



Title	Mannigfaltigkeit への連続変換
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 188, p. 500-506
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74745
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

814. Mannigfaltigkeit へ、連続変換

小 松 醇 郎 (阪大)

Sphäre へ、連続変換ハ Sphäre、特殊ノ性質、
故ニ 0-Zyklus ヲ使ッテ奇麗ニ取リ扱フコトガ出来る、
此ノ取扱ヒニハ如何ナル性質ガ本質的ニ必要デアラウカ、
コレヲ Mannigfaltigkeit = 就イテ調べルコトニ
スル。

(1) Definierender Zyklus, naht Zyklus.

Mannigfaltigkeit M^n ハ definierender
Zyklus Z^{n-1} = ヨリ一意ニ定メラル。ソノ Z^{n-1} ハ S^{n-1}
ノ点ヲ適當ニ互ヒニ Identifizieren シテ生ズルモノ
ナル。 n 次元 Vollkugel V^n ヲトリソノ Rand S^{n-1}
ヲ今ノ如ク Identifizieren シテ Z^{n-1} ヲ作ル。斯クス
ル事ニ依ッテ凡ベテ M^n ハ生ズル。

(証明略)

一ツノ M^n = 對シ如何ナル Z^{n-1} ガ起リ得ルカ。

M^n ヲ作ルマシテ、 S^{n-1} ノ Identifizierung ハ
如何ナル條件ヲ必要トスルカ。

等ノ問題が生ズル。

M^n ハ Vollkugel V^n ノ Rand ノ Identifi-
fizierung = ヨリ生ズル。従ッテ $K^{n-1} \longrightarrow M^n$ へ連
続変換アレタトキ、ソレト等シイ Abbildungsklasse
ノ中ニ $K^{n-1} \longrightarrow Z^{n-1}$ ナル連続変換ガ存在スル。然ラ

バ

$K^n \supset K^{n-1}$, $f: K^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1}$ 與へラレタトキ f が K^n 上 M^n へ erweitern 出来ルタメノ必要且ト 分ナ條件ハ何カトイフ問題モ生ズル。

(II) $f: K^n \rightarrow M^n$ (orientierbar) が與へラレ 且ツ $f(K^{n-1}) \subset \mathbb{Z}^{n-1}$ トスル。然ラバ各 n 次元単体 T_i^n へ對シ

$f(\dot{T}_i^{n-1}) \subset \mathbb{Z}^{n-1}$, $f(T_i^n) \subset M^n$, ヨリ $\text{mod } \dot{T}_i$ へ關シ $\text{Abbildungsgrad } m_i$ が一意ニ定マル。⁽¹⁾

對應 $f^n: T_i^n \rightarrow m_i$

ハ 0-Zyklus デアル。

定理. 連続変換 $f: K^n \rightarrow M^n$ が wesentlich auf f デアルタメノ必要且ト分ナ條件ハ 0-Zyklus $f^n \neq 0$ トルコトデアル。

証明 i) f が wesentlich auf f デトイテラバ $f^n \sim 0$ デアル。 f ト等シイ Klasse = アル Abbildung f' デ K^n へ $\mathbb{Z}^{n-1}$ へ移ル。然ラバ各 n 次元単体 T_i^n へ對シ topologisches Produkt $T_i^n \times \langle 0, 1 \rangle$ へ M^n へノ連続変換 φ が存在シ

$$\varphi(T_i^n \times 0) = f(T_i^n)$$

$$\varphi(T_i^n \times 1) \subset \mathbb{Z}^{n-1}$$

D Grad が同一デモ $T^n \rightarrow M^n$, Abbildung へ $\text{mod } \dot{T}^n$ デ一意トハ限ラナイ。是ガ Sphäre ト異ル所デアル。

$$\varphi(T_j^{n-2} \times \langle 0, 1 \rangle) \subset \mathbb{Z}^{n-1}$$

ヲ充ス. 故 $= T_k^{n-1} \times \langle 0, 1 \rangle =$ 對シ $\varphi = \exists$ リ $M^n \wedge$,

$\text{Grad } n_k$ が定マル. シカラベ $\varphi(T_i^n \times \langle 0, 1 \rangle) \subset M^n$
 $= \exists$ リ $T_i^n \times \langle 0, 1 \rangle$, 境界即チ

$$T_i^n \times 0 + \sum_k T_k^{n-1} \times \langle 0, 1 \rangle + T_i^n \times 1^{(2)}$$

ハ $\varphi = \exists$ リ $\text{Abbildungsgrad } 0$.

$$\text{故} = m_i + \sum n_k = 0$$

今 $(n-1)$ 次元代数複体 $f^{n-1}: T_k^{n-1} \rightarrow -n_k$ ヲトレ

ハ

$$f^n = g_0 \circ f^{n-1}$$

ii) $f^n \sim 0$ + 然バ f ハ wesentlich auf $\mathbb{P}^1$ 無イ.

