OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	H. Lebesgue 及ビ F.Riesz ノ定理ノ擴張
Author(s)	國澤, 清典
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 188, p. 507-519
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74746
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

815. H. Lebesgue 及ビ F. Riesz ノ定理ノ擴張

國澤 清典（阪大）

此處ニ Lebesgue ノ定理ト云フノハ Banach 空間（以下 B-空間ト書ク）L ニ於テ任意ノ $f_n \in L$ ノ作ル sequence $\{f_n\}$ が equi-integrable ナラバ $\{f_n\}$ ハ $f \in L$ ニ weakly convergスル sub-sequence $\{f_{n_i}\}$ ヲ含ムトイフノデアリ，又 Riesz ノ定理ハ L^p（$p>1$）ニ於テ有界集合が weakly compact デアルト云フノデアル。

今コノ L 及ビ L^p ヲ拡張シテ abstract valued function 即チ value が B-空間 X ニ屬スル函數ノ作ル空間ニシテ、後ニ於テ説明スル $L(x)$, $L^p(x)$, $(p>1)$ ノ場合デノ Lebesgue 及ビ Riesz ノ定理ヲ考ヘタイ。此ニ關シテ S. Bochner — A. E. Taylor ハ Ann of Math. 39 — 4 (1938) ニ於テ B-space X ガ regular 及ビ X ノ conjugate space $\overline{X}$ ニ値ヲモツ任意ノ有界変分ノ函數が微分可能ト云フ條件ノ假定ノ下ニ論ジテイルガ實ハ regular ナラバ locally weakly compact ナル[1]故ニ S. Bochner - A. E. Taylor ノ條件ヨリモ弱イ X が locally weakly compact ト云フ假定ダケカラ上記ノ二定

(1) 談話ノ中

理が得ラレルト云フ事ヲ述ベテ見タイ。

先ヅ可測，可積分ニ関スル S. Bochner ノ定義ヲ使ッテ次ノ函数空間ヲ定義スル。函数ハスベテ區間 $[0,1]$ ニ於テ a.e. ニ（殆ンドスベテノ点デ）定義サレテ S. Bochner ノ意味デ可測トスル。

$L^p(X)$, $(p \geq 1)$: 値ヲ B-空間 X ニモチ，$\|f\| = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ ガ finite ナ函数 f ノ作ル空間デ此ノ norm デ $L^p(X)$ $(p \geq 1)$ ハ B-空間ヲ作ル。$p=1$ ナラバ index ヲ省イテ $L(X)$ トスル。

$M(X)$: 値ヲ X ニモツ essentially bounded functions ノ作ル空間デ $\|f\| = \underset{0 \leq t \leq 1}{\text{ess. sup}} \|f(t)\|$ デ norm ヲツケルト $M(X)$ ハ B-空間トナル。

$L(X)$ デノ Lebesgue ノ定理

X ヲ weakly compact ナ B-空間トスル。

任意ノ $f_n(t) \in L(X)$ ノ作ル sequence $\{f_n(t)\}$ ガ equi-integrable[1] ナラバ $f(t) \in L(X)$ ニ weakly converg スル sub-sequence $\{f_{n_i}(t)\}$ ガ存在スル。

定理ノ証明ノ為メ次ノ lemma ヲアゲル。

lemma X ガ weakly compact ナラバ $L(X)$ デ

---

(1) 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シ $\delta > 0$ ガ定リ $mes(S) \leq \delta$ ナラバ S ニ無関係ニ $\int_S \|f_n(t)\| dt \leq \varepsilon$ ナルコト

