OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Non-negative matrixノ固有値ニツイテ
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 188, p. 520-524
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74747
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

816. Non-negative matrix ノ固有値ニツイテ

角谷　静夫（阪大）

定理 matrix $P=(p_{ij})$, $i,j=1,2,\cdots\cdots,N$, ノ element p_{ij} ガスベテ non-negative デ且ツ P ノ固有値ノ絶對値ノ最大値ガ1デアレバ $|\lambda|=1$ ナル P ノ固有値ハスベテ $\lambda^n=1$ ヲ満足スル。但シ n ハ正ノ整數デアル。

コノ定理ハ Markoff chain ノ理論ヨリ予想サレルモノデアル。実際 $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}=1$ が $i=1,2,\cdots\cdots,N$ ニ対シテ成立スルトキハ P ハ Markoff chain ノ transition matrix トナルカラ、コノ定理ハ良ク知ラレタ結果トナル。更ニ、P ヲ completely continuous ナ positive linear operation ト考ヘレバ $\|P^n\|\leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キ constant C ガ存在スルトイフ條件ガアレバ、コレハ前々号（186号807）デ得タ結果ヨリ直チニ得ラレル。

シカシ P ノ固有値 λ ガスベテ $|\lambda|\leqq 1$ ヲ満足シテヰテモ、必ズシモ $\|P^n\|\leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キ constant C ハ存在シナイカラ（例ヘバ matrix $P=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ ヲ考ヘレバ $P^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ トナル）。コノ定理ハ別ニ証明ヲヤリ直ス必要ガアル。

コノ定理ハ先日 彌永、小平、安倍 三氏トノ談話ニテ

豫想サレタモノデアリマス。以下ノ証明中 matrix P^* ヲ考ヘルノハ小平氏ノ考ヘニヨルモノデアリ、Fixpunktsatz ヲ用ヒルノハ安倍氏ノ考ヘニヨルモノデアリマス。コヽニ三氏ニ対シテ深ク感謝致シマス。

尚ホ、後デ文献ヲシラベテ見ルト、全ク同ジ定理ガ Frobenius ニヨッテ既ニ 1912年ニ得ラレテヰルコトガワカッタ。(Sitzungsberichte, Berlin)

Frobenius ノ証明ハ相当面倒デアリ、且ツ我々ノ方法ハ Markoff chain ノ問題ニ reduce シテ証明スルノデアルカラ、以下ノ証明ハ興味ガアルト思フ。*)

証明 先ヅ $|\lambda|=1$ ナル P ノ固有値ハガ存在スレバ $\lambda=1$ ハ又 P ノ固有値トナリ、且ツ $P(x)=x$. (即チ $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\cdot x_j = x_i$, $i=1,2,\cdots\cdots,N$) ナル如キ positive vector $x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N)$, $x_i \geqq 0$ $(i=1,2,\cdots\cdots,N)$ (且ツ少クトモ一ツノ $x_i>0$) ガ存在スルコトガワカル。何トナレバ $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\xi_j = \lambda\xi_i$,

---

*) Frobenius ハ更ニ絶対値1ノ固有値ハ $(\lambda^m-1)(\lambda^p-1)(\lambda^\nu-1)\cdots\cdots=0$ ナル方程式ノ根全体トニ致スルトイフコトヲ示シテヰルガ、コレハ丁度前號(187号) 810ノ 472—474 頁デ得ラレタ Markoff-chain ニ関スル結果ト全ク同ジデアル。

$i=1,2,\cdots\cdots,N$ ナル如キ $(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_N)$ ガ存在シ

タトスレバ $\sum_{j=1}^{N} P_{ij}|\xi_j| \geqq |\xi_i|$, $i=1,2,\cdots\cdots,N$ トナ

ル。

即チ $P(|\xi|) \geqq |\xi|$ ナル如キ positive element $|\xi|=(|\xi_1|,|\xi_2|,\cdots\cdots,|\xi_N|)$ ガ存在スル。コレヨリ紙上談話會 110 号 952 ノ議論ヲ用フレバ（902 頁ノ定理 1）$Tx=dx$ ナル如キ positive element $x>0$ 及ビ positive number $d \geqq 1>0$ ガ存在スル。定理ノ假定ヨリ P ノスベラノ固有値ハ絶對値 1 ヲ超ヘナイカラ $d=1$ デナケレバナラヌ。$x=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_N)$ ハスベテ 0 トハナラナイガ、中ニハ 0 トナルモノガアルカモ知レナイ。