各 $T_i^n =$ 對シ $T_i^n \times \langle 0, 1 \rangle$, 連続変換 φ が次ノ如ク作レバ良イ.

$$\varphi(T_i^n \times 0) = f(T_i^n)$$

$$\varphi(T_i^n \times 1) \subset \mathbb{Z}^{n-1}$$

先ヅ $T_k^{n-1} \subset T_i^n =$ 對シ $\varphi(T_k^{n-1} \times \langle 0, 1 \rangle)$ ヲ作ル.

假定カラ

$$g_0 \circ f^{n-1} = f^n, \quad f^{n-1}: T_k^{n-1} \rightarrow n_k \quad \text{トスレバ}$$

2) ニッノ単体 T_1^n, T_2^n が $\text{Grad } m_1, m_2$. 何レモ境界ハ

$\mathbb{Z}^{n-1}$ = 移ッテ居ル. 然ラバ $T_1^n + T_2^n$ ヲレッノ T^n ト考ヘ

レバ $\text{Grad} \wedge m_1 + m_2$

$\varphi(T_{\varepsilon}^{n-1} \times \langle 0, 1 \rangle)$ 、Grad- $n_{\varepsilon} + 1$ 様 = 容易 -
 レル。勿論 $\varphi(T_{\varepsilon}^{n-1} \times 1) \subset \mathbb{Z}^{n-1}$

然らば $T_{\varepsilon}^n \times 0 = \sum_{\varepsilon} T_{\varepsilon}^{n-1} \times \langle 0, 1 \rangle$ ハーツノ n 次元

Vollkugel V^n ト考ヘラレツノ境界 $\sum_{\varepsilon} T_{\varepsilon}^{n-1} \times 1$ ハ φ ヲ

$\mathbb{Z}^{n-1}$ = 移ッス。且ツ $\varphi(V^n)$ 、 M^n ヘノ Grad 0.

故ニ $\sum_{\varepsilon} T_{\varepsilon}^{n-1} \times 1$ 、Bild-ヲ変ヘズ = V^n 、Bild ヲ

stetig = $\mathbb{Z}^{n-1}$ = deform スルヲ得。ソノ Deformation

ノ途中ヲ $\varphi(T_{\varepsilon}^n \times \langle 0, 1 \rangle)$ 、Bild = トレバ Deformation

ノ最後ノ位置ガ $\varphi(T_{\varepsilon}^n \times 1) \subset \mathbb{Z}^{n-1}$ トナ

ル。

— 以上 —

(III) Abbildung, Wesentlichkeitsdimension.

$$f: K^m \longrightarrow M^n.$$

f ト等シイ Klasse ノ中、Abbildung デリ、Bild

ノ dimension ガ $p (\leq n, m)$ トルモノハ存在スル

ガ決シテ $p-1$ = トルモノガ存在シナイトキ f ノ Wesent-

lichkeitsdimension ハ p デアルトイフ。 f ノ

Wesentlichkeitsdimension ガ 0 ト云フコトハ f ガ

unwesentlich, homotop null トルコトデアル。

(II) = 於ケル wesentlich auf M^n 、Wesentlichkeitsdimension n トルコトデアル。

M^n ガ S^n ト異ナルベツチ數ヲ持ツナラバ任意ノ交換

$f: S^n \longrightarrow M^n$ ノ Wesentlichkeitsdimension $< n$

アアル。³⁾

$S^{n+1} \rightarrow M^n$, トキハ如何ニナルカ分ヲタイ。

定理. K^n が M^n へ *Wesentlichkeitsdimension* n で連続変換サレルナラバ K^n ノ中ニ u -Zyklus $Z^n \neq 0$ in bezug auf P_1 が存在シ Z^n 、 M^n へ *wesentlich auf* = 移ル。