定義サレタ linear functional ハ次ノ様ニ表ハセル。

$$U(t)=\int_0^1 \varphi(t)\,f(t)\,dt$$

但シ $\varphi(t)\in M(\overline{X})$, $f(t)\in L(X)$ 及ビ $\|U\|=\underset{0\le t\le 1}{\text{ess. sub}}\,\|\varphi(t)\|$ デアッテ $\varphi(t)f(t)$ ハ complex number system ニ値ヲトッ Lebesgue integrable function デ積分ハ Lebesgue integral デアル。

lemma ノ証明 B-空間 X ニ値ヲトッ有界変分ノ函数 f トハ如何ナル分割 $\{t_\nu\}: 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ ニ對シテモ

$$\underset{\{t_\nu\}}{\text{l.u.b}}\ \sum_{\nu}^{n}\|f(t_\nu)-f(t_{\nu-1})\|<\infty$$

ナル $f(t)$ ヲ云フコトニシ $V(X)$ デソノ space ヲ示スコトトスルト $V(\overline{X})$ ヲ $\varphi(t)$ ガスベテ a.e. ニ微分可能ナラバ $L(X)$ デ定義サレタ linear functional ハ

$$U(f)=\int_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt$$

デアル。但シ $\varphi(t)\in M(\overline{X})$, $f(t)\in L(X)$ 及ビ $\|U\|=\underset{0\le t\le 1}{\text{ess. sup}}\,\|\varphi(t)\|$ デアルト云フ S. Bochner – A.E. Taylor ノ結果 (Ann. of Math. 39-4 (1938)) トB-空間ガ locally weakly compact ナラベソノB-空間ニ value ヲトッ additive bounded variation ノ interval function ハ [0,1] デ

a.e.=微分可能デアルト云フ B.T. pettis ノ結果(Duke math. 5-2(1939))ト=依ッテ假定ヨリ X ハ locally weakly compact ナル故 $\overline{X}$ モ亦 locally weakly compact トナル故[1] = B.J. Pettis 及ビ S. Bochner - A.E. Taylor ノ條件ヲ滿足シテイルカラ $L(X)$ デノ linear functional ハ次ノ様ニ表ハセル。

$$U(f)=\int_0^1 \varphi(t) f(t)\,dt$$

定理ノ証明 適當ニ $f_n(t)(n=1,2,\cdots\cdots)$ カラ sub-sequence $\{f_{n_i}(t)\}$ ヲ選ンデ如何ナル $\varphi(t)\in M(\overline{X})$ ニ對シテモ次ノコトヲ証明スレバヨイ。

$$\int_0^1 \varphi(t) f_{n_i}(t)\,dt \longrightarrow \int_0^1 \varphi(t) f(t)\,dt.$$

今 $$F_n(\Delta)=\int_0^{\Delta} f_n(t)\,dt \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

ト置ケバ (integral ハ Bochner-integral, 以下 abstract valued function ノ integral ハスベテ Bochner ノ意味トスル) $f_n(t)$ ノ equi-integrable ナル事ヨリ

---

1) V. Gantmakher et V. Smulian, Sur les espaces linéaires dont la sphère unitaire est faiblement compacte, Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sience de l'U.R.S.S. 17(1937) P. 91-94. Theorem 3.

$$\| F_n(\delta) \| = \| \int_0^\delta f_n(t)\,dt \| \leqq \int_0^\delta \| f_n(t) \|\,dt$$

$$\leqq \int_0^1 \| f_n(t) \|\,dt \leqq M$$

ナルル及ビ δ ニ無関係ナ常数 M ヲ取リ得ル。

$[0, 1]$ ニ於テ everywhere dense ナ可附番個ノ点ヲ $\delta_1, \delta_2, \cdots\cdots$ トスレバ適當ニ sub-sequence $\{F_{n_i}\}$ ヲ選ビ各 δ_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ デX, element = weak = converge スルヌウニスルコトガ X, locally weakly compact ナルコトヨリ可能デアル。又 $\varphi F_n(\delta)$, equi-continious ナル事[1] ヲ使ヘバ各点 δ デ $\{F_{n_i}(\delta)\}$ ハ weak = converge スル事ヲ知ル。即チ

