



Title	Markoff Chain ノーツノ抽象化
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 187, p. 481-490
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74742
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

811. Markoff Chain ノーツノ抽象化

吉田 耕作 (阪大)

§ 1. 前置キ

$\Omega = (0, 1)$ ノ点 x が単位時間後ニ Ω ノ Borel 集合 E ニ入ル遷移確率ガ $P(x, E)$ ガ映ヘラレル如キ Markoff chain ヲ考ヘル. $P(x, E)$ ハ x ヲ固定スレバ Borel 集合 E ニ関シ complete additive, 又 E ヲ固定スレバ x ニ関シ Borel measurable トスル. 定義カラ

$$(1) \quad P(x, E) \geq 0 \quad \text{且ツ} \quad P(x, \Omega) \equiv 1$$

今 Ω / Borel 集合ヲ complete additive
+ set function $f(E)$ 全体 / 作ル Banach 空間
($\mathcal{M}$)⁽¹⁾ ヲ考ヘルト $P(x, E) \equiv \exists$ ($\mathcal{M}$) / ($\mathcal{M}$) 内ヘノ
norm 1 / positive operation P が定義サ
レイル。

$$P \cdot f = g, \quad g(E) = \int_{\Omega} f(dx) P(x, E)$$

Markoff chain $P(x, E)$ / 問題ヲ P / ite-
ration P^n / $n \rightarrow \infty$ = 於ケル asymptotic be-
haviour = 結ビツケテ論ルコトハ本紙上= 屢次談
話セラレタ (角谷氏並ビ= 筆者)⁽²⁾。ソノ結果 = ヨレバ
J. Hadamard, M. Fréchet, J. L. Doob, W.
Doebelin, Kryloff-Bogolissaboff 等ノ結果
が次ノ假定ノモト= ヨリ precise = 統一的= 取扱ヘル
ノデアイル。

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{整数 } m \text{ ト完全連続 + 線型作用素 } (\mathcal{M}) \text{ ヲ } (\mathcal{M}) \\ \text{内ニ寫ス) } \nabla \text{ が存在シテ } \|P^m - \nabla\| < 1 \end{array} \right.$$

以前ノ談話ヲ反省シテミルト、假定(1)、(2) カラ 出テ
ケル 次ノ ミツノ 事實ノ 才 蔭ヲ 話カスルノデアイル。即チ

(1) $\text{norm } \|f\| = \text{total variation } |f(E)|$
 $E \in \Omega$

(2) 筆者談話 746, 780, 角谷氏談話 804, 807

I. Uniform ergodic theorem. Banach
空間ノ線型作用素 P が $\|P^n\| \leq \text{常数}$ ($n=1, 2, \dots$)
及ビ (2)ヲ満足スルナラバ

$$(3) \begin{cases} P = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i + S, & PP_i = P_i P = \lambda_i P_i \\ P_i^2 = P_i, & P_i P_j = 0 \quad (i \neq j), \quad P_i S = S P_i = 0 \text{ 且} \\ \|S^n\| \leq \frac{\delta}{(1+\varepsilon)^n} & (n=1, 2, \dots) \end{cases}$$

ナル如キ完全連続線型作用素 P_i ト連続ノ線型作用素
 S トが存在スル。コノ $\lambda_i = \lambda_i$ ハ P_i ノ絶対値 1 ノ固有値

コノ注意スベキハ Banach 空間ハ任意デヨイコト
即チ (2) デアル必要ナイコト, 又 $P \in \text{kernel } P(x, \varepsilon)$
(ε) デ定義サレタ ε ノデアルコトモ positive operation
デアルコトモ必要ナイコトデアル。

II. P が上ノ $P(x, \varepsilon)$ デ定義サレタ (Markoff
chain ノ場合) トキ, 1 が P ノ固有値 = ナル。コノ
トキ $\lambda_1 = 1$ トヲクト (3) = 於ケル P_1 ハ

$$P_1(x, \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^{(m)}(x, \varepsilon) \quad (1)$$

ナル kernel デ定義サレル。コノ $P_1(x, \varepsilon)$ ハ

$$(4) \begin{cases} P_1(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^l c_i(x) f_i(\varepsilon), & P \cdot f_i = f_i, \quad f_i(\varepsilon) \geq 0, \end{cases}$$

$$C_i(x) \geq 0, \sum_{i=1}^l C_i(x) \equiv 1, \text{ 且 } \forall i = \text{disjoint}$$

+ E_i が存在して $f_i(E_i) = 1, (i = 1, 2, \dots, l)$

但し $f_i \in (M)$ 且 $C_i(x)$ は bounded Borel measurable.