証明. $f: K^n \rightarrow M^n$ *wesentlich auf* ナトスル。

今 $B_u^n(K^n, P_1) = 0$ ト假定スル。サテ $f = 0$ リ K^n へ 0 -Zyklus f^n が (II)ノ定義) 存在スル。假定ナラ $f^n \sim 0$ トナル。然ラバ (II)ノ定理ノ第二段ニヨリ f ハ *wesentlich auf* ナハナシナル。是ハイケナイ。

故ニ $B_u^n(K^n, P_1) \neq 0$ 。 $Z^n \neq 0$ が存在スル。

次ニ $f^n \neq 0$ トトツタガ 0 -Zyklus ハ $B_u^n(K^n, P_1)$ ノ P_1 へ、 u -ツノ *character*, $f^n \neq 0$ ナルコトハ或ル u -Zyklus $Z^n \rightarrow \alpha \neq 0 \in P_1$ ナル *Character* ナルコトデアル。然ラバソノ Zyklus Z^n ハ f テ M^n へ *wesentlich auf* アアル。 *wesentlich auf* ナイナラバ、 Z^n ナケヲ考ヘレバ f^n (Teilkomplexe Z^n ナケノ) ~ 0 故ニ f^n ナル *Character* テ $Z^n \rightarrow 0 \in P_1$ 。是 f^n が $Z^n \rightarrow \alpha \neq 0$ ナル *Character*

3) H. Hopf: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten Crelle. 163.

＝矛盾。

—— 以上 ——

(IV) $K^m \supset K^n$, $f: K^n \rightarrow M^n$.

定理. M^n が S^n と異ナルベッチ数ヲ持ツナラバ $f =$
 ヨル代数複体 f^n ($\Pi =$ 於ケル定義) ハ 0-Zyklus ナ
 アル。 ($K^{n+1} = \text{erweitern}$ 出来ナクテ)。

証明. $T_i^{n+1} = \sum_j T_j^n$ ハーッ, S^n

M^n が S^n と異ナルベッチ数ヲ持ツナラバ $f(S^n)$ ハ必ズ
 Grad 0. 即チ Wesentlichkeitsdimension $< n$.

$$\text{然ル} = g_0 f^n(T_i^{n+1}) = \sum_j f^n(T_j^n) = \sum_j m_j.$$

$$\text{茲} = m_j \text{ ハ } T_j^n = \exists \text{ Grad.}$$

$$\text{故} = \sum m_j = 0$$

(V) M^n が $(r+1), \dots, m$ simple⁴⁾ ナル
 トスル, 然ラバ $(r+2), \dots, m$ Hindernis が定
 義出来ル。

$$K^m \supset K^r \xrightarrow{f} M^n$$

f ハ $K^{r+1} = \text{erweitern}$ 出来ルトスル。

$$F(K^{r+1}) \subset M^n$$

4) S. Eilenberg: On the relation between the funda-
 mental group on a space and the higher
 homotopy groups. Fund. Math. 32.

安倍亮:

各 $T_i^{r+2} = \text{對シ } F(\dot{T}_i^{r+2}) \subset M^n$. 故 $= M^n / (r+1)$
 次 Homotopiegruppe $\pi^{r+1}(M^n)$ の元 α_i を定
 める。

$$\text{對應 } f^{r+2}: T_i^{r+2} \longrightarrow \alpha_i$$

ハーツノ代数複体である。

定理. 代数複体 f^{r+2} は 0-Zyklus である。

証明. 略. $(r+1)$ -Simple である故出来る。

0-Zyklus f^{r+2} は $(r+2)$ -Hindernis である。
 である。

定理. $K^r \xrightarrow{f} M^n$ が K^{r+1} 迄 erweitern 出来る。
 ニツノ Erweiterung $F_1, F_2 = \exists$ である。 $(r+2)$ -Hinder-
 nisse f_1^{r+2}, f_2^{r+2} が生ずる。然らば

$$f_1^{r+2} \sim f_2^{r+2}$$

定理. F が又 K^{r+2} まで erweitern 出来る。 $\times$
 必要且つ十分条件は Hindernis $f^{r+2} \equiv 0$ である。
 である。

此処、定理は Sphäre の場合と同様 = 証明出来る。即
 ち Hindernis = 一 "simple" 条件が必要且つ
 十分である。従って simple + Komplex = ツイテモ言へ
 るのである。