$$\lim_{n_i \to \infty} \varphi F_{n_i}(\delta) = \varphi F(\delta)$$

ト書ケル。此処ニ $F(\delta)$ ハ各 δ ニツイテソノ値ガX ニ属ス函数デアル。次ニ $f_n(t)$, equi-integrable ナルコトヨリ $\varepsilon > 0$ ヲ任意ニ與ヘ non-overlapping intervals $\{[t'_\nu, t_\nu]\}$ $(\nu = 1, \cdots\cdots m)$ ヲ取リ、$0 \leqq t'_1 < t_1 < t'_2 < t_2 < \cdots\cdots < t'_m < t_m \leqq 1$ トシ、$\sum_{\nu=1}^{m} (t_\nu - t_{\nu-1}) < \delta$ ナラバ

$$\sum_{\nu=1}^{m} \int_{t'_\nu}^{t_\nu} \| f_n(t) \|\,dt < 2 \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

---

(1) 之ハ f_n ノ equi-integrability カラ直グワカル。実ハ直グ後カラ証明スル様ニ $\varphi F_n(\delta)$ ハ equi-absolutely continuous ニナルノデアル。

ナラシメ得ル　$\|\varphi_\nu\|=1$ナル$\varphi_\nu\in\overline{X}$ ニ対シ

$$\sum_\nu|\varphi_\nu F x_i(t_\nu)-\varphi_\nu F x_i(t'_\nu)|\leqq\sum_\nu\|F x_i(t_\nu)-F x_i(t'_\nu)\|$$
$$=\sum_\nu\int_{t'_\nu}^{t_\nu}\|f x_i(t)\|\,dt<\varepsilon$$

$x_i\longrightarrow\infty$ ナラシメルト

$$\sum_\nu|\varphi_\nu F(t_\nu)-\varphi_\nu F(t'_\nu)|\leqq\varepsilon$$

ヨッテ特ニ

$$|\varphi_\nu F(t_\nu)-\varphi_\nu F(t_{\nu-1})|=|\varphi_\nu F(t_\nu-t_{\nu-1})|$$
$$=\|F(t_\nu-t_{\nu-1})\|$$

ナル様ナ$\|\varphi_\nu\|=1$ヲトルト

$$\sum_\nu|\varphi_\nu F(t_\nu)-\varphi_\nu F(t'_\nu)\|=\sum_\nu\|F(t_\nu)-F(t'_\nu)\|$$
$$=\sum_\nu\|F(t_\nu-t'_\nu)\|\leqq\varepsilon$$

故ニ

$$\sum_\nu\|F(t_\nu)-F(t'_\nu)\|\leqq\varepsilon$$

故ニ$F(t)$ハ absolutly continuous ナルコトガ分ッタ。

サテXハ locally weakly compact ナル故ニ lemma デ使ッタ Pettis ノ結果ヨリ，$F(t)$ハ明ラカニ bounded variation ナル故，$[0,1]$デ a.e. ニ derivative $F'(t)\in L(x)$ヲモッ、又$F(t)$ノ absolutly continuous ナルコトヨリ

$$F(s)=\int_0^s F'(t)\,dt.$$

何トナラベ

$$G(t)=F(t)-\int_0^t F'(t)\,dt$$

ト置クト $G(t)$ ハ又 absolutly continuous デa.e. $= G'(t) = 0$ ナル derivative ヲモツ。然ル= $G(t)$ ノ total variation ヲ $V(G)$ デ表ハスト

$$V(G_1) = \int_0^1 \| G'(t) \| = 0$$

故= $G(t)$ ハ identically const. デ $G(0) = 0$ ナル故=

$$G(t) \equiv 0$$

以上デ次ノコトが云ヘタ。

$$\lim_{n_i \to \infty} \varphi \int_0^\delta f_{n_i}(t)\,dt = \varphi \int_0^\delta F'(t)\,dt.$$

此レヨリ $\varphi(t)$ が step-function ナラバ容易=次ノ事が云ヘル。

$$\lim_{n_i \to \infty} \int_0^1 \varphi(t) f_{n_i}(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t) F'(t)\,dt.$$

