒマス。即チ Markoff chain ニ於テ (2) ヲ導入シタ Kryloff - Bogolioubolff ノ綱眼ハ称ヘラレテヨイ訳デス。(1)

§3. (5) ノ証明

大分ダラダラ永カッタデスカラ証明ノ大ヂ道ダケ述ベマス。N. Dunford (Integration and linear operations, Trans. Amer. Math. Soc. 40, 3 (1936), p. 483) ノ結果ヲ用ヒルノデス。

> Dunford ノ定理. (L) ノ (L) ヘノ連続ナ線型作用素 P_1 ニ對シテ次ノ如キ (x, y) ニ関シテ measurable ナ函数 $K_n(x, y)$ ノ系列ガ実ル。
>
> i) x ヲ fix スルト $K_n(x, y)$ ハ全テ y ニ関シテ integrable.

(1) K-B ノ comptе Rendus ノ論文カラハ綱眼ト云フヨリハ glücklich ダッタトモ感ゼラレマス。何故カト云フトK-B ハ(2) ノ intrinsic ナ意味付（例ヘバ談話169 ニ Doeblin ノ假定カラ (2) ノ出ルコトヲ吾々ハ示シタガ）ヲ全然採ヘラレナイノデスカラ。

ii) 線型写像 $K_n \cdot f = g$, $g(y) = \int_0^1 f(x) K_n(x, y)\, dx$

は (L) を (L) の n 次元の linear subspace に写す。

iii) 任意の $f \in (L)$ に対し

(b) $P_1 \cdot f = \underset{n \to \infty}{\text{strong limit}} \int_0^1 f(x) K_n(x, y)\, dx$

之レカラ (5) ヲ導クニハ，P_1 ガ I ニヨリ完全連続ナ projection operator ($P_1^2 = P_1$) ダカラ，F. Riesz ノ定理[1] ニヨリ，P_1 ガ (L) ヲ (L) ノ有限次元ノ linear subspace ニ写ス写像ナルコトニ注意スレバヨイ。即チコノ事実ト ii) トヲ用ヒレバ (b) ノ収斂が $\|f\| \leqq 1$ ニ於イテ一様ナコトガワカル。コレヨリ (5) ヲ導クコトハワケハナイ。

—— 以上 ——

(注意) 実ハ 3, 4 号前ノ Bull. Am. Math. Soc. ニ J. Pettis ガ (L) ヲ (L) ヘシッス完全連続線型写像ハ可測ナ kernel ニヨッテ定義サレルコトヲ証明ナシニ announce シテヲリマス。アレヲ見タトキニ角谷君ト証明ヲ考ヘテ Dunford ノ定理カラコノ様ニシテ得ラレルト話シ合ッタコトガアリマシタ。アノトキニハ Markoff chain トノ関係ニ気付カナカッタ次第デシタ。今ノ場合ハ特別ノ場合デスカラ簡易イ訳デス。

---

(1) locally compact ナ Banach space ハ有限次元ガアルト云フ定理.

序イデナガラ dunford ノ定理ノ証明ノ方針ダケ述ベテ置キマセウ。

方針 -(L)ニハ base ガアル。即チ (L)ニ属スル系列 $\{f_i\}$ヲ適當ニトレバ任意ノ $f\in(L)$ハ

$$f=\underset{n\to\infty}{\text{strong limit}}\sum_{i=1}^{n}c_i f_i \qquad (c_i\text{常数})$$

ト unique ニ表ハサレル。コノ base トシテ有名ナ **haar ノ直交函数系** ヲトレルコトハ知ラレテヲル[1]。c_iハ明ニ(L)ノ上デノ連続ナ汎函数デアリマス：$c_i=F_i(f)$.

ソコデ $T\cdot f=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(f)f_i$, $a_i(f)=F_i(T\cdot f)$. $a_i(f)$モ亦(L)ノ上デノ連続ナ汎函数デアリマスカラ良ク知ラレタ F. Riesz ノ定理ニヨリ

$$a_i(f)=\int_0^1\alpha_i(x)f(x)\,dx, \qquad \alpha_i\in(M).$$

ヨッテ $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)f_i=S_n(x)$（各 x ニ對シテ yノ函数$\in(L)$）トヲケバ

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(f)f_i=\int_0^1 S_n(x)f(x)\,dx$$

コノ右辺が $\int_0^1 K_n(x,y)f(x)\,dx$ トmeasurable kernel

---

(1) 例ヘバ Kaczmarz-Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen.

$K_{\infty}(x,y)$ デ書ケルト云フ所が Dunford ノ証明ニ於テ delicate ナ所ナノデス。之レハ Dunford ヲミテ頂クコトニシマス。