



Title	P. Levy ノ定理ノ直接ナ証明 (by G. Ottaviani)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 188, p. 524-527
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74748
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

817. P. Levy, 定理, 直接に証明
(by G. Ottaviani)

吉田 耕作 (阪大)

P. Levy, 定理 互=独立+ variables
aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ の和 $\sum_{i=1}^n X_i$ が $n \rightarrow \infty$

ナルトキ 確率収斂⁽¹⁾ スルナラバ 殆ど石確実=収斂スル⁽²⁾。

(脚註次頁へ)

コ、Levy, 定理ハ所謂 *probabilités dénombrables* = 於ケル基本定理デアリ, Levy 自身ノ証明ハ
 彼ノ書物 *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (1937) p. 139 = 載ッテアル。彼ノ散縮度
増加ノ原理⁽³⁾ = ヨリ Kolmogoroff ノ不等式⁽⁴⁾ヲ拡張
 シナガラノ証明ハ誠ニ興味カデアルケレドモ一寸仰々シスヤ
 ルシ, 従ッテ又定理ノカラクリモワカリ難イ。重要ナ定理ヲ
 アル丈ケニ兼々氣ニ掛ッテ居ッタノデスガ, 最近著ノ
Giorn. d. Ist. ital. d. Attuari 誌(X, 1-2)
 = G. Ottaviani ノ証明ヲ見付ケマシタ。文字通りノ
one page proof デアリ, 問題ニ直接ブッカッテミル事
 ガ大切ナコトヲ筆者ハ教ヘラレマシタ。兎ニ角コレデ Levy
 ノ定理ノカラクリガハツキリシマシタカラ証明ヲ記録シテヲ
 クノモ無駄デハナイト信ジマス。

variables aléatoires デハワカリ難イカラ Lebesgue 積分ノ言葉ニ翻澤シマスト定理ハ次ノ如クナル訳
 デス。

定理. $(0, 1)$ デ可測ナ函数 $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t),$
 $\dots$ ガ独立函数系⁽⁵⁾ヲ作ルトキ $= \sum_{i=1}^n f_i(t)$ ガ $n \rightarrow \infty$ ナ
 (脚註5ハ次頁へ)

(1) converge in probability

(2) converge almost certainly (?)

(3) 北川敏男氏ノ譯

(4) Levy 前掲書, p. 141

ルトキ 漸近収斂⁽⁶⁾ スルヲバ, 実ハ 殆ド全テノ 尤デ収斂ス
ル。

証明 $a < b$, $r \leq n$ トシ $E_{r,n}(a, b) = E_x \left\{ a \right.$
 $\left. \leq \sum_{i=r}^n f_i(x) \leq b \right\}$ ト置ク。先ヅ漸近収斂ト云フ假定カラ任

意, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ = 對シ r_0 ヲ充分大キクトレバ

$$(1) \quad \text{mes} \left\{ E_{r,n} \left(\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right) \right\} \geq 1 - \delta \quad \text{for } r_0 \leq r \leq n$$

所ガ明カニ

$$\sum_{m=r}^{n-1} \left\{ \left(\prod_{i=r}^{m-1} E_{r_i}(-\infty, \varepsilon) \right) \cdot E_{r_m}(\varepsilon, \infty) \cdot E_{m+1,n} \left(\frac{-\varepsilon}{2}, \infty \right) \right\}$$

$$\subseteq E_{r,n} \left(\frac{\varepsilon}{2}, \infty \right).$$

左辺, $\{ \} =$ 於テ $E_{m+1,n} \left(\frac{-\varepsilon}{2}, \infty \right) \cap (1) = \exists$ リ $\text{mes} \geq 1 - \delta$

ヨツテ独立ノ假定カラ

$$(1 - \delta) \text{mes} \left\{ \sum_{m=r}^{n-1} \left[\prod_{i=r}^{m-1} E_{r_i}(-\infty, \varepsilon) \right] \cdot E_{r_m}(\varepsilon, \infty) \right\}$$

$$\equiv \text{mes } E_{r,n} \left(\frac{\varepsilon}{2}, \infty \right).$$

左辺ノ括弧 $\{ \}$, 中ハ少クトモ一ツ, i ($r \leq i \leq n$) = 對

(5) 任意ノ n ト $\{a_i\}$, $\{b_i\} =$ 對シ $\text{mes}_x \{ a_1 \leq f_1(x) \leq b_1, \dots$
 $\dots, a_n \leq f_n(x) \leq b_n \} = \prod_{i=1}^n \text{mes} \{ a_i \leq f_i(x) \leq b_i \}.$

ガ成立ツコト。

(6) asymptotic convergent

$\therefore \sum_{j=r}^i f_j(t) \geq \varepsilon + \nu$ 如き t , 集合 $e_{rn}(\varepsilon, \infty)$ を表はす。

即ち

$$(1-\delta) \text{mes}(e_{rn}(\varepsilon, \infty)) \leq \text{mes } E_{rn}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \infty\right)$$

$$\text{同様} = (1-\delta) \text{mes}(e_{rn}(-\infty, -\varepsilon)) \leq \text{mes } E_{rn}\left(-\infty, -\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

よって全て, $i(r \leq i \leq n) =$ 對し $-\varepsilon \leq \sum_{j=r}^i f_j(t) \leq \varepsilon + \nu$
 t , 集合 $e'_{rn}(-\varepsilon, \varepsilon)$ とスル心 ($r_0 \leq r \leq n + \nu$ とす)

$$\begin{aligned} \text{mes } e'_{rn}(-\varepsilon, \varepsilon) &= 1 - \text{mes}\{e_{rn}(\varepsilon, \infty) + e_{rn}(-\infty, -\varepsilon)\} \\ &= 1 - \text{mes } e_{rn}(\varepsilon, \infty) - \text{mes } e_{rn}(-\infty, -\varepsilon) \\ &\geq 1 - \frac{1}{1-\delta} \text{mes}\left\{E_{rn}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \infty\right)\right\} + \text{mes } E_{rn}\left(-\infty, -\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{1-\delta} \text{mes}\left\{E_{rn}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \infty\right) + E_{rn}\left(-\infty, -\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} \\ &\geq 1 - \frac{1}{1-\delta} \{1 - (1-\delta)\} \quad \text{by (1)} \end{aligned}$$

ε, δ は任意なツスカラ 証明了リデアル。