然ル= $\varphi(t) \in M(\bar{X})$ ナラバ a.e. $= \varphi(t) =$ strong = converge スル uniformly bounded + step-function ノ系列 $\{\varphi_i(t)\}$ ヲ選ビ δ ヲ任意=與ヘテモ $mes(E) > 1-\delta$ ノ set E デ $\varphi_i(t)$ ヲ $\varphi(t)$ = uniform = converge サスコトが出來ル。[3] 又 $\{f_{n_i}(t)\}$ ノ equi-

---

3) S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, Fund. Math. Vol. 20 (1933) P.264.

integrability ト $\int_S \|F'(t)\|\,dt$ ノ absolutly continious ナルコトヨリ $\varepsilon>0$ ガ與ヘラレ、δ ガ上述ノ δ デアリ且ツ同時ニ次ノコトガ満足サレルヤウナ δ ヲ取ルコトガ出来ル。即チ E ノ余集合 S ニツイテ $mes(S)<\delta$ トナリ

$$\int_S \|F'(t)\|\,dt<\varepsilon$$

且ツ

$$\int_S \|f_{n_i}(t)\|\,dt<\varepsilon \qquad (n_i=n_1,n_2,\cdots\cdots)$$

又集合E上デ $\|\varphi_i(t)-\varphi(t)\|<\varepsilon$ ナル様ニ i ヲ充分大キク取ルト

$$\left|\int_0^t \varphi(t)f_{n_i}(t)\,dt-\int_0^t \varphi(t)F'(t)\,dt\right|\le\left|\int_0^t[\varphi(t)-\varphi_i(t)]f_{n_i}(t)\,dt\right|$$

$$+\left|\int_0^t \varphi_i(t)f_{n_i}(t)\,dt-\int_0^t \varphi_i(t)F'(t)\,dt\right|+\left|\int_0^t(\varphi_i(t)-\varphi(t))F'(t)\,dt\right|$$

$$\le\left|\int_E[\varphi(t)-\varphi_i(t)]f_{n_i}(t)\,dt\right|+\left|\int_S[\varphi(t)-\varphi_i(t)]f_{n_i}(t)\,dt\right|$$

$$+\left|\int_0^t \varphi_i(t)f_{n_i}(t)\,dt-\int_0^t \varphi_i(t)F'(t)\,dt\right|+\left|\int_E[\varphi_i(t)-\varphi(t)]F'(t)\,dt\right|$$

$$+\left|\int_S[\varphi_i(t)-\varphi(t)]F'(t)\,dt\right|$$

既ニ証明シタコトニヨリ n_i ヲ充分大キクトレバ

$$\left|\int_0^t \varphi_i(t)f_{n_i}(t)\,dt-\int_0^t \varphi_i(t)F'(t)\,dt\right|<\varepsilon$$

$(i=1,2,\cdots\cdots)$

トナリ又

$$\overline{M} = \mathrm{Max}\left(\operatorname*{ess.sup}_{0\le t\le 1} \|\varphi_i(t)\|,\ \operatorname*{ess.sup}_{0\le t\le 1} \|\varphi(t)\| \right)$$

トオケバ

$$\le \varepsilon \int_E \|f_{n_i}(t)\|\,dt + 2M \int_S \|f_{n_i}(t)\|\,dt + \varepsilon$$

$$+ \varepsilon \int_E \|F'(t)\|\,dt + 2M \int_S \|F'(t)\|\,dt$$

$$\le \varepsilon \int_E \|f_{n_i}(t)\|\,dt + 2M\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \int_E \|F'(t)\,dt + 2M\varepsilon$$

$\int_E \|f_{n_i}(t)\,dt$, $\int_E \|F'(t)\|\,dt$ ハ何レモ有界ナル

故ニ

$$\lim_{n_i\to\infty} \int_0^1 \varphi(t) f_{n_i}(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t) F'(t)\,dt$$