(i) スベテノ $x_i>0$ ナルトキ。コノトキハ $p^*_{ij}=x_i^{-1}p_{ij}x_j$ トオキ matrix $P^*=(p^*_{ij})$ ヲ考ヘル。シカルトキハ明カニ P^* ハ P ト同ジ固有値ヲモチ且ツ $\sum_{j=1}^{N} p^*_{ij}=x_i^{-1}\sum_{j=1}^{N} p_{ij}x_j=1$ デアルカラ P^* ハ Markoff chain ノ matrix デアル。ヨッテ（既ニ述ベタ）良ク知ラレタ結果ニヨリ P^* ノ固有値、シタガッテ P ノ固有値デ $|\lambda|=1$ トナルモノハスベテ $\lambda^n=1$ ヲ満足スル。

(ii) x_i ノウチニ 0 トナルモノガアル場合.

$0<r<N$ ヲトリ、$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_r>0$, $x_{r+1},x_{r+2},\cdots\cdots,x_N=0$ デアルト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。

然ルトキハ $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} x_j = 0$, が $i > r$ = 対シテ成立ス
ルコトヨリ $i > r$, $j \leqq r$ = 對シテ $p_{ij} = 0$ トナラネバナ
ラヌ。ヨッテ matrix P ハ $P = \begin{pmatrix} P_1 & * \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ ナル形ニ分解
スル。シタガッテPノ固有値ハ P_1 及ビ P_2 ノ固有値ノ全体
ト一致スル。ヨッテ我々ノ問題ハ P ヨリ degree 低イ
matrix ノ場合ニ reduce サレタ。Pノ degree
ガ1ナルトキハ定理ハ明カニ真デアルカラ、帰納法ニヨッ
テ証明ハ完結スル。

注意　上ノ証明ハ紙上談話會ノ10号 752 ノ結果ヲ
使フノデ少シ複雑デアル。コレヲモットワカリ易クスルニハ
次ノヤウニスレバヨイ。（実際ハ、談話752ノ定理1ハ
elementary ナ定理デ、以下ニ使フ Fix-punkt-
satz ハ elementary デハナイ定理デアルカラ、以下
ノ議論ハカヘッテ難カシイコトヲヤルコトニナルワケデア
ルガ、以下ノ証明ノ方ガ遙カニワカリ易イ）。

先ヅ P ノ real positive ナ固有値 λ ト $P(x) = \lambda x$ ナル如キ positive vector x トガ存在スル
コトヲ証明スル。コレヲ示スニハ sphere $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 = 1$, positive part ($x_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$) ヲソレ自身ニウツス写像 $\varphi(x) = \dfrac{P(x)}{\|P(x)\|}$
（但シ $\|\cdots\|$ ハ Euclid ノn次元空間トシテノ norm）

ヲ考ヘテコノ写像ニ Fixpunkt ガアルコトヲ思ヘバヨイ。($\varphi(x)=x$ トナルコトハ $P(x)=\alpha x$ トナル positive number α が存在スルコトト同等デアル) $\alpha\leqq 1$ トナルコトハ仮定ヨリ明カ。

此ノ如ク α トセトガ定マレバ後ハ (i)(ii) ノニツノ場合ニワケテ殆ンド同様ニ議論ヲスヽメルコトガ出来ル。即チ (i) ノ場合ハ $P^*=(P_{ij}^*)$ ナル matrix ハ $\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^* = \alpha \leqq 1$ ヲ満足スルカラ $\|P^*\|=\alpha<1$ デアル。ヨッテ P^* レタガッテ P ノ固有値入ハスベテ $|\lambda|\leqq\alpha$ トナリ、$|\lambda|=1$ ナル固有値ガ存在スルコトニ矛盾スル。(ii) ノ場合ハ全ク同様ニシテ $P=\begin{pmatrix} P_1 & * \\ 0 & P_i \end{pmatrix}$ トナルカラ、マハリ帰納法ガ応用出来ル。