III. 同じ Markoff chain / 場合 = P , 絶対値 1 / 固有値 λ_i は全て 1, root = +1.

談話 80 = 於てハ III, 証明 = II の essential = 使ッテラル。所が前号談話 807 = 於て, 角谷氏が III ハ P が semi-ordered Banach space, positive operation. ト云フ假定ノモト = I カラ導カレルコトヲ示サレタ。誠ニ鮮ナ証明デアッタ!!.

§2. 本談話デノ結果

斯ウシテクルト談話 807 = 角谷氏ノ指摘サレタ如ク Markoff chain ノ semi-ordered Banach space デ, (2) ノ満足スルト云フ假定ノ下ニ, norm 1 ノ positive operation トシテ相當程度迄抽象的ニ取扱フコトガ出來ル訳デアリマセウ。實際ソレハ以前ノ談話ノ

(1) x, E = 関スル一様收歟ノ limit.

$$P^{(n)}(x, E) = \int P^{(n-1)}(x, dy) P(y, E), P^{(1)}(x, E) = P(x, E)$$

所論ヲ檢ベテミルトワカリマス。然レ II ガナイト精密+結果ヲ出セナイコトモ亦否メマセン。positive operation ト云フコトカラ或ル程度迄 II = 類似ノコトハ出セルノデスガ、抽象的ニ扱フ以上仕方ナイノデアリマセウ。

所ガモ一度ヨク考ヘテミルト、semi-ordered Banach space ト云フテモ吾々ハ頭ニ (おれ) スハ (L) ヲ描キツツ考ヘテヲル訣デアリマス。ソシテ之モ角谷氏ノ得テレタ良キ結果⁽¹⁾ デアリマスガ

吾々ノ取扱フ semi-ordered Banach space = separable ト云フ假定ヲ入レレナラベコノ Banach space ハ (L) ノ closed linear subspace ト考ヘテヨイ。

ノデアリマシタ。従ツテ抽象化ト云フモノノ separability ヲ假定スル限り (L) デ議論スレバヨイ。

所ガ (L) デマルナラベ E_1 ハ measurable + kernel $E_1(x, y)$ デ定義サレルコトガ証明サレル。

$$E_1 \cdot f = g, (f, g \in (L)), g(y) = \int_0^1 f(x) p_1(x, y) dx$$

所ガ E ガ norm 1, positive operation ト云フコトカラ I ヲ用ヒ $p(x, y) \geq 0, \int_0^1 p_1(x, y) = 1$ ガ云ヘル訣デス。又 E_1 ガ $EE_1 = E, E = E^2 = E_1$ ヲ満足スルコト

(1) 帝國學士院記事 5号(1939)

カラ、 (M) ノトキト全ク同様ニシ

$$\text{II'. } \begin{cases} p_i(x, y) = \sum_{i=1}^l c_i(x) f_i(y), \quad P \cdot f_i = f_i, \quad f_i(y) \geq 0, \\ 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} c_i(x) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^l c_i(x) = 1, \text{ 且 } f_i(y) \cdot f_j(y) = 0 \quad (i \neq j), \\ \int_0^1 f_i(y) dy = 1 \quad (i=1, 2, \dots, l) \end{array} \right. \end{cases}$$

ナル完全 = II = 對應シタ コトガ云ヘマス。

従ツテ (I) デ (2) ヲ満足スル *norm 1* の *positive operation* ニツイテハ、以前 (M) デ (2) ヲ満足スル *Markoff chain* ニツイテ得ラレタ コトガ殆ンドソノマメ *übertragen* サレマス。

但シ *transition probability density* $p(x, y)$ ハ與ヘラレナイノデスカラ、得ラレル結果ハ

$\Omega = (0, 1)$ ノ *Borel* 集合 α ヲ任意ニトックトキ
之ガ時間ト共ニドノ様ニ遷移シテユクカ？

トイフ議論ニナル誤デス。具体的ニ *Markoff chain* デハ Ω ガ一点 x ニトレル所ガ都合ガヨイ誤デスカ、*probabilistic* ニハ上デ *essential* = ? 充分デアリマセヨ。

兎ニ角、*Banach* 空間ニ *separability* ヲ假定スレバ、(2) ヲ假定スル限り、マツマダ *Markoff chain*

ヲ抽象化シテモ *essential* = ハ新シイ結果が得アレナイ。
 ト云フヨリハ寧ロ 以前ノ結果ガ、完全連続性ヲ武器トスル
 (2)ヲ假定スル) 限り = 於テ、先ヅ々々 *transition*
process = 関シテ *best* ナモノデアツクト云ヘ様ト思
 ヒマス。即チ *Markoff chain* = 於テ (2)ヲ導入シテ
Kryloff - Bogoliouboff ノ炯眼ハ稱ヘラレテヨイ
 談デス。⁽¹⁾

§3. (5)ノ証明

大分ダラダラ永サツタデスカラ証明ノ不手道ダテ述ベマ
 ス。N. Dunford (*Integration and linear*
operations, Trans. Amer. Math. Soc.
 40, 3 (1936), p. 483)ノ結果ヲ用ヒルノデス。

Dunfordノ定理. $(L), (L) \rightarrow$ 連続ナ線型作
 用素 E_i = 對シテ 次ノ如キ (x, y) = 関シテ *measur-*
able ナ函数 $K_n(x, y)$ ノ系列ガ突ル。

i) x ヲ *fix* スルト $K_n(x, y)$ ハ全テ y = 関シ
 テ *integrable*.