$F'(t)$ ヲ初メニオイタ $f(t)$ ト考ヘレバ証明ハ終ッタワケダアル。

次ニ $L^p(x)\ (p>1)$ ニツイテモ X ノ locally weakly compact ト云フ假定ノ下デヤレル。

$L^p(x)$ デノ Riesz ノ定理

X ガ locally weakly compact ナ B-空間ナラバ $L^p(x)$ ハ又 locally weakly compact デアル。

証明ノ前ニ lemma ヲ述ベテ置ク。

Lemma X ヲ locally weakly compact ナ B－空間トスレバ $L^p(X)$ デ定義サレタ linear functional ハ次ノ様ニカケル。

$$U(f)=\int_0^1 \varphi(t) f(t)\,dt$$

此処ニ $\varphi(t)\in L^q(\bar{X})$, $f(t)\in L^p(X)$。

$\|U\|^q=\int_0^1 \|\varphi(t)\|^q dt$，及ビ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ トス。

証明 $L_1(X)$ ノ Lemma ト全ク同様ノ理由ニヨルノデ省略スルコトトスル。（Bochner－Taylor 定理ト Pettis 定理ノ応用）

定理ノ証明 $\|f_n\|\leqq M$（M ハ常数）ナ $f_n(t)$ ノ sequence $\{f_n(t)\}$ カラ sub-sequence $\{f_{n_i}(t)\}$ ヲ選ンデ如何ナル $\varphi(t)\in L^q(\bar{X})$ ニ対シテモ

$$\lim_{n_i\to\infty}\int_0^1 \varphi(t) f_{n_i}(t)\,dt=\int_0^1 \varphi(t) f(t)\,dt$$

ヲ証明スレバ良イ。Hölder ノ不等式ニヨリ

$$\left\|\int_0^1 f_n(t)\,dt\right\|\leqq\int_0^1\|f_n(t)\|\,dt\leqq\left(\int_0^1\|f_n(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=\|f_n\|\leqq M$$

ナル故ニ

$$\int_0^s f_n(t)\,dt=F_n(s)$$

トオク事トシ $[0,1]$ ノ分割 $\{t_\nu\}$：$0=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_n=1$ ヲ考ヘ

$$V^p(f)=\underset{\{t_\nu\}}{l.u.b.}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\|f(t_\nu)-f(t_{\nu-1})\|^p}{|t_\nu-t_{\nu-1}|^{p-1}}<\infty$$

ナル $f(t)$ 全体ノ集合ヲ $V^p(X)$ デアラハスト

$$V^p(F_n)=\int_0^1\|f_n(t)\|^p dt\leq M^p \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

ナルコトガ容易ニ分リ $F_n(t)\in V^p(X)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ デアル。

サテ $[0,1]$ デ everywhere dense ナ集合 $\delta_1, \delta_2, \cdots\cdots$ ヲ取リ適当ニ sub-sequence $\{f_{n_i}(t)\}$ ヲ取リ各 δ_i ニツイテ

$$\varphi F_{n_i}(\delta_i)\longrightarrow \varphi F(\delta_i) \qquad \varphi\in\overline{X}$$

此処ニ $F(\delta_i)$ ハ各 δ_i ニツイテ X ノ element デアル。

任意ノ $\delta\in[0,1]$ ニツイテ ε ヲ任意ニ與ヘテ

$$|\varphi F_{n_i}(\delta)-\varphi F_{n_k}(\delta)|\leq|\varphi F_{n_i}(\delta)-\varphi F_{n_i}(\delta_i)|+|\varphi F_{n_i}(\delta_i)-\varphi F_{n_k}(\delta_i)|+|\varphi F_{n_k}(\delta_i)-\varphi F_{n_k}(\delta)|$$

$$|\varphi F_{n_i}(\delta)-\varphi F_{n_i}(\delta_i)|\leq(\|\varphi\|^q|\delta-\delta_i|)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{\|F_{n_i}(\delta)-F_{n_i}(\delta_i)\|^p}{|\delta-\delta_i|^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\|\varphi\|\,|\delta-\delta_i|^{\frac{1}{q}}M<\varepsilon \qquad (n_i=n_1,n_2,\cdots\cdots)$$

