OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | Mannigfaltigkeit へノ連續変換 |
| Author(s) | 小松, 醇郎 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1939, 188, p. 500-506 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74745 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 814. Mannigfaltigkeit への連續変換

小松　醇郎（阪大）

Sphäre への連続変換は Sphäre の特殊の性質の故に 0-Zyklus を使って奇麗に取り扱うことが出来る、此の取扱ヒには如何なる性質が本質的に必要であるか、これを Mannigfaltigkeit に就いて調べるとにする。

(1) Definierender Zyklus, halt Zyklus.

Mannigfaltigkeit $M^n$ は definierender Zyklus $Z^{n-1}$ により一意に定まる。その $Z^{n-1}$, $S^{n-1}$ の点を適當に互に Identifizieren して生ずるモノデル。$n$ 次元 Vollkugel $V^n$ をとりその Rand $S^{n-1}$ を今の如く Identifizieren して $Z^{n-1}$ を作る。斯くする事に依って凡べて、$M^n$ は生ずる。

（証明略）

一つの $M^n$ に對し如何なる $Z^{n-1}$ が起り得るか。

$M^n$ を作るマシナ，$S^{n-1}$ の Identifizierung は如何なる條件を必要とするか。

等の問題が生ずる。

$M^n$ は Vollkugel $V^n$ の Rand の Identifizierung により生ずる。然って $K^{n-1} \longrightarrow M^n$ へ連続変換されるとき，それと等しい Abbildungsklasse の中に $K^{n-1} \longrightarrow Z^{n-1}$ なる連続変換が存在する。然ら

バ

$K^n \supset K^{n-1}$, $f: K^{n-1} \longrightarrow Z^{n-1}$ 與ヘラレタトキ $f$ ガ $K^n$ マデ $M^n$ ニ関シ erweitern 出来ルタメノ必要且十分ナ條件ハ何カトイフ問題モ生ズル。

(II) $f: K^n \longrightarrow M^n$ (orientierbar) ガ與ヘラレ且ツ $f(K^{n-1}) \subset Z^{n-1}$ トスル。然ラバ各 $n$ 次元單体 $T_i^n$ ニ對シ

$f(\dot{T}_i^{n-1}) \subset Z^{n-1}$, $f(T_i^n) \subset M^n$, ヨリ $\bmod \dot{T}_i$ ニ関シ Abbildungsgrad $m_i$ ガ一意ニ定マル[1]。

對應 $f^n: T_i^n \longrightarrow m_i$

ハ O-Zyklus デアル。

定理. 連続変換 $f: K^n \longrightarrow M^n$ ガ wesentlich auf デアルタメノ必要且十分ナ條件ハ O-Zyklus $f^n \sim 0$ ナルコトデアル。

証明 i) $f$ ガ wesentlich auf デナイナラバ $f^n \sim 0$ デアル。$f$ ト等シイ Klasse ニアル Abbildung $f'$ デ $K^n$ ハ $Z^{n-1}$ ニ移ル。然ラバ各 $n$ 次元單体 $T_i^n$ ニ對シ topologisches Produkt $T_i^n \times \langle 0, 1 \rangle$ ノ $M^n$ ヘノ連続変換 $\varphi$ ガ存在シ

$$\varphi(T_i^n \times 0) = f(T_i^n)$$

$$\varphi(T_i^n \times 1) \subset Z^{n-1}$$

---

1) grad ガ同一デモ $T^n \longrightarrow M^n$, Abbildung ハ $\bmod \dot{T}^n$ デ一意トハ限ラナイ。是ガ Sphäre ト異ル所デアル。

$$\varphi(T_j^{n-2}\times\langle 0,1\rangle)\subset Z^{n-1}$$

ヲ充ス．故ニ $T_k^{n-1}\times\langle 0,1\rangle$ ニ對シ $\varphi$ ニヨリ $M^n$ ヘノ grad $n_k$ ガ定マル．シカラベ $\varphi(T_i^n\times\langle 0,1\rangle)\subset M^n$ ニヨリ $T_i^n\times\langle 0,1\rangle$ ノ境界即チ

$$T_i^n\times 0+\sum_k T_k^{n-1}\times\langle 0,1\rangle+T_i^n\times 1 \quad 2)$$

ハ $\varphi$ ニヨリ abbildungsgrad 0.

故ニ　$n_i+\sum n_k=0$

今 $(n-1)$ 次元胞數複体 $f^{n-1}: T_k^{n-1}\longrightarrow -n_k$ ヲトレバ

$$f^n=g_0 f^{n-1}$$

ii)　$f^n\sim 0$ ナラバ $f$ ハ wesentlich auf デ無イ。

各 $T_i^n$ ニ對シ $T_i^n\times\langle 0,1\rangle$ ノ連続変換 $\varphi$ ガ次ノ如ク作レレバ良イ。

$$\varphi(T_i^n\times 0)=f(T_i^n)$$

$$\varphi(T_i^n\times 1)\subset Z^{n-1}$$

先ヅ $T_k^{n-1}<T_i^n$ ニ對シ $\varphi(T_k^{n-1}\times\langle 0,1\rangle)$ ヲ作ル．假定カラ

$$g_0 f^{n-1}=f^n,\quad f^{n-1}: T_k^{n-1}\longrightarrow n_k$$ トスレバ

---

2)　二ツノ単体 $T_1^n$, $T_2^n$ ガ grad $m_1$, $m_2$ 何レモ境界ハ $Z^{n-1}$ ニ核ッテ居ル．然ラバ $T_1^n+T_2^n$ ヲ一ツノ $T^n$ ト考ヘレバ grad ハ $m_1+m_2$

$\varphi(T_k^{n-1} \times \langle 0,1 \rangle)$ ノ grad-$n_k$ ナル様ニ容易ニ
レル. 勿論 $\varphi(T_k^{n-1} \times 1) \subset Z^{n-1}$

然ラバ $T_i^n \times 0 - \sum_k T_k^{n-1} \times \langle 0,1 \rangle$ ハ一ツノ $n$ 次元
Vollkugel $V^n$ ト考ヘラレツノ境界 $\sum_k T_k^{n-1} \times 1$ ハ $\varphi$ デ
$Z^{n-1}$ ニ移ッタ。且ツ $\varphi(V^n)$ ノ $M^n$ ヘノ grad 0.
故ニ $\sum_k T_k^{n-1} \times 1$ ノ Bild ヲ変ヘズニ $V^n$ ノ Bild ヲ
stetig ニ $Z^{n-1}$ ニ deform スルヲ得. ソノ Deformation
ノ途中ヲ $\varphi(T_i^n \times \langle 0,1 \rangle)$ ノ Bild ニトレバ Defor-
mation ノ最後ノ位置ガ $\varphi(T_i^n \times 1) \subset Z^{n-1}$ トナ
ル。

—— 以上 ——

(III) Abbildung, Wesentlichkeitsdimension.

$$f : K^m \longrightarrow M^n.$$

$f$ ト等シイ Klasse ノ中, Abbildung デソノ Bild
ノ dimension ガ $p$ ($\leqq n, m$) ナルモノハ存在スル
ガ次テ $p-1$ ナルモノガ存在シナイトキ $f$ ノ Wesent-
lichkeitsdimension ハ $p$ デアルトイフ. $f$ ノ
Wesentlichkeitsdimension ガ 0 ト云フコトハ $f$ ガ
unwesentlich, homotop null ナルコトデアル。
(II) ニ於ケル wesentlich auf ハ Wesentlichkeits-
dimension $n$ ナルコトデアル。

$M^n$ ガ $S^n$ ト異ナルベッチ数ヲ持ツナラバ任意ノ変換
$f : S^n \longrightarrow M^n$ ノ Wesentlichkeitsdimension $< n$

デアル。[3]

$S^{n+1} \longrightarrow M^n$ ノトキハ如何ニナルカ分ラナイ。

定理. $K^n$ が $M^n$ へ Wesentlichkeitsdimension $n$ デ連続変換サレルナラバ $K^n$ ノ中ニ $u$-Zyklus $Z^n \sim 0$ in bezug auf $P_1$ ガ存在シ $Z^n$ ハ $M^n$ ヘ wesentlich auf ニ移ル。

証明. $f : K^n \longrightarrow M^n$ wesentlich auf ダトスル。

今 $B^n_u(K^n, P_1) = 0$ ト假定スル。サテ $f$ ニヨリ $K^n$ ニ $0$-Zyklus $f^n$ ガ ((II) ノ定義) 存在スル、假定ニヨリ $f^n \sim 0$ トナル。然ラバ (II) ノ定理ノ第二段ニヨリ $f$ ハ wesentlich auf デハナクナル。矛盾ハイケナイ。

故ニ $B^n_u(K^n, P_1) \neq 0$. $Z^n \sim 0$ ガ存在スル。

次ニ $f^n \sim 0$ トイッタガ $0$-Zyklus ハ $B^n_u(K^n, P_1)$ ノ $P_1$ ヘノ一ツノ character, $f^n \sim 0$ トイフコトハ或ル $u$-Zyklus $Z^n \longrightarrow \alpha \neq 0 \in P_1$ トイフ Charakter ヲイフコトデアル。然ラバソノ Zyklus $Z^n$ ハ $f$ デ $M^n$ = wesentlich auf デアル。wesentlich auf デナイナラバ、$Z^n$ ガイヲ為ヘレバ $f^n$ (Teilkomplex $Z^n$ ガイノ) $\sim 0$ 故ニ $f^n$ ノ Charakter デ $Z^n \longrightarrow 0 \in P_1$. 是 $f^n$ ガ $Z^n \longrightarrow \alpha \neq 0$ ノ Charakter

---

3) H. Hopf: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten Crelle. 163.

ニ矛盾。 ——— 以上 ———

(Ⅳ) $K^m \supset K^n$, $f: K^n \longrightarrow M^n$.

定理. $M^n$ が $S^n$ ト異ナルベッチ数ヲ持ッナラバ $f$ ニヨル代数複体 $f^n$ (Ⅱニ於ケル定義) ハ 0-Zyklus デアル。 ($K^{n+1}$ = erweitern 出来ナクテモ)。

証明. $T_i^{n+1} = \sum_j T_j^n$ ハーツ, $S^n$

$M^n$ が $S^n$ ト異ナルベッチ数ヲ持ッナラバ $f(S^n)$ ハ必ズ grad 0. 即チ Wesentlichkeitsdimension $< n$.

然ルニ $g_0 f^n(T_i^{n+1}) = \sum_j f^n(T_j^n) = \sum_j m_j$.

茲ニ $m_j$ ハ $T_j^n$ ニヨル grad.

故ニ $\sum m_j = 0$

(Ⅴ) $M^n$ が $(r+1), \cdots\cdots, m$ simple[4] デアルトスル。然ラバ $(r+2), \cdots\cdots, m$ Hindernis ガ定義出来ル。

$$K^m \supset K^r \xrightarrow{f} M^n$$

$f$ ハ $K^{r+1}$ = erweitern 出来ルトスル。

$F(K^{r+1}) \subset M^n$

---

4) S. Eilenberg: On the relation between the fundamental group on a space and the higher homotopy groups. Fund. Math. 32.

安倍亮:

各 $T_i^{r+2}$ ニ對シ $F(\dot{T}_i^{r+2}) \subset M^n$. 故ニ $M^n$ ノ $(r+1)$ 次 Homotopiegruppe $\pi^{r+1}(M^n)$ ノ元 $\alpha_i$ ヲ定メル。

對應 $f^{r+2} : T_i^{r+2} \longrightarrow \alpha_i$

ハ一ツノ代數複体デアル。

定理. 代數複体 $f^{r+2}$ ハ O-Zyklus デアル。

証明. 略. $(r+1)$-simple ナル故出來ル。

O-Zyklus $f^{r+2}$ ヲ $(r+2)$-Hindernis ト云フ。

定理. $K^r \xrightarrow{f} M^n$ ガ $K^{r+1}$ 迄 erweitern 出來ル. ニツノ Erweiterung $F_1, F_2$ ニヨリニツノ $(r+2)$ Hindernisse $f_1^{r+2}$, $f_2^{r+2}$ ガ生ズル. 然ラバ

$$f_1^{r+2} \sim f_2^{r+2}$$

定理. $F$ ガ又 $K^{r+2}$ マデ erweitern 出來ルタメノ必要且ツ十分ナ條件ハ Hindernis $f^{r+2} \equiv 0$ ナルコトデアル。

此処ノ定理ハ Sphäre ノ場合ト同様ニ証明出來ル。即チ Hindernis ニハ"simple"ナル條件ガ必要且ツ十分デアル。從ツテ simple + Komplex ニツイテモ言ヘルコトデアル。