(1) K-Bノ *complete Rendus*ノ論文カラハ炯眼ト云フ
 ヲリハ *glücklich* ダツストモ感ゼラレマス。何故カト
 云フト K-Bハ(2)ノ *intrinsic* ナ意味付 (例ヘバ 談話 169
 = *Doebelin*ノ假定カラ (2)ノ出ルコトヲ 吾々ハ示シタガ)
 ヲ全然誤ヘラレナイノデスカラ。

ii) 線型写像 $K_n \cdot f = g$, $g(y) = \int_0^1 f(x) K_n(x, y) dx$

$\wedge (L) \rightarrow (L)$, n 次元, linear subspace
= 寫入。

iii) 任意, $f \in (L) =$ 對シ

$$(b) P_n f = \text{strong limit}_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) K_n(x, y) dx$$

之レカラ (5) フ導クニハ, P_n が $I =$ ヨリ完全連続ナ
projection operator ($P_n^2 = P_n$) ナカラ, F. Riesz
ノ定理⁽¹⁾ニヨリ, P_n が $(L) \rightarrow (L)$ ノ有限次元ノ linear
subspace = 寫入寫像ナルコトニ注意スレバヨイ。即チコ
ノ事實ト ii) トヲ用ヒレバ (b) ノ收歛ガ $\|f\| \leq 1$ = 於イテ
一樣ナコトガワカル。ユレヨリ (5) フ導クコトハワケハナ
イ。

—— 以上 ——

(注意) 突ハ 3, 4 号前ノ Bult. Am. Math. Soc. =
J. Pettis が $(L) \rightarrow (L)$ ヘリツス完全連続線型寫像ハ可測
ナ kernel = ヨツテ定義サレルコトヲ証明ナシ = announce
シテアリマス。アレヲ見タトキニ角谷君ト証明ヲ考ヘテ Dun-
ford ノ定理カラコノ様ニシテ得ラレルト話シ合ツタコトガ
アリマシタ。アノトキニハ Markoff chain トノ關係ニ
氣付カトカツタ次第デシタ。今ノ場合ハ特別ノ場合デスカラ
尙易シイ誤デス。

(1) locally compact ナ Banach space ハ有限次元ガ
アルト云フ定理。

序イデナカラ Dunford / 定理 / 証明 / 方針ヲ述
ベテ置キマセウ。

方針 - $(L) = \wedge$ base がアル。即チ $(L) =$ 属スル
系列 $\{f_i\}$ ヲ適當ニトレバ任意ノ $f \in (L)$ ハ

$$f = \text{strong limit}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i f_i \quad (c_i \text{ 常数})$$

ト unique = 表ハサレル。コノ base トシテ有名ナ

haar / 直交函数系 ヲトレルコトハ知ラレテアル⁽¹⁾。 C_i

ハ明ニ (L) ノ上デノ連続ナ汎函数デアリマス: $C_i = F_i(f)$ 。

$$\text{ソコデ } T \cdot f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(f) f_i, \quad a_i(f) = F_i(T \cdot f), \quad a_i(f)$$

モ亦 (L) ノ上デノ連続ナ汎函数デアリマスカラ良ク知ラレ
タ F. Riesz ノ定理ニヨリ

$$a_i(f) = \int_0^1 \alpha_i(x) f(x) dx, \quad \alpha_i \in (M).$$

$$\exists \text{ ヲツテ } \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) f_i = S_n(x) \quad (\text{各 } x = \text{對シテ } \forall \text{ 函数 } \in (L))$$

トヲケバ

$$\sum_{i=1}^n a_i(f) f_i = \int_0^1 S_n(x) f(x) dx$$

コノ右辺ガ $\int_0^1 K_n(x, y) f(x) dx$ ト measurable kernel

(1) 例ハバ Kaczmarz-Steinhaus: Theorie der Ortho-
gonalreihen.

$K_n(x, y)$ デ書ケル ト云フ 所ガ *Dunford* ノ 証明 = 於テ
delicate ナ 所 + ノ デス。之レハ *Dunford* フミテ 頂
 ク コト = シマス。