ナル様ニ δ ニ充分近イ δ_i ヲ取リ,

$$|\varphi F_{n_i}(\delta_{i0})-\varphi F_{n_k}(\delta_i)|<\varepsilon \qquad n_i,n_k>N$$

ナル様ニ n_i, n_k ヲ取レバ

$$|\varphi F_{n_i}(\delta)-\varphi F_{n_k}(\delta)|<3\varepsilon$$

此レヨリ各点デ如何ナル $\varphi\in\overline{X}$ ニツイテモ

$$\varphi\int_0^s f_{n_i}(t)\,dt \longrightarrow \varphi F(s)$$

此処ニ $F(s)$ ハ各 s ニツイテ $F(s)\in X$ ナル函数デアル。

次ニ $\|\varphi_\nu\|=1$ ナル φ_ν ニツイテ

$$\sum_\nu \frac{|\varphi_\nu F_{n_i}(t_\nu)-\varphi_\nu F_{n_i}(t_{\nu-1})|^p}{|t_\nu-t_{\nu-1}|^{p-1}} \leqq \sum_\nu \frac{\|F_{n_i}(t_\nu)-F_{n_i}(t_{\nu-1})\|^p}{|t_\nu-t_{\nu-1}|^{p-1}} \leqq M^p$$

$n_i\longrightarrow\infty$ トスレバ

$$\sum_\nu \frac{|\varphi_\nu F(t_\nu)-\varphi_\nu F(t_{\nu-1})|^p}{|t_\nu-t_{\nu-1}|^{p-1}} \leqq M^p$$

此処デ特ニ $|\varphi_\nu(F(t_\nu)-F(t_{\nu-1}))|=\|F(t_\nu)-F(t_{\nu-1})\|$, $\|\varphi_\nu\|=1$ ナル φ_ν ヲトレバ

$$\sum_\nu \frac{\|F(t_\nu)-F(t_{\nu-1})\|^p}{|t_\nu-t_{\nu-1}|^{p-1}} \leqq M^p$$

故ニ $F(t)\in V^p(X)$ ナルコトガ云ヘタ。

X ガ weakly compact ナル故ニ $F(t)$ ハ a. e. ニ derivative $F'(t)$ ヲモチ $F'(t)\in L^p(X)$ ナル事ハ容易ニワカリ，次ノ事ガ成立スル。

$$F(t)=\int_0^t F'(s)\,ds.$$

何トナラバ $F(t)-\int_0^t F'(s)\,ds=G(t)$ トオクトキ $F(t)\in V^p(X)$, $\int_0^t F(s)\,ds\in V^p(X)$ ナル故ニ其ノ差 $G(t)$ モ亦 $V^p(X)$ ニ

属ス。又 derivative $G'(t)=0$ ヲ a.e. ニモツコトヨリ

$$V^p(G)=\int_0^1 \| G'(t) \|^p dt = 0$$

故ニ $G(t)$ ハ identically const. デ $G(0)=0$ ヨリ $G(t)\equiv 0$ デアル。

故ニ

$$F(t)=\int_0^t F'(s)\,ds$$

以上デ適當ニ sub-sequence $\{f_{n_i}(t)\}$ ヲ エランデ次ノコトガ云ヘタ。

$$\lim_{n_i\to\infty} \varphi\int_0^s f_{n_i}(t)\,dt = \varphi\int_0^s F'(t)\,dt.$$

step-function ハ $L^q(\bar{X})$ デ everywhere dense ナルコトヨリ $L(X)$ ノトキト同様ニ $\varphi(t)\in L^q(\bar{X})$ ニ對シ

$$\lim_{n_i\to\infty}\int_0^1 \varphi(t) f_{n_i}(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t) F'(t)\,dt$$

$F'(t)$ ヲ $f(t)$ ト考ヘレバ証明ハ終ッタワケデアル。

(注意) 以上ノ事ヲ mean ergodic theorem ニ apply スレバ談話 776 ガ $L(X)$ 及 $L^p(X)$ デ論ジルコトガ